相位扩散通道中密度算符相关态的时间演化*

周军† 袁好 宋军

(皖西学院材料与化工学院, 六安 237012)

(2011 年 1 月 24 日收到; 2011 年 4 月 25 日收到修改稿)

利用热纠缠态的性质, 对具有代表性的相位扩散主方程进行求解, 得到关于密度算符的算符和表示形式, 分析不同初始态下的密度算符的时间演化结果, 发现在相位扩散通道下当初始态为粒子数态或热态时密度算符保持恒定, 而当初始态为相干态时系统在发生相扩散的同时始终保持相干态特性不变.

关键词: 主方程, 热纠缠态, 密度算符

PACS: 03.65.−w

1 引 言

主方程是统计物理中用来研究系统随时间演化过程的主要工具. 近年来, 它也经常被用来研究退相干过程, 随着退相干成为量子光学、量子计算和量子信息等领域中的热点课题, 主方程也越来越体现其在这些领域中的作用. 主方程的求解一般都是利用 Q 表示、P 表示或 Wigner 函数将其转变为 C 数方程来实现 [1−6], 同时利用 Langevin 方程或 Fokker - Planck 方程 [7−12]. 本文则是利用热纠缠态 [13] 表象方便快捷地实现此目的, 从而能够为更多复杂主方程的求解提供参考依据.

2 热纠缠态

为解决系统和热库之间的量子纠缠特性, Takahashi 和 Umezawa1975 年创建了热场动力学理论 [14−18], 在重新构造了一个虚拟场的条件下, 该理论能够将一个力学量 A 的统计平均改写为该力学量的热真空态 $|0(\beta)\rangle$ 期望值

$$\langle 0(\beta)|A|0(\beta)\rangle = \mathrm{Tr}(A\,\mathrm{e}^{-\beta H})/\mathrm{Tr}(\mathrm{r}^{\beta H}), \quad (1)$$

式中 H 是哈密顿量. 对于一个自由玻色气体系统, 热真空态

$$|0(\beta)\rangle = \mathrm{sech}\,\theta\exp[a^{+}\tilde{a}^{+}\tanh\theta]|0,\tilde{0}\rangle, \quad (2)$$

其中 $\tanh\theta = \exp\big(-\dfrac{\hbar\omega}{2kT}\big)$, $\tilde{a}^{+}$ 是虚 Fock 空间的中的产生算符. 特别地, 当温度趋向无穷大时,

$$\begin{aligned}|0(\beta)\rangle|_{T\to\infty} &= \exp(a^{+}\tilde{a}^{+})|0,\tilde{0}\rangle\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}|n,\tilde{n}\rangle = |I\rangle. \end{aligned}\quad (3)$$

基于 $|I\rangle$ 和 EPR 的量子纠缠思想, 范洪义小组提出了一种新的热纠缠态 (也称为相干热态)[14−17], 其定义为

$$\begin{aligned}|\eta\rangle &= \exp\Big(-\frac{1}{2}|\eta|^2+\eta a^{+}-\eta^{*}\tilde{a}^{+}\\ &\quad +\tilde{a}\tilde{a}^{+}\Big)\Big|0,\tilde{0}\Big\rangle,\end{aligned}\quad (4)$$

其中 $\tilde{a}^{+}$ 和 $\tilde{a}$ 满足 $[\tilde{a},\tilde{a}^{+}]=1, \tilde{a}|\tilde{0}\rangle=0$. 当 $\eta=0$ 时, $|\eta\rangle$ 即为极端高温下的极限热真空态 $|I\rangle$, 被 $\tilde{a}^{+}$、$\tilde{a}$ 作用分别可得

$$\begin{aligned}a|I\rangle &= \tilde{a}^{+}|I\rangle,\\ a^{+}|I\rangle &= \tilde{a}|I\rangle,\\ (a^{+}a)^{n}|I\rangle &= (\tilde{a}^{+}\tilde{a})^{n}|I\rangle.\end{aligned}\quad (5)$$

热纠缠态的这些性质为求解相关模型的主方程提供了方便快捷的方法, 为分析系统相应的演化过程提供了一种全新的视角.

* 国家自然科学基金 (批准号: 10775097, 10874174) 和安徽省高等学校青年人才基金 (批准号: 2009SQRZ190, 2011SQRL147) 资助的课题.

† E-mail: zhj0064@mail.ustc.edu.cn

3 相位扩散通道中的密度算符时间演化

我们在 Heisenberg 方程 $\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}=-\mathrm{i}\omega[a^{+}a,\rho]$ 的基础上, 建立一个更具有代表性的能够反映相位扩散的主方程

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}=(-\mathrm{i})^{2}\gamma[a^{+}a,[a^{+}a,\rho]], \tag{6}$$

用 $|I\rangle=|\eta=0\rangle$ 作用于 (6) 式的两边, 同时注意到 $|\rho\rangle=\rho|I\rangle$, 可以得到

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\rho\rangle &= \gamma[2a^{+}a\rho a^{+}a-\rho(a^{+}a)^{2}-(a^{+}a)^{2}\rho]|I\rangle\\ &= \gamma[2a^{+}a\tilde{a}^{+}\tilde{a}-(\tilde{a}^{+}\tilde{a})^{2}-(a^{+}a)^{2}]|\rho\rangle\\ &= -\gamma(\tilde{a}^{+}\tilde{a}-a^{+}a)^{2}|\rho\rangle,\end{aligned} \tag{7}$$

方程 (7) 的标准解为

$$\begin{aligned}|\rho\rangle &= \exp\big\{-\gamma t[(a^{+}a)^{2}-2a^{+}a\tilde{a}^{+}\tilde{a}\\ &\quad +(\tilde{a}^{+}\tilde{a})^{2}]\big\}|\rho_{0}\rangle\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2\gamma t)^{n}}{n!}\,\mathrm{e}^{-\gamma t(a^{+}a)^{2}}(a^{+}a)^{n}\\ &\quad \times\rho_{0}(a^{+}a)^{n}\,\mathrm{e}^{-\gamma t(a^{+}a)^{2}}|I\rangle,\end{aligned} \tag{8}$$

其中 $|\rho_0\rangle=\rho_0|I\rangle$, ρ_0 是仅含实算符的系统初始密度算符, 由 (8) 式可得 $\rho(t)$ 的表达形式

$$\begin{aligned}\rho(t) &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2\gamma t)^{n}}{n!}\,\mathrm{e}^{-\gamma t(a^{+}a)^{2}}(a^{+}a)^{n}\\ &\quad \times\rho_{0}(a^{+}a)^{n}\,\mathrm{e}^{-\gamma t(a^{+}a)^{2}}.\end{aligned} \tag{9}$$

如果我们设一个新算符 $M_n=\sqrt{\frac{(2\gamma t)^{n}}{n!}}\,\mathrm{e}^{-\gamma t(a^{+}a)^{2}}(a^{+}a)^{n}$, 则 $\rho(t)$ 可以表示为

$$\rho(t)=\sum_{n=0}^{\infty}M_{n}\rho_{0}M_{n}^{+}, \tag{10}$$

因为 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}M_{n}^{+}M_{n}=1$, 证明如下:

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}M_{n}^{+}M_{n} &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2\gamma t)^{n}}{n!}(a^{+}a)^{n}\\ &\quad \times\mathrm{e}^{-2\gamma t(a^{+}a)^{2}}(a^{+}a)^{n}\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2\gamma t)^{n}}{n!}(a^{+}a)^{n}(a^{+}a)^{n}\\ &\quad \times\mathrm{e}^{-2\gamma t(a^{+}a)^{2}}\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{[2\gamma t(a^{+}a)^{2}]^{n}}{n!}\,\mathrm{e}^{-2\gamma t(a^{+}a)^{2}}\\ &= \mathrm{e}^{2\gamma t(a^{+}a)^{2}}\,\mathrm{e}^{-2\gamma t(a^{+}a)^{2}}=1,\end{aligned} \tag{11}$$

这里用到了 $[\mathrm{e}^{-2\gamma t(a^{+}a)^{2}},(a^{+}a)^{n}]=0$, 所以可得

$$\mathrm{Tr}\rho(t)=\mathrm{Tr}\sum_{n=0}^{\infty}M_{n}\rho_{0}M_{n}^{+}=\mathrm{Tr}\rho_{0}. \tag{12}$$

显然, 算符 $\rho(t)$ 的迹不随时间变化, 从而 $\rho(t)$ 可以作为一个密度算符, M_n 被命名为 Kraus 算符. 因此, 只要系统的初始态密度算符 ρ_0 给定, 可以很容易计算出任意时刻的密度算符 $\rho(t)$.

3.1 初始态为粒子数态下的密度算符演化

为分析系统在不同初始状态下的各种演化结果, 我们取初始态分别为粒子数态、热态和相干态进行研究. 首先假设初始态为粒子数态

$$\rho_{0}=|m\rangle\langle m|, \tag{13}$$

将 (13) 式代入 (9) 式, 得

$$\begin{aligned}\rho(t) &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2\gamma t)^{n}}{n!}\,\mathrm{e}^{-\gamma t(a^{+}a)^{2}}(a^{+}a)^{n}|m\rangle\\ &\quad \times\langle m|(a^{+}a)^{n}e^{-\gamma t(a^{+}a)^{2}}\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2\gamma t)^{n}}{n!}\,\mathrm{e}^{-\gamma t(a^{+}a)^{2}}m^{n}|m\rangle\\ &\quad \times\langle m|m^{n}\,\mathrm{e}^{-\gamma t(a^{+}a)^{2}}\\ &= \mathrm{e}^{2\gamma tm^{2}}\,\mathrm{e}^{-2\gamma tm^{2}}|m\rangle\langle m|\\ &= |m\rangle\langle m|=\rho_{0}.\end{aligned} \tag{14}$$

3.2 初始态为热态下的密度算符演化

当初始态为热态时,

$$\rho_{0}=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\bar{n}_{0}^{m}}{(1+\bar{n}_{0})^{m+1}}|m\rangle\langle m|, \tag{15}$$

将 (15) 式代入 (9) 式, 得

$$\begin{aligned}\rho(t) &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2\gamma t)^{n}}{n!}\,\mathrm{e}^{-\gamma t(a^{+}a)^{2}}(a^{+}a)^{n}\\ &\quad \times\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\bar{n}_{0}^{m}}{(1+\bar{n}_{0})^{m+1}}|m\rangle\langle m|(a^{+}a)^{n}\,\mathrm{e}^{-\gamma t(a^{+}a)^{2}}\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\bar{n}_{0}^{m}}{(1+\bar{n}_{0})^{m+1}}\frac{(2\gamma t)^{n}}{n!}\\ &\quad \times\mathrm{e}^{-\gamma t(a^{+}a)^{2}}m^{n}|m\rangle\langle m|m^{n}\,\mathrm{e}^{-\gamma t(a^{+}a)^{2}}\\ &= \sum_{m=0}^{\infty}\frac{\bar{n}_{0}^{m}}{(1+\bar{n}_{0})^{m+1}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2\gamma tm^{2})^{n}}{n!}\\ &\quad \times\mathrm{e}^{-\gamma tm^{2}}|m\rangle\langle m|\,\mathrm{e}^{-\gamma tm^{2}}\\ &= \sum_{m=0}^{\infty}\frac{\bar{n}_{0}^{m}}{(1+\bar{n}_{0})^{m+1}}\,\mathrm{e}^{2\gamma tm^{2}}\,\mathrm{e}^{-2\gamma tm^{2}}|m\rangle\langle m|\end{aligned}$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\bar{n}_0^m}{(1+\bar{n}_0)^{m+1}} |m\rangle\langle m| = \rho_0. \tag{16}$$

3.3 初始态为相干态下的密度算符演化

当初始态为相干态时,

$$\rho_0 = |\alpha\rangle\langle\alpha|, \tag{17}$$

代入 (9) 式, 得

$$\begin{aligned}
\rho(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2\gamma t)^n}{n!} \mathrm{e}^{-\gamma t(a^+a)^2} (a^+a)^n |\alpha\rangle \\
&\quad \times \langle\alpha| (a^+a)^n \mathrm{e}^{-\gamma\langle t(a^+a)^2} \\
&= \sum_{j,k=0} \mathrm{e}^{-|\alpha|^2} \frac{\alpha^j \alpha^{*k}}{\sqrt{j!k!}} \mathrm{e}^{-\gamma t(j^2+k^2)} \\
&\quad \times \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2\gamma tjk)^n}{n!} |j\rangle\langle k| \\
&= \mathrm{e}^{-|\alpha|^2} \sum_{j,k=0} \frac{\alpha^j \alpha^{*k}}{\sqrt{j!k!}} \mathrm{e}^{-\gamma t(j-k)^2} |j\rangle\langle k| \\
&= \mathrm{e}^{-|\alpha|^2} \sum_{j,k=0} \frac{|\alpha|^{j+k} \mathrm{e}^{i\theta(j-k)}}{\sqrt{j!k!}} \\
&\quad \times \mathrm{e}^{-\gamma t(j-k)^2} |j\rangle\langle k|,
\end{aligned} \tag{18}$$

其中用到公式 $|\alpha\rangle = \mathrm{e}^{-|\alpha|^2/2} \sum_{j=0} \frac{\alpha^j}{\sqrt{j!}} |j\rangle$, $\alpha = |\alpha| \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$. (18) 式展现了随机相, 并体现了相位扩散结果.

(18) 式的结果可以帮助我们可以分析在 (6) 式控制下的初始密度算符为相干态的相位扩散过程中的 F 值, 即 Fano 因子.

$$\begin{aligned}
\mathrm{Tr}[\rho(t)a^+a] &= \mathrm{e}^{-|\alpha|^2} \sum_{j,k=0} \frac{|\alpha|^{j+k} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta(j-k)}}{\sqrt{j!k!}} \\
&\quad \times \mathrm{e}^{-\gamma t(j-k)^2} \langle k|a^+a|j\rangle \\
&= \mathrm{e}^{-|\alpha|^2} \sum_{j,k=0} \frac{j|\alpha|^{j+k} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta(j-k)}}{\sqrt{j!k!}} \\
&\quad \times \mathrm{e}^{-\gamma t(j-k)^2} \delta_{j,k} \\
&= \mathrm{e}^{-|\alpha|^2} \sum_{j=0} \frac{j|\alpha|^{2j}}{j!} = \mathrm{e}^{-|\alpha|^2} |\alpha|^2 \\
&\quad \times \sum_{j=1} \frac{(|\alpha|^2)^{j-1}}{(j-1)!} = |\alpha|^2,
\end{aligned} \tag{19}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Tr}[\rho(t)(a^+a)^2] &= \mathrm{e}^{-|\alpha|^2} \sum_{j,k=0} \frac{|\alpha|^{j+k} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta(j-k)}}{\sqrt{j!k!}} \\
&\quad \times \mathrm{e}^{-\gamma t(j-k)^2} \langle k|(a^+a)^2|j\rangle \\
&= \mathrm{e}^{-|\alpha|^2} \sum_{j=0} \frac{j^2|\alpha|^{2j}}{j!} \\
&= \mathrm{e}^{-|\alpha|^2} \sum_{j=1} \frac{j|\alpha|^{2j}}{(j-1)!} \\
&= \mathrm{e}^{-|\alpha|^2} \sum_{j=1} \frac{|\alpha|^2 \frac{\partial}{\partial|\alpha|^2} |\alpha|^{2j}}{(j-1)!} \\
&= \mathrm{e}^{-|\alpha|^2} |\alpha|^2 \frac{\partial}{\partial|\alpha|^2} \\
&\quad \times \Big(|\alpha|^2 \sum_{j=1} \frac{(|\alpha|^2)^{j-1}}{(j-1)!} \Big) \\
&= \mathrm{e}^{-|\alpha|^2} |\alpha|^2 \big(\mathrm{e}^{|\alpha|^2} + |\alpha|^2 \mathrm{e}^{|\alpha|^2} \big) \\
&= |\alpha|^4 + |\alpha|^2,
\end{aligned} \tag{20}$$

$$\frac{\mathrm{Tr}[\rho(t)(a^+a)^2] - \mathrm{Tr}[\rho(t)a^+a]^2}{\mathrm{Tr}[\rho(t)a^+a]} = 1. \tag{21}$$

4 结 论

本文基于热动力学理论, 利用热纠缠态方便快捷地求解了相位扩散主方程, 得出了并分析了相位扩散通道下系统密度算符的时间演化特征, 结果表明: 当初始态的密度算符 ρ_0 为粒子数态和热态时, 任意时刻的密度算符均保持恒定不变, 而当初始密度算符为纯相干态时, 相位扩散过程中的 Fano 因子恒等于 1, 光场呈泊松分布, 从而证明了在整个相位扩散过程中, 只要初始密度算符为纯相干态, 则系统始终为相干态的特性.

[1] Glauber R J 1963 *Phys. Rev.* **130** 2529
[2] Glauber R J 1963 *Phys. Rev.* **131** 2766
[3] Fan H Y, Ren G, Hu L Y, Jiang N Q 2010 *Chin. Phys.* B **19** 4206
[4] Shen Y, Lu Y P, Liang X T 2010 *Chin. Phys.* B **19** 308
[5] Shi Z G, Wen W, Chen X W, Xiang S H, Song K H 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 2971 (in Chinese) [施振刚, 文伟, 谌雄文, 向少华, 宋克慧 2010 物理学报 **59** 2971]
[6] Wu J L, Huang X M 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 6234 (in Chinese) [吴俊林, 黄新民 2006 物理学报 **55** 6234]
[7] Mufti A, Schmitt H A, Balantekin A B, Sargent M 1993 *J. Opt. Soc. Am.* B **10** 2100
[8] Chatuverdi S, Srinivasan V 1991 *J. Mod. Opt.* **38** 777
[9] Arnoldus H F 1996 *J. Opt. Soc. Am.* B **13** 1099
[10] Ban M 1993 *Phys. Rev.* A **47** 5093
[11] D'Ariano G M 1994 *Phys. Lett.* A **187** 231
[12] Yi X X, Li C, Su J C 2000 *Phys. Rev.* A **62** 013819
[13] Xiang S H, Yang X, Song K H 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 1289 (in Chinese) [向少华, 杨雄, 宋克慧 2004 物理学报 **53** 1289]
[14] Fan H Y, Fan Y 1998 *Phys. Lett.* A **246** 242
[15] Fan H Y, Fan Y 2001 *Phys. Lett.* A **282** 269
[16] Fan H Y, Hu L Y 2008 *Opt. Commun.* **10** 1016
[17] Fan H Y, Lu H L 2007 *Mod. Phys. Lett.* B **21** 183
[18] Fan H Y, Fan Y 2002 *J. Phys.* A **35** 6873

The time evolution of relative density operator in phase diffusion channels*

Zhou Jun† Yuan Hao Song Jun

(*Department of Material and Chemical Engineering, West Anhui University, Liu an* 237012, *China*)

(Received 24 January 2011; revised manuscript received 25 April 2011)

Abstract

By virtue of the properties of thermal entanglement, we successfully obtain the solution to the representative phase diffusion master equation and give the operator sum representation of density operator. Having analyzed the time evolution process of density operator in different initial states, we find out that the density operators keep invariable during the initial state turning into Fock state or thermal state. But the system always maintains coherence during phase diffusion when the initial state is coherent state.

Keywords: master equation, thermo-entangled state, density operator

PACS: 03.65.−w

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 10775097, 10874174) and the Talent Project of the Anhui Province for Outstanding Youth, China (Grant Nos. 2009SQRZ190, 2011SQRL147).

† E-mail: zhj0064@mail.ustc.edu.cn.