物 理 学 报 Acta Phys. Sin. Vol. 61, No. 3 (2012) 030201

Chetaev 型非完整系统 Mei 对称性的共形不变性与守恒量*

蔡建乐† 史生水

(杭州师范大学理学院, 杭州 310018)

(2011 年 3 月 27 日收到; 2011 年 6 月 15 日收到修改稿)

研究 Chetaev 型非完整系统 Mei 对称性的共形不变性与守恒量. 引入无限小单参数变换群及其生成元向量, 给出与 Chetaev 型非完整系统相应的完整系统的 Mei 对称性共形不变性定义和确定方程, 讨论系统共形不变性与 Mei 对称性的关系. 利用限制方程和附加限制方程得到非完整系统弱 Mei 对称性和强 Mei 对称性的共形不变性. 借助规范函数满足的结构方程导出系统相应的守恒量, 并举例说明结果的应用.

关键词: 非完整系统, Mei 对称性, 共形不变性, 共形因子

PACS: 02.20.Sv, 11.30.–j, 03.50.–z

1 引 言

寻求动力学系统的对称性与守恒量, 是人们了解动力学系统更深层次的运动规律的途径之一. 用对称性理论来研究力学系统的守恒量是近代数学、力学和物理学科的一个发展方向. 自从 1918 年 Noether 定理 [1,2] 问世以来, 动力学系统的对称性与守恒量在现代科学技术中发挥了重要的作用. 近年来, 动力学系统的 Noether 对称性、Lie 对称性和 Mei 对称性及其守恒量的研究形成了一个热点, 取得了一系列重要的成果 [3−14].

纵观约束力学系统的近代对称性理论, 都是将力学系统的运动微分方程 (或作用量、或动力学函数) 映射为共形的运动微分方程 (或作用量、或动力学函数), 因而共形不变性是研究约束力学系统对称性的一种重要方法. 1997 年, 俄罗斯学者 Galiullin 等 [15] 研究了 Birkhoff 系统的共形不变性, 2008 年以来, 我国学者在 Lagrange 系统、Hamilton 系统、一般完整力学系统、Birkhoff 系统、机电系统、变质量力学系统、相对运动动力学系统的 Lie 对称性或 Mei 对称性的共形不变性与守恒量等方面做了大量的工作 [16−35]. 目前, 越来越多的学者正关注这一领域的发展.

非完整系统的动力学方程比完整系统的要复杂, 其对称性与守恒量的研究也比完整系统的要困难. 非完整系统的对称性与守恒量理论自然适合完整系统. 文献 [36] 研究了非完整系统 Lie 对称性的共形不变性, 本文研究 Chetaev 型非完整系统 Mei 对称性的共形不变性及系统的守恒量.

2 Chetaev 型非完整系统的运动微分方程

设力学系统的位形由 n 个广义坐标 $q_s(s=1,\cdots,n)$ 来确定, $L=L(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$ 为系统的 Lagrange 函数, $Q_s=Q_s(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$ 为非势广义力, 系统的运动受有 g 个彼此相容且独立的双面理想 Chetaev 型非完整约束

$$f_\beta(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})=0,\quad(\beta=1,\cdots,g),\tag{1}$$

* 国家自然科学基金 (批准号:10772025) 资助的课题.

† E-mail: caijianle@yahoo.com.cn

约束 (1) 加在虚位移 δq_s 上的 Chetaev 条件为

$$\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s}\delta q_s=0, \tag{2}$$

Chetaev 型非完整系统的运动微分方程表示为

$$E_s(L)=Q_s+\lambda_\beta\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s},\quad (s=1,\cdots,n), \tag{3}$$

式中 $E_s=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\dfrac{\partial}{\partial \dot{q}_s}-\dfrac{\partial}{\partial q_s}$ 为 Euler 算子, λ_β 为约束乘子. 在运动微分方程积分之前可求出 λ_β 作为 $t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}$ 的函数, 即 $\lambda_\beta=\lambda_\beta(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$. 用 $\Lambda_s=\Lambda_s(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})=\lambda_\beta(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})\dfrac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s}$ 表示广义非完整约束反力, 则方程 (3) 可表示为

$$E_s(L)=Q_s+\Lambda_s, \tag{4}$$

方程 (4) 称为非完整系统 (1)—(3) 相应的完整系统的运动微分方程. 展开 (4) 式可得

$$\begin{aligned}&E_s(L)-Q_s-\Lambda_s\\&=\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_s\partial \dot{q}_k}\ddot{q}_k+\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_s\partial q_k}\dot{q}_k+\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_s\partial t}-\frac{\partial L}{\partial q_s}\\&\quad-Q_s-\Lambda_s=0.\end{aligned} \tag{5}$$

设系统非奇异, 即 $D=\det\left(\dfrac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_s\partial \dot{q}_k}\right)\neq 0$, 用 M_{sk} 表示矩阵元素 $\partial^2 L/\partial \dot{q}_s\partial \dot{q}_k$ 的余因子, 则由 (5) 式可求得广义加速度

$$\ddot{q}_s=\frac{M_{ks}}{D}\left(\frac{\partial L}{\partial q_k}-\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_k\partial t}-\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_k\partial q_j}\dot{q}_j+Q_k+\Lambda_k\right), \tag{6}$$

其中 M_{ks} 为 M_{sk} 的转置. (6) 式简写为

$$\ddot{q}_s=\alpha_s(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}),\quad (s=1,\cdots,n). \tag{7}$$

3 相应完整系统 Mei 对称性的共形不变性

为考虑方程 (4) 的对称性, 取时间 t 和广义坐标 q_s 的无限小单参数变换群

$$t^*=t+\varepsilon\xi_0(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}),\quad q_s^*(t^*)=q_s(t)+\varepsilon\xi_s(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}), \tag{8}$$

其中 ε 为无限小参数, ξ_0, ξ_s 为群的无限小变换的生成元或生成函数.

引入无限小生成元向量

$$X^{(0)}=\xi_0\frac{\partial}{\partial t}+\xi_s\frac{\partial}{\partial q_s}, \tag{9}$$

其一次扩展

$$X^{(1)}=X^{(0)}+(\dot{\xi}_s-\dot{q}_s\dot{\xi}_0)\frac{\partial}{\partial \dot{q}_s}. \tag{10}$$

假设经历无限小变换 (8) 式后, Lagrange 函数 L 变为 L^*, 广义力 Q_s 变为 Q_s^*, 广义非完整约束反力 Λ_s 变为 Λ_s^*, 约束 f_β 变为 f_β^*, 有

$$\begin{aligned}L^*&=L(t^*,\boldsymbol{q}^*,\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{q}^*}{\mathrm{d}t^*})\\&=L(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})+\varepsilon X^{(1)}(L)+o(\varepsilon^2),\end{aligned} \tag{11}$$

$$\begin{aligned}Q_s^*&=Q_s(t^*,\boldsymbol{q}^*,\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{q}^*}{\mathrm{d}t^*})\\&=Q_s(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})+\varepsilon X^{(1)}(Q_s)+o(\varepsilon^2),\end{aligned} \tag{12}$$

$$\begin{aligned}\Lambda_s^*&=\Lambda_s(t^*,\boldsymbol{q}^*,\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{q}^*}{\mathrm{d}t^*})\\&=\Lambda_s(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})+\varepsilon X^{(1)}(\Lambda_s)+o(\varepsilon^2),\end{aligned} \tag{13}$$

$$\begin{aligned}f_\beta^*&=f_\beta(t^*,\boldsymbol{q}^*,\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{q}^*}{\mathrm{d}t^*})\\&=f_\beta(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})+\varepsilon X^{(1)}(f_\beta)+o(\varepsilon^2).\end{aligned} \tag{14}$$

如果用变换后的动力学函数 $L^*, Q_s^*, \Lambda_s^*, f_\beta^*$ 代替变换前的动力学函数 $L, Q_s, \Lambda_s, f_\beta$ 时, 方程的形式保持不变, 则称这种不变性为 Mei 对称性. 方程 (4) 的 Mei 对称性定义为

$$E_s(L^*)=Q_s^*+\Lambda_s^*, \tag{15}$$

方程 (1) 的 Mei 对称性定义为

$$f_\beta(t^*,\boldsymbol{q}^*,\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{q}^*}{\mathrm{d}t^*})=0. \tag{16}$$

将 (11)—(13) 式代入 (15) 式, 忽略高阶小量, 并利用方程 (4), 可得到与 Chetaev 型非完整系统相应的完整系统 Mei 对称性的确定方程

$$\begin{aligned}&\{E_s[X^1(L)]-X^{(1)}(Q_s+\Lambda_s)\}\big|_{E_s(L)=Q_s+\Lambda_s}\\&=0.\end{aligned} \tag{17}$$

定义 1 如果无限小变换 (8) 式的生成元 ξ_0, ξ_s 满足 Mei 对称性确定方程 (17), 则称相应对称性为与 Chetaev 型非完整系统相应的完整系统 (4) 或 (7) 式的 Mei 对称性.

定义 2 对于与 Chetaev 型非完整系统相应的完整系统的动力学方程 (4), 如果存在矩阵 $\boldsymbol{M}_s^k$ 满足

$$\begin{aligned}&E_s\{X^{(1)}(L)\}-X^{(1)}(Q_s+\Lambda_s)\\&=\boldsymbol{M}_s^k\{E_k(L)-Q_k-\Lambda_k\},\\&(s,k=1,\cdots,n),\end{aligned} \tag{18}$$

则方程 (4) 在无限小单参数变换 (8) 式作用下具有 Mei 对称性的共形不变性. (18) 式是满足 Mei 对称性共形不变性的确定方程, 其中 $\boldsymbol{M}_s^k$ 为其共形因子.

命题 1 如果方程 (4) 在无限小单参数变换 (8)

式作用下是 Mei 对称性的, 且存在矩阵 $\boldsymbol{\Gamma}_s^k$ 满足

$$\begin{aligned}&E_s\{X^{(1)}(L)\}-X^{(1)}(Q_s+\Lambda_s)-\{E_s[X^{(1)}(L)]\\&-X^{(1)}(Q_s+\Lambda_s)\}\big|_{E_s(L)=Q_s+\Lambda_s}\\&=\boldsymbol{\Gamma}_s^k\{E_k(L)-Q_k-\Lambda_k\}\\&(s,k=1,\cdots,n),\end{aligned}\tag{19}$$

则方程 (4) 在无限小单参数变换 (8) 式作用下具有共形不变性同时具有 Mei 对称性的充分与必要条件为

$$\boldsymbol{M}_s^k=\boldsymbol{\Gamma}_s^k.\tag{20}$$

证明 由于方程 (4) 的 Mei 对称性满足 (17) 式, 如果存在一个矩阵 $\boldsymbol{\Gamma}_s^k$ 满足 (19) 式, 则 (19) 式成为

$$\begin{aligned}&E_s\{X^{(1)}(L)\}-X^{(1)}(Q_s+\Lambda_s)\\&=\boldsymbol{\Gamma}_s^k\{E_k(L)-Q_k-\Lambda_k\},\end{aligned}\tag{21}$$

由定义 (18) 式, 系统的共形因子 $\boldsymbol{M}_s^k=\boldsymbol{\Gamma}_s^k$.

反之亦然, 由定义 (18) 和 (19) 式, 容易验证

$$\begin{aligned}&(\boldsymbol{M}_s^k-\boldsymbol{\Gamma}_s^k)\{E_k(L)-Q_k-\Lambda_k\}\\&=\{E_s[X^{(1)}(L)]-X^{(1)}(Q_s+\Lambda_s)\}\big|_{E_s(L)=Q_s+\Lambda_s},\\&(s,k=1,\cdots,n),\end{aligned}\tag{22}$$

若 $\boldsymbol{M}_s^k=\boldsymbol{\Gamma}_s^k$, 则容易得到 (17) 式, 因而系统具有 Mei 对称性.

4 非完整系统 Mei 对称性的共形不变性

将 (14) 式略去高阶项, 并利用 (1) 和 (16) 式, 容易得到非完整约束方程 (1) 式在无限小变换 (8) 式下的不变性的限制方程

$$X^{(1)}\{f_\beta(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})\}=0,\quad(\beta=1,\cdots,g).\tag{23}$$

若考虑到 Chetaev 条件 (2) 式对无限小生成元 ξ_0,ξ_s 的限制, 则有

$$\frac{\partial f_\beta}{\partial\dot q_s}(\xi_s-\dot q_s\xi_0)=0,\quad(\beta=1,\cdots,g;s=1,\cdots,n),\tag{24}$$

称方程 (24) 为附加限制方程.

定义 3 如果无限小变换 (8) 式的生成元 ξ_0,ξ_s 满足 Mei 对称性确定方程 (17) 以及限制方程 (23), 则称相应对称性为 Chetaev 型非完整系统的弱 Mei 对称性. 如果无限小变换 (8) 式的生成元 ξ_0, ξ_s 满足 Mei 对称性确定方程 (17)、限制方程 (23) 以及附加限制方程 (24), 则称相应对称性为 Chetaev 型非完整系统的强 Mei 对称性.

定义 4 如果无限小变换 (8) 式的生成元 ξ_0, ξ_s 满足 Mei 对称性共形不变性的确定方程 (18) 以及非完整约束的限制方程 (23), 则上述共形不变性为 Chetaev 型非完整系统弱 Mei 对称性的共形不变性. 如果无限小变换 (8) 式的生成元 ξ_0,ξ_s 满足 Mei 对称性共形不变性的确定方程 (18)、限制方程 (23) 以及附加限制方程 (24), 则上述共形不变性为 Chetaev 型非完整系统强 Mei 对称性的共形不变性.

5 结构方程与守恒量

由 Mei 对称性的确定方程 (17) 得到:

$$\frac{\partial}{\partial q_s}(X^{(1)}L)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial X^{(1)}(L)}{\partial\dot q_s}-X^{(1)}(Q_s+\Lambda_s),\tag{25}$$

从而

$$\begin{aligned}&X^{(1)}\{X^{(1)}(L)\}\\&=\xi_0\frac{\partial X^{(1)}(L)}{\partial t}+\xi_s\frac{\partial X^{(1)}(L)}{\partial q_s}\\&\quad+(\dot\xi_s-\dot q_s\dot\xi_0)\frac{\partial X^{(1)}(L)}{\partial\dot q_s}\\&=\xi_0\frac{\partial X^{(1)}(L)}{\partial t}\\&\quad+\xi_s\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial X^{(1)}(L)}{\partial\dot q_S}-X^{(1)}(Q_s+\Lambda_s)\right]\\&\quad+(\dot\xi_s-\dot q_s\dot\xi_0)\frac{\partial X^{(1)}(L)}{\partial\dot q_s}\\&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[(\xi_s-\dot q_s\xi_0)\frac{\partial X^{(1)}(L)}{\partial\dot q_s}+X^{(1)}(L)\xi_0\right]\\&\quad-X^{(1)}(L)\dot\xi_0\\&\quad-X^{(1)}(Q_s+\Lambda_s)(\xi_s-\dot q_s\xi_0),\end{aligned}\tag{26}$$

令

$$G=-\left[(\xi_s-\dot q_s\xi_0)\frac{\partial X^{(1)}(L)}{\partial\dot q_s}+X^{(1)}(L)\xi_0\right]+\text{const.},\tag{27}$$

显然有下述结果:

命题 2 对于满足 Mei 对称性 (17) 式的无限小生成元 ξ_0,ξ_s, 如果存在规范函数 $G=G(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$ 满足如下结构方程

$$\begin{aligned}&X^{(1)}(L)\dot\xi_0+X^{(1)}\{X^{(1)}(L)\}\\&+X^{(1)}(Q_s+\Lambda_s)(\xi_s-\dot q_s\xi_0)+\dot G=0,\end{aligned}\tag{28}$$

则相应于 Chetaev 型非完整系统 (1)—(3) 式的完整

系统 (4) 式的共形不变性存在 Mei 守恒量

$$I = \xi_0 X^{(1)}(L) + (\xi_s - \dot{q}_s \xi_0) \frac{\partial X^{(1)}(L)}{\partial \dot{q}_s} + G = \text{const.} \tag{29}$$

命题 3 如果 ξ_0, ξ_s 是 Chetaev 型非完整系统 (1)—(3) 式的弱 (強) Mei 对称性生成元, 且存在规范函数 $G = G(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})$ 满足结构方程 (28), 则 Chetaev 型非完整系统 (1)—(3) 式的弱 (強) Mei 对称性的共形不变性导致 Mei 守恒量 (29) 式.

6 一个二维非完整系统 Mei 对称性的共形不变性

设二维 Chetaev 型非完整系统为

$$L = \frac{1}{2}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2), \tag{30}$$

$$f = \dot{q}_1 + t\dot{q}_2 - q_2 + t = 0, \tag{31}$$

$$Q_1 = Q_2 = 0. \tag{32}$$

由 (3) 式可得系统的运动微分方程

$$\begin{aligned} E_1(L) - Q_1 - \lambda \frac{\partial f}{\partial \dot{q}_1} = \ddot{q}_1 - \lambda = 0, \\ E_2(L) - Q_2 - \lambda \frac{\partial f}{\partial \dot{q}_2} = \ddot{q}_2 - \lambda t = 0. \end{aligned} \tag{33}$$

由方程 (30)—(33) 求得

$$\lambda = -\frac{1}{1+t^2}, \tag{34}$$

于是有

$$\Lambda_1 = \lambda = -\frac{1}{1+t^2}, \ \Lambda_2 = \lambda t = -\frac{t}{1+t^2}, \tag{35}$$

因此

$$\begin{aligned} E_1(L) - Q_1 - \Lambda_1 = \ddot{q}_1 + \frac{1}{1+t^2}, \\ E_2(L) - Q_2 - \Lambda_2 = \ddot{q}_2 + \frac{t}{1+t^2}. \end{aligned} \tag{36}$$

取

$$\begin{aligned} &\xi_0 = 0, \\ &\xi_1 = \dot{q}_2 - t\dot{q}_1 + q_1 + t, \\ &\xi_2 = \dot{q}_1 + t\dot{q}_2 - q_2 + 1, \end{aligned} \tag{37}$$

则

$$\begin{aligned} E_1\{X^{(1)}(L)\} - X^{(1)}(Q_1 + \Lambda_1) = -\ddot{q}_1 - 1/(1+t^2), \\ E_2\{X^{(1)}(L)\} - X^{(1)}(Q_2 + \Lambda_2) = \ddot{q}_2 + t/(1+t^2), \end{aligned} \tag{38}$$

从而由 (18) 式得共形因子

$$\boldsymbol{\Gamma} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{39}$$

显然, 生成元满足如下限制方程

$$X^{(1)} f = X^{(1)}(\dot{q}_1 + t\dot{q}_2 - q_2 + t) = 0, \tag{40}$$

但不满足附加限制方程 (24), 因而相应的共形不变性为 Chetaev 型非完整系统弱 Mei 对称性的共形不变性.

将 (30),(32),(35) 和 (37) 式代入结构方程 (28) 得到

$$\dot{G} = -2, \tag{41}$$

因此

$$G = -2t. \tag{42}$$

守恒量 (29) 式给出

$$I_{\mathrm{M}} = (1-t)\dot{q}_2 - (1+t)\dot{q}_1 + q_1 + q_2 - t - 1 = \text{const.} \tag{43}$$

7 结 论

对于 Chetaev 型非完整系统, 如果无限小生成元满足 Mei 对称性确定方程以及限制方程, 则得到系统的弱 Mei 对称性. 如果无限小生成元满足 Mei 对称性确定方程以及限制方程和附加限制方程, 则得到系统的强 Mei 对称性. 如果将上述 Mei 对称性确定方程换为 Mei 对称性共形不变性的确定方程, 则分别得到系统弱 Mei 对称性和强 Mei 对称性的共形不变性. 共形不变性满足一定条件时也可导致相应的守恒量.

[1] Noether A E 1918 *Nachr. Akad. Math.* **2** 235

[2] Djukić D S, Vujanović B D 1975 *Acta Mechanica* **23** 17

[3] Mei F X 1999 *Applications of Lie Groups and Lie Algebras to Constrained Mechanical Systems* (Beijing: Science Press)(in Chinese) [梅凤翔 1999 李群和李代数对约束力学系统的应用 (北京: 科学出版社)]

[4] Zhao Y Y, Mei F X 1999 *Symmetries and Invariants of Mechanical Systems* (Beijing: Science Press)(in Chinese) [赵跃宇, 梅凤翔 1999 力学系统的对称性与不变量 (北京: 科学出版社)]

[5] Mei F X, Zheng G H 2002 *Acta Mech. Sin.* **18** 414

[6] Ge W K 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 1156 (in Chinese) [葛伟宽 2002 物理学报 **51** 1156]

[7] Fang J H 2003 *Commun. Theor. Phys.* **40** 269
[8] Mei F X 2004 *Symmetries and Conserved Quantities of Constrained Mechanical Systems* (Beijing: Beijing Institute of Technology Press) (in Chinese) [梅凤翔 2004 约束力学系统的对称性与守恒量 (北京: 北京理工大学出版社)]
[9] Jiang W A, Li L, Li Z J, Luo S K 2012 *Nonlinear Dyn.* **67** 1075
[10] Li Z J, Jiang W A, Luo S K 2012 *Nonlinear Dyn.* **67** 445
[11] Luo S K 2007 *Chin. Phys. Lett.* **24** 2463
[12] Jia L Q, Zhang Y Y, Zheng S W 2007 *Acta Phys. Sin*. **56** 649 (in Chinese) [贾利群, 张耀宇, 郑世旺 2007 物理学报 **56** 649]
[13] Luo S K 2007 *Chin. Phys. Lett.* **24** 3017
[14] Luo S K , Zhang Y F 2008 *Advances in the Study of Dynamics of Constrained Systems* (Beijing: Science Press) (in Chinese) [罗绍凯, 张永发 2008 约束系统动力学研究进展 (北京: 科学出版社)]
[15] Galiullin A S, Gafarov G G, Malaishka R P, Khwan A M 1997 *Analytical Dynamics of Helmholtz, Birkhoff and Nambu Systems* (Moscow: UFN) (in Russian)
[16] Cai J L 2008 *Chin. Phys. Lett.* **25** 1523
[17] Mei F X, Xie J F, Gang T Q 2008 *Acta Mech. Sin.* **24** 583
[18] He G, Mei F X 2008 *Chin. Phys.* B **17** 2764
[19] Cai J L, Mei F X 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 5369 (in Chinese) [蔡建乐, 梅凤翔 2008 物理学报 **57** 5369]
[20] Cai J L, Luo S K, Mei F X 2008 *Chin. Phys.* B **17** 3170
[21] Cai J L 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 22 (in Chinese) [蔡建乐 2009 物理学报 **58** 22]
[22] Cai J L 2009 *Acta Phys. Pol.* A **115** 854
[23] Xia L L, Cai J L, Li Y C 2009 *Chin. Phys.* B **18** 3158
[24] Luo Y P 2009 *Int. J. Theor. Phys.* **48** 2665
[25] Li Y C, Xia L L, Wang X M 2009 *Chin. Phys.* B **18** 4643
[26] Zhang M J, Fang J H, Lin P, Lu K, Pang T 2009 *Commun. Theor. Phys.* **52** 561
[27] Chen X W, Li Y M, Zhao Y H 2009 *Chin. Phys.* B **18** 3139
[28] Zhang Y 2009 *Chin. Phys.* B **18** 4636
[29] Cai J L 2010 *Acta Phys. Pol.* A **117** 445
[30] Xia L L, Cai J L 2010 *Chin. Phys.* B **19** 040302
[31] Zhang Y 2010 *Commun. Theor. Phys.* **53** 166
[32] Luo Y P, Fu J L 2010 *Chin. Phys.* B **19** 090303
[33] Luo Y P, Fu J L 2010 *Chin. Phys.* B **19** 090304
[34] Luo Y P, Fu J L 2011 *Chin. Phys.* B **20** 021102
[35] Li Y, Fang J H, Zhang K J 2011 *Chin. Phys.* B **20** 030201
[36] Cai J L 2010 *Int. J. Theor. Phys.* **49** 201

Conformal invariance and conserved quantity of Mei symmetry for the nonholonomic system of Chetaev's type*

Cai Jian-Le† Shi Sheng-Shui

(*College of Science, Hangzhou Normal University, Hangzhou* 310018, *China*)

(Received 27 March 2011; revised manuscript received 15 June 2011)

Abstract

For a nonholonomic system of Chetaev's type, the conformal invariance and the conserved quantity are studied. By the infinitesimal one-parameter transformation group and the infinitesimal generator vector, the definition of conformal invariance of Mei symmetry and the determining equation for the holonomic system which corresponds to a nonholonomic system are provided, and the relationship between the system conformal invariance and Mei symmetry is discussed. Using the restriction equations and the additional restriction equations, the conformal invariances of weak and strong Mei symmetrys for the system are given. With the aid of a structure equation that gauge function satisfies, the system corresponding conserved quantity is derived. Finally, an example is given to illustrate the application of the result.

Keywords: nonholonomic system, Mei symmetry, conformal invariance, conformal factor

PACS: 02.20.Sv, 11.30.–j, 03.50.–z

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 10772025).

† E-mail: caijianle@yahoo.com.cn