

# 气体放电系统中时空斑图的时滞反馈控制\*

贺亚峰<sup>1)†</sup> 冯晓敏<sup>1)</sup> 张亮<sup>2)</sup>

1) (河北大学物理学院, 光电信息材料重点实验室, 保定 071002)

2) (河北师范大学职业技术学院, 石家庄 050024)

(2012年6月18日收到; 2012年7月12日收到修改稿)

采用时滞反馈的方法实现了对气体放电半唯象模型中时空斑图的控制. 在 Turing-Hopf 切空间附近分析了时滞反馈对 Turing 模与 Hopf 模的影响, 确定了反馈参数与系统振荡频率及临界波长的关系. 结果表明, 在保持外加电压不变的情况下, 时滞反馈可有效控制斑图的转换. 增加反馈强度或延迟时间等效于增加外加电压. 进一步利用二维数值模拟进行了验证. 研究结果对气体放电系统中实现斑图的控制提供了一种新思路.

**关键词:** 气体放电, 斑图, 时滞反馈

**PACS:** 52.80.Dy, 05.45.-a, 02.30.Ks

## 1 引言

时空斑图是一种在延展系统中自组织形成的时空有序结构, 其广泛存在于自然界与许多实验室研究问题中. 它具有能够自组织产生的特性和跨系统的普适性规律, 因而受到学术界广泛的关注和深入研究探讨<sup>[1]</sup>. 在有些问题中, 斑图的形成是人们所期望的. 例如, 软物质材料在聚集过程中的自组织生长与纳米材料的自组装过程<sup>[2,3]</sup>. 人们希望能够以一种可控的方式实现 InGaAs 量子点的自组织生长, 因此, 对 Turing 斑图控制机理的研究很有必要<sup>[3]</sup>. 而在另外一些实际问题中斑图形成常常是人们希望避免的. 例如, 实验与理论研究已经表明, 心脏的心率不齐和室颤的病变问题与螺旋波斑图和螺旋波破缺产生的缺陷湍流有着直接的联系<sup>[4]</sup>. 因此, 对时空斑图进行有效的控制研究具有现实意义.

对斑图的控制目前有外部作用力与内部反馈两种方法. 外部作用力的方法通常是空间均匀的作用力<sup>[5]</sup>, 或者是沿某一方向上施加外场力(平流场, 电场等)<sup>[6,7]</sup>. 通常, 外部作用力是独立于系统环境

的, 因而实现起来非常简单. 但由于控制信号与系统没有相互耦合, 所以对斑图控制的效果有局限性, 比如控制强度不容易自适应. 内部反馈控制(这里指时滞反馈: 时间延迟反馈)是从系统某个区域提取出信号并经过一个适当的时间延迟反馈回路再耦合到系统中, 达到控制时空斑图的目的<sup>[8-12]</sup>. 例如, 在光敏 Belousov-Zhabotinsky 化学反应实验中, 由于  $Ru(bpy)_3^{2+}$  使反应具有光敏性, 因此可利用外界光强的作用来控制系统的可激发性, 进而达到控制斑图的目的. 内部反馈控制操作起来稍复杂, 但往往更有效, 因此, 引起了人们更多的关注.

气体放电系统是研究斑图动力学的一个理想实验系统, 其具有放电本身发光、形成定态斑图时间非常短及控制参量方便易调等特点, 因而备受人们关注. 在该系统中已经发现了螺旋波、六边形、条纹、超点阵等丰富的时空斑图<sup>[12-18]</sup>. 目前, 气体放电系统中的实验装置主要分直流放电与交流放电两大类. 交流放电主要利用玻璃作介质, 放电空间的放电丝通过复杂的相互作用自组织形成时间、空间或时空上有序的斑图<sup>[12-16]</sup>. 直流放电中主要采用半导体(Si 掺杂 Zn 或 Au)作阴极, 透

\* 国家自然科学基金(批准号: 11205044, 10947166, 10975043)、河北省自然科学基金(批准号: A2011201006, A2010000185)、河北省教育厅基金(批准号: Y2012009)和河北大学科学研究基金(批准号: 2011JQ04)资助的课题.

† E-mail: heyf@hbu.edu.cn

明 ITO 玻璃作阳极. 由于半导体电极对红外线敏感, 因此可利用红外线均匀照射半导体电极, 达到改变半导体电导率的作用. 为了解释直流放电中观察到的六边形、条纹及局域态等斑图, Purwins 等人提出了一个半唯象的两变量反应扩散模型<sup>[17,18]</sup>. 其中, 活化子为放电空间电荷密度, 禁阻子为放电间隙上的电压降. 在系统经历 Turing 分岔后, 他们得到了六边形与条纹斑图.

目前, 气体放电实验中斑图形成与演化的控制主要是通过调节外加驱动电压来实现<sup>[12-18]</sup>. 例如, 在直流放电中, 通常的控制电压小于 3 kV. 然而, 由于半导体等介质的耐压程度有限, 因此, 通过进一步增加放电电压来控制斑图的形成与演化并不可行. 为了发现新型放电斑图并深入研究其动力学, 需要采用其他的方法来实现斑图的有效控制. 针对这一问题, 本文利用 Purwins 等提出的半唯象反应扩散模型, 采用内部时间延迟反馈的方法, 分析了不同延迟时间与反馈强度对斑图的控制作用, 并进一步利用数值模拟进行了验证.

## 2 时滞反应扩散模型

本文改进了描述直流气体放电斑图反应扩散模型<sup>[17,18]</sup>, 如下:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{u_b - u}{\tau_u} - cuv + D_u \nabla^2 u + F \quad (1a)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{v}{\tau_v} + uv \left[ a + b \left( \frac{v}{v + v_a} \right)^2 \right] + D_v \nabla^2 v, \quad (1b)$$

其中,  $u$  表示放电间隙的电压降, 作为禁阻子,  $v$  表示放电空间的电荷密度, 作为活化子,  $D_u$  和  $D_v$  分别表示它们的扩散系数.  $\tau_u$  是放电间隙的特征充电时间, 与半导体电极的电阻及放电间隙的电容有关,  $\tau_v$  是空间电荷的弛豫时间.  $u_b$  代表电源外加电压.  $c$  代表放电速率. 参数  $a, b$  和  $v_a$  决定了系统的零线图形状, 如图 1 所示.  $F$  是内部时间延迟反馈项, 具有如下形式:

$$F = g_u [u(t - \tau) - u(t)], \quad (2)$$

其中,  $\tau$  表示延迟时间,  $g_u$  表示反馈强度. 在这里, 我们只考虑对方程 (1a) 引入延迟反馈. 由于半导体阴极对红外线敏感, 红外照射可改变其电导率, 进而影响放电间隙的电压降. 因此, 对变量  $u$  引入延

迟反馈在实验上很容易实现. 除非特别说明, 以下分析与数值模拟中均采用如下参数:  $a = 1, b = 0.5, c = 0.00001, v_a = 7 \times 10^4, D_u = 1, D_v = 0.022, \tau_u = 0.04$  和  $\tau_v = 0.001, \tau = 0.1$ .

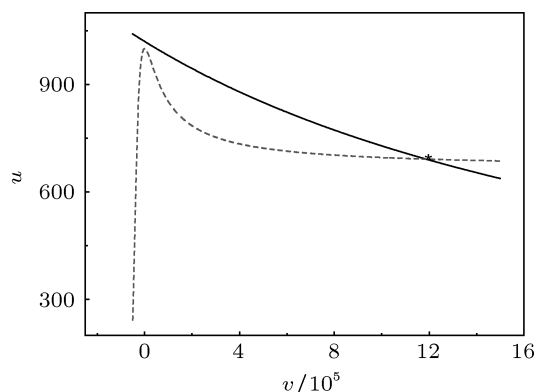


图 1 系统的零线图. 实线代表  $\frac{u_b - u}{\tau_u} - cuv = 0$ , 虚线代表  $-\frac{v}{\tau_v} + uv \left[ a + b \left( \frac{v}{v + v_a} \right)^2 \right] = 0$

为了研究时间延迟反馈对气体放电斑图的控制作用, 我们首先对延迟反馈项做近似处理, 进一步对系统进行线性稳定性分析, 讨论时滞反馈对 Turing 与 Hopf 不稳定性的控制作用. 由于延迟反馈项包含  $u(t - \tau)$ , 因此直接分析很困难. 我们将  $u(t - \tau)$  做一阶泰勒近似:

$$u(t - \tau) = u(t) - \tau \frac{\partial u}{\partial t}. \quad (3)$$

因此, 方程 (1) 变为

$$(1 + \tau g_u) \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{u_b - u}{\tau_u} - cuv + D_u \nabla^2 u, \quad (4a)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{v}{\tau_v} + uv \left[ a + b \left( \frac{v}{v + v_a} \right)^2 \right] + D_v \nabla^2 v. \quad (4b)$$

方程 (4) 的均匀定态解  $(u_0, v_0)$  由系统零线图中曲线的交点决定, 如图 1 所示. 对该均匀定态解  $(u_0, v_0)$  做微扰  $(\delta u, \delta v) \sim \exp(\lambda t + ikr)$ , 得特征方程

$$\begin{pmatrix} a_{11} - (1 + \tau g_u)\lambda - k^2 D_u & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda - k^2 D_v \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \delta u \\ \delta v \end{pmatrix} = 0, \quad (5)$$

其中

$$a_{11} = -\frac{1}{\tau_u} - cv_0, \quad a_{12} = -cu_0,$$

$$a_{21} = v_0 \left[ a + b \left( \frac{v_0}{v_0 + v_a} \right)^2 \right],$$

$$a_{22} = -\frac{1}{\tau_v} + u_0 \left[ a + b \frac{\nu_0^3 - 3\nu_0^2\nu_a}{(\nu_0 + \nu_a)^3} \right].$$

解 (5) 得本征值方程

$$A\lambda^2 - B\lambda + C = 0, \quad (6)$$

其中,  $A = (1 + \tau g_u)$ ,

$$B = a_{11} + a_{22}(1 + \tau g_u) - (1 + \tau g_u)k^2 D_v - k^2 D_u,$$

$$C = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} - a_{11}D_v k^2$$

$$- a_{22}D_u k^2 + k^4 D_u D_v.$$

色散关系的解为  $\lambda_{1,2} = \frac{B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$ . 当本征值的实部大于零时, 系统均匀定态解失稳. 在  $k = 0$  处, Hopf 不稳定性引起时序振荡斑图, 如螺旋波斑图. 在  $k \neq 0$  处, Turing 不稳定性引起静止的 Turing 斑图, 如六边形与条纹斑图. 显然, 本征值的实部不仅取决于系统控制参数, 还受反馈参数  $\tau$  和  $g_u$  的影响. 图 2 给出了系统的色散关系图. 由图可见, Hopf 模与 Turing 模均受时滞反馈参数的影响. 当反馈强度由  $g_u = 0$  增加到  $g_u = 5$  时, 稳定的 Hopf 模失稳, 系统振荡频率降低, Turing 模增强. 因此, 通过改变反馈强度可控制 Hopf 模与 Turing 模的强度, 进而实现控制 Turing 斑图与振荡斑图的转化.

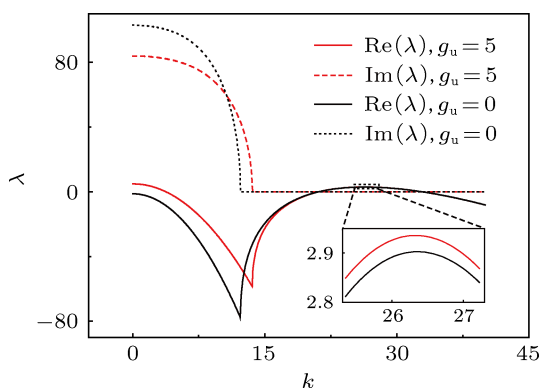


图 2 色散关系 (实线和虚线分别代表本征值的实部和虚部. 图中的数字表示反馈强度  $g_u$ . 插入的小图是 Turing 模的局部放大)

系统在  $k = 0$  处发生 Hopf 分岔的必要条件是  $B_0 = a_{11} + a_{22}(1 + \tau g_u) = 0$ , 在  $k \neq 0$  处发生 Turing 分岔的必要条件是  $da_{11} - a_{22} = 2\sqrt{-da_{12}a_{21}}$ , 其中  $d = D_v/D_u$ . 由此给出相图, 如图 3 所示. Hopf 分岔线与 Turing 分岔线交于一点. 本文将主要讨论

时滞反馈在该切空间附近对 Hopf 与 Turing 模的影响, 进而确定时滞反馈对斑图的控制作用.

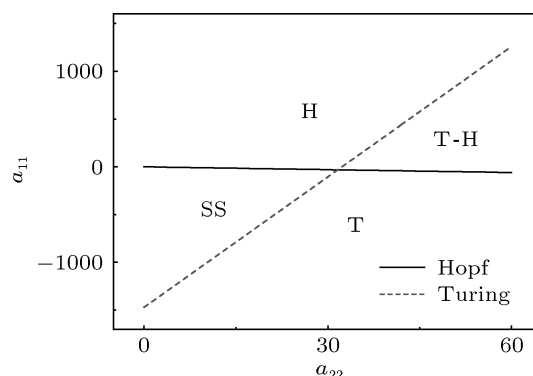


图 3  $a_{11}$ - $a_{22}$  相图 (实线(虚线)表示 Hopf(Turing) 分岔线. 其中 SS 代表均匀定态区, T 和 H 分别代表 Turing 和 Hopf 失稳区, T-H 代表 Turing 和 Hopf 共同失稳区)

当系统位于 Hopf 分岔临界点时, 系统的振荡频率可表示为  $\omega_c = \sqrt{\frac{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}{1 + \tau g_u}}$ . 由此可见, 延迟参量将影响系统的振荡频率. 图 4 给出  $\omega_c$  随  $g_u$  的变化关系, 随着反馈强度的增加, 振荡频率快速下降. 通常, 在没有时滞反馈时, 系统的振荡频率与 Hopf 模的强度耦合在一起, 很难在保持一个量不变的情况下改变另一个量. 然而, 由图 4 我们发现, 即使在保持 Hopf 模强度不变的情况下, 也可以通过调节反馈参数来达到控制系统振荡频率. 因此, 时滞反馈提供了一种可方便控制 Hopf 振荡频率的方法.

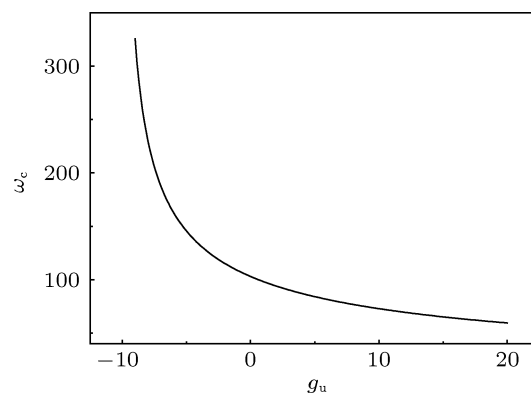


图 4 临界振荡频率随反馈强度的变化关系

对于 Turing 模, 时滞反馈不仅影响 Turing 模的强度, 还影响最危险 Turing 模对应的临界波数. 图 5 给出 Turing 模强度与临界波数随反馈强度的变化关系. 图中虚线表明, 随反馈强度增加, Turing

模逐渐增强. 因此, 时滞反馈可控制 Turing 斑图(如六边形与条纹斑图)的形成. 图中实线表明, 随反馈强度增加, 最危险 Turing 模对应的波数逐渐减小. 因此, 时滞反馈可控制 Turing 斑图的空间波长.

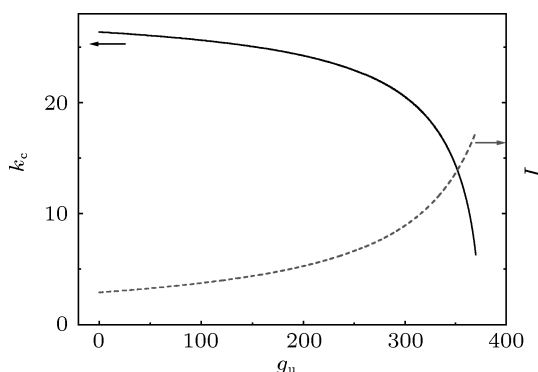


图 5 临界波数  $k_c$  与最危险 Turing 模强度  $I$  随反馈强度的变化关系 (虚线和实线分别代表最危险 Turing 模强度与临界波数)

上述分析表明, 对系统施加时滞反馈可实现 Turing 斑图与振荡斑图的转化, 还可控制振荡斑图的振荡频率以及 Turing 斑图的空间波长.

### 3 数值模拟结果

为了验证上述分析结果, 我们进一步对模型进行了二维数值模拟. 空间格点取  $200 \times 200$ , 空间步长  $\Delta x = \Delta y = 0.006$ , 时间步长  $\Delta t = 0.0005$ . 数值计算采用 ADI 算法, 初始条件为随机初始条件, 边界条件采用零流边界. 在前面的分析中, 我们采用泰勒展开近似处理时间延迟项, 因此, 延迟时间  $\tau$  应取小量. 然而, 从方程 (4) 我们可以看到, 延迟时间  $\tau$  和反馈强度  $g_u$  是耦合在一起的. 这意味着, 采用小延迟时间和大反馈强度的效果(如  $\tau = 0.1, g_u = 10$ ), 等效于采用大延迟时间和小反馈强度的效果(如  $\tau = 10, g_u = 0.1$ ). 我们大量的数值模拟也证明了这一等效作用. 为了与前面分析结果一致, 下面我们只给出采用小延迟时间的数值模拟结果.

图 6 给出了随反馈强度增加斑图的演化过程. 由图可见, 如果只考虑斑图的空间结构特征, 随反馈强度增加, 斑图经历了负六边形 — 条纹 — 正六边形斑图的演化过程. 如果同时考虑斑图的时间特征, 当反馈强度较小时, 系统中的 Turing 模强于 Hopf 模 (如图 2 所示), 因此图 6(a), (b) 中的斑图

是静止的. 当反馈强度增加到一定程度时 ( $g_u \geq 5$ ), Hopf 模逐渐占主导地位, 因此将得到振荡的斑图. 但由于此时的 Turing 模实部也大于零, 因此我们将得到在时间上振荡的空间有序结构, 如图 6(c), (d) 所示. 由于空间各位置振荡相位的差别, 造成图 6(c), (d) 中斑图瞬时强度的空间不均匀性. 模拟结果表明, 时滞反馈可有效控制斑图的时空特性.

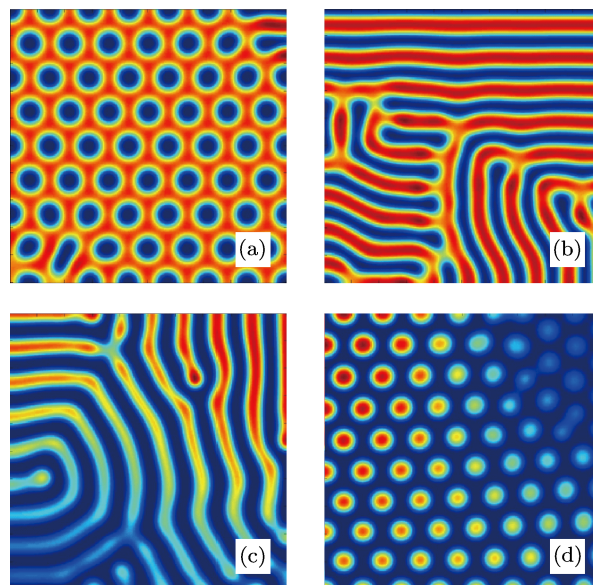


图 6 斑图随反馈强度  $g_u$  增加的演化 (a) 负六边形; (b) 条纹; (c) 振荡条纹; (d) 振荡正六边形. 反馈强度分别为  $g_u = 0, 4.7, 5.8, 7$

由前面的分析可知, 模型中的参数  $u_b$  (外加电压) 决定了系统的均匀定态解  $(u_0, v_0)$ , 而本征值方程 (5) 的解又与  $(u_0, v_0)$  有关. 因此, 通过调节外加电压  $u_b$  可以控制 Turing 斑图或振荡斑图的形成. 另外, 由方程 (5) 可知, 调节反馈参数  $\tau$  和  $g_u$  也可以达到控制斑图的目的. 因此, 反馈参数  $\tau$  和  $g_u$  与外加电压  $u_b$  在控制斑图形成方面起着一种等效作用. 然而, 由于  $(u_0, v_0)$  的解析解非常复杂, 我们不能给出一个严格的关于反馈参数  $\tau$  和  $g_u$  与外加电压  $u_b$  的表达式. 但是, 通过大量的数值模拟, 我们发现, 增加反馈强度  $g_u$  或延迟时间  $\tau$  相当于增加外加电压  $u_b$ . 例如, 增加外加电压  $u_b$  可以增强 Hopf 模的强度, 减小其振荡频率, 增加反馈参数  $g_u$  也可以达到相同的效果. 因此, 时滞反馈提供了一种在保持外加电压不变的情况下控制气体放电斑图的有效方法.

## 4 结论

本文针对 Purwins 等人提出的描述气体放电系统中时空斑图的半唯象反应扩散模型, 采用内部时间延迟反馈的方法, 分析了不同延迟时间与反馈强度对斑图的控制作用. 分析结果表明: Hopf 模与 Turing 模均受时滞反馈参数的影响; 通过改变反馈参数可实现 Turing 斑图与振荡斑图之间的转换; 随着反馈强度的增加, Turing 模与 Hopf 模的强度逐渐增加, 系统的临界振荡频率与临界波数减小. 进一步, 我们通过数值模拟对分析结果进行了验证.

目前, 气体放电实验中斑图的形成与演化过程主要是通过调节外加电压来控制. 然而, 实验中用

到的半导体等介质的耐压程度有限, 例如, Purwins 等人在低于 3 kV 的电压下观察到了六边形与条纹等斑图. 因此, 不可能通过无限增加外加电压来发现新型的放电斑图. 本文通过理论与数值模拟发现, 增加反馈参数  $g_u$  或延迟时间  $\tau$  等效于增加外加电压  $u_b$ . 因此, 时滞反馈提供了一种在保持外加电压不变的情况下有效控制气体放电斑图的方法. 在实验上采用时滞反馈方法时, 可用 CCD 采集放电斑图, 然后输入计算机来实时控制延迟时间与反馈强度, 最后输出到红外投影设备来照射半导体介质. 我们希望在气体放电实验中能利用该方法发现新型的时空斑图.

- 
- [1] Cross M C, Hohenberg P C 1993 *Rev. Mod. Phys.* **65** 851
- [2] Service R F 1999 *Science* **286** 1067
- [3] Gotoh H, Kamada H, Saitoh T, Shigemori S, Temmyo J 2004 *Appl. Phys. Lett.* **85** 2836
- [4] Nattel S 2002 *Nature* **415** 219
- [5] Zykov V S, Bordiougov G, Brandtstädter H, Gerdes I, Engel H 2003 *Phys. Rev. E* **68** 016214
- [6] Chen J X, Xu J R, Yuan X P, Ying H P 2009 *J. Phys. Chem. B* **113** 849
- [7] Sternbock O, Schütze J, Müller S C 1992 *Phys. Rev. Lett.* **68** 248
- [8] Schneider F M, Schöll E, Dahlem M A 2009 *Chaos* **19** 015110
- [9] Tung C K, Chan C K 2002 *Phys. Rev. Lett.* **89** 248302
- [10] Mikhailov A S, Showalter K 2006 *Phys. Rep.* **425** 79
- [11] Guo W Q, Qiao C, Zhang Z M, Ouyang Q, Wang H L 2010 *Phys. Rev. E* **81** 056214
- [12] He Y F, Dong L F, Liu F C, Fan W L 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 4236 (in Chinese) [贺亚峰, 董丽芳, 刘富成, 范伟丽 2005 物理学报 **54** 4236]
- [13] He Y F, Dong L F, Liu W L, Wang H F, Zhao Z C, Fan W L 2007 *Phys. Rev. E* **76** 017203
- [14] Dong L F, Fan W L, Wang S, Ji Y F, Liu Z W, Chen Q 2011 *Phys. Plasmas* **18** 033506
- [15] Dong L F, Li B, Lu N, Li X C, Shen Z K 2012 *Phys. Plasmas* **19** 052304
- [16] Dong L F, Yang Y J, Li B, Fan W L, Song Q 2011 *Phys. Plasmas* **18** 122101
- [17] Astrov Yu A, Logvin Yu A 1997 *Phys. Rev. Lett.* **79** 2983
- [18] Ammelt E, Astrov Yu A, Purwins H G 1998 *Phys. Rev. E* **58** 7109

# Control of the spatiotemporal pattern with time delayed feedback in a gas discharge system\*

He Ya-Feng<sup>1)†</sup> Feng Xiao-Min<sup>1)</sup> Zhang Liang<sup>2)</sup>

1) (*Hebei Key Laboratory of Optic-electronic Information Materials, College of Physical Science and Technology, Hebei University, Baoding 071002, China*)

2) (*College of Career Technology, Hebei Normal University, Shijiazhuang 050024, China*)

(Received 18 June 2012; revised manuscript received 12 July 2012)

## Abstract

Control of the spatiotemporal pattern with time delayed feedback in a gas discharge system is studied both analytically and numerically. The time delay in the semiphenomenological model is reduced as a perturbation. Based on the linear stability analysis, the effects of the time delay on the Turing and the Hopf modes near the Turing–Hopf codimension-two phase space are investigated. Then, the relations between the parameters of feedback and the oscillatory frequency, and the critical wavelength of the system are obtained. Results show that the transition between patterns can be controlled effectively by applying appropriate feedback even when the applied voltage keeps constant. The consequence of increasing the feedback intensity or the delayed time is equivalent to increasing the applied voltage. Furthermore, the analytical results are verified by two-dimensional numerical simulation. Our work proposes a way to control the pattern formation in a gas discharge system.

**Keywords:** gas discharge, pattern formation, time delayed feedback

**PACS:** 52.80.Dy, 05.45.–a, 02.30.Ks

---

\* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 11205044, 10947166, 10975043), the Natural Science Foundation of Hebei Province, China (Grant Nos. A2011201006, A2010000185), the Research Foundation of Education Bureau of Hebei Province, China (Grant No. Y2012009), and the Science Foundation of Hebei University (Grant No. 2011JQ04).

† E-mail: heyf@hbu.edu.cn