

# 周期矩形信号作用下时滞非对称单稳系统的随机共振\*

张晓燕<sup>†</sup> 徐伟 周丙常

(西北工业大学应用数学系, 西安 710072)

(2011年3月7日收到; 2011年5月30日收到修改稿)

研究了周期矩形信号对时滞非对称单稳系统随机共振的影响, 系统中加入的噪声均为 Gauss 白噪声. 得到了信噪比的解析表达式, 通过分析信噪比曲线发现系统存在随机共振现象. 数值结果还表明乘性与加性噪声强度对信噪比的影响是不同的, 在  $SNR-D$  参数平面上共振与抑制共存. 在信噪比随着时滞量变化的曲线图上发现, 当系统的非对称性  $|r|$  取值很大或者乘性与加性噪声强度比  $D/\alpha$  小于 1 时, 参数平面上的随机共振现象会消失.

**关键词:** 时滞非对称单稳系统, 随机共振, 周期矩形信号

**PACS:** 05.40.-a, 02.50.-r

## 1 引言

近来, 人们发现时滞存在于物理和生物系统中并起到重要作用, 因此时滞随机系统引起许多学者的关注. 一些研究者致力于考虑噪声对时滞系统的影响, 发现噪声和时滞的结合能改变系统的统计性质<sup>[1-12]</sup>. 特别是在不同的时滞系统中, 发现时滞对随机共振有重大影响. Zhang 等<sup>[8]</sup> 发现时滞诱导跃迁现象以及时滞能抑制或推进随机共振现象. Jia<sup>[9]</sup> 运用小时滞近似方法研究了由乘性信号调制的时滞癌症增长模型的随机共振现象. Jin 和 Hu<sup>[10]</sup> 研究了时滞双稳系统的相干共振和随机共振, 并发现正的反馈增益会增强随机共振, 而负反馈增益会减小系统输出, 使随机共振现象消失.

自从随机共振概念被提出以来, 双稳系统的随机共振现象得到广泛研究; 但是在单稳系统中, 研究者发现也存在随机共振<sup>[13-19]</sup>. Dykman 等<sup>[14]</sup> 和 Evstigneev 等<sup>[15]</sup> 基于线性响应理论考虑了单稳系统的随机共振. Zhou 和 Xu<sup>[18]</sup> 考虑了周期混合信号对单稳系统随机共振的影响. Guo 等<sup>[19]</sup> 研究了由 Gauss 噪声和非对称分叉噪声共同作用的单稳时滞系统的随机共振现象.

考虑到周期矩形信号的振幅不会局限于小信号幅值情况, 因此本文主要研究周期矩形信号和白噪声驱动的时滞非对称单稳系统的随机共振现象. 分析得到时滞量、噪声强度、系统非对称性以及系统参数对随机共振的影响.

## 2 时滞非对称双稳系统的信噪比

考虑由 Gauss 白噪声和周期矩形信号驱动的时滞非对称单稳系统, 其模型可以描述为如下 Langevin 方程:

$$\dot{x} = -bx(t-\tau)^3 + r + x(t)\xi(t) + \eta(t) + AG(t), \quad (1)$$

其中  $r$  表示单稳系统的非对称性,  $\tau$  是系统的时滞量,  $b$  是系统参数,  $\xi(t)$  和  $\eta(t)$  均为 Gauss 白噪声, 并且具有如下的统计性质:

$$\begin{aligned} \langle \xi(t) \rangle &= \langle \eta(t) \rangle = 0, \\ \langle \xi(t)\xi(t') \rangle &= 2D\delta(t-t'), \\ \langle \eta(t)\eta(t') \rangle &= 2\alpha\delta(t-t'), \\ \langle \xi(t)\eta(t') \rangle &= \langle \eta(t)\xi(t') \rangle = 0, \end{aligned} \quad (2)$$

$D$  和  $\alpha$  分别表示乘性和加性噪声强度,  $G(t)$  是周期

\* 国家自然科学基金 (批准号: 10872165, 11102155) 资助的课题.

<sup>†</sup> E-mail: zhangxiaoyan320@mail.nwpu.edu.cn

为  $T$  的周期矩形信号;  $A$  表示周期矩形信号的振幅常数.  $G(t)$  具有如下形式:

$$G(T+t) = G(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t \leq T/2, \\ -1, & T/2 < t \leq T. \end{cases} \quad (3)$$

根据上述 (1) 到 (3) 式, 可以得到单稳系统相应的 FPK 方程为

$$\frac{\partial P(x, t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} A(x, \tau) P(x, t) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} B(x, \tau) P(x, t), \quad (4)$$

其中

$$\begin{aligned} A(x, \tau) &= (Dx - bx^3 + r + AG(t))C(x, \tau), \\ B(x, \tau) &= (Dx^2 + \alpha)C(x, \tau)^2, \\ C(x, \tau) &= 1 + 3\tau bx^2. \end{aligned} \quad (5)$$

利用绝热近似理论<sup>[20]</sup>, 通过求解方程 (4) 可得到相应的静态概率密度函数为

$$\begin{aligned} p(x, t) &= \frac{N}{\sqrt{B(x, \tau)}} \exp \left[ \int^x \frac{A(x', \tau)}{B(x', \tau)} dx' \right] \\ &= \frac{N}{\sqrt{B(x, \tau)}} \\ &\times \exp \left[ \int^x \frac{-U'(x) + r + AG(t)}{(Dx^2 + \alpha)(1 + 3\tau x^2)} dx \right] \\ &= \frac{N}{\sqrt{B(x, \tau)}} \exp \left[ -\frac{\tilde{U}(x)}{D} \right] a, \end{aligned} \quad (6)$$

其中

$$\begin{aligned} U'(x) &= \frac{dU}{dx} = -Dx + bx^3, \quad (7) \\ \tilde{U}(x) &= \frac{D^2 + \alpha b}{2(3\tau b\alpha - D)} \ln(Dx^2 + \alpha) \\ &+ \frac{\sqrt{D/\alpha}[D(r + AG(t))]}{3\tau b\alpha - D} \\ &\times \arctan \left( \sqrt{\frac{D}{\alpha}} x \right) \\ &- \frac{D(1 + 3\tau D)}{6\tau(3\tau b\alpha - D)} \ln(3\tau bx^2 + 1) \\ &- \frac{\sqrt{3\tau b}[D(r + AG(t))]}{3\tau b\alpha - D} \\ &\times \arctan \left( \sqrt{3\tau b} x \right), \end{aligned} \quad (8)$$

$N$  为归一化常数,  $\tilde{U}(x)$  为广义势函数.

从方程 (7) 和 (8) 可以看出, 如果  $D \neq 0$ , 则方程 (1) 中所示的单稳系统就可以看成等价的双稳系统. 其中  $U(x) = (1/4)bx^4 - (1/2)Dx^2$  表示确定性系统的势能. 由  $U'(x) = 0$ , 可以得到  $x_{\pm} = \pm\sqrt{D/b}$  和  $x_0 = 0$ .  $x_{\pm}$  和  $x_0$  分别是等价双稳系统的两个稳

定点和一个不稳定点 (图 1).

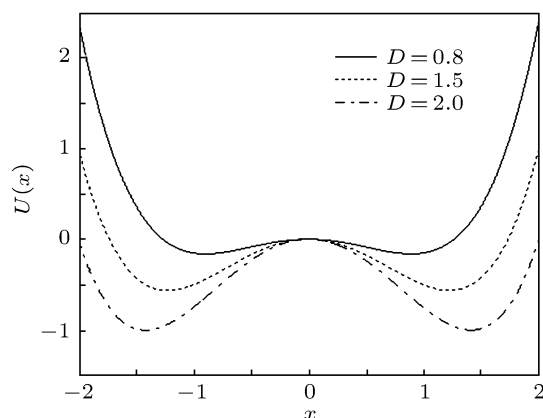


图 1 势函数  $U(x)$  随着不同的乘性噪声强度  $D$  变化的曲线 ( $b=1$ )

粒子在两个稳定定点所在的势阱相互跃迁的跃迁率为

$$\begin{aligned} W_{\pm} &= \frac{|U''(x_0)U''(x_{\pm})|^{1/2}}{2\pi} \\ &\times \exp \left[ \frac{\tilde{U}(x_{\pm}) - \tilde{U}(x_0)}{D} \right] \\ &= w_0 \exp(\mp P \mp QG(t)), \end{aligned} \quad (9)$$

计算得到

$$\begin{aligned} w_0 &= \frac{D}{\sqrt{2\pi}} \exp \left[ \frac{D^2 + \alpha b}{2D(3\tau b\alpha - D)} \right. \\ &\times \ln \left( \frac{D^2}{\alpha b} + 1 \right) - \frac{1 + 3\tau D}{6\tau(3\tau b\alpha - D)} \\ &\times \ln(1 + 3\tau D) \left. \right], \\ P &= \frac{r}{3\tau b\alpha - D} \left( \sqrt{3\tau b} \arctan(\sqrt{3\tau D}) \right. \\ &\left. - \sqrt{\frac{D}{\alpha}} \arctan \left( \frac{D}{\sqrt{b\alpha}} \right) \right), \\ Q &= \frac{A}{3\tau b\alpha - D} \left( \sqrt{3\tau b} \arctan(\sqrt{3\tau D}) \right. \\ &\left. - \sqrt{\frac{D}{\alpha}} \arctan \left( \frac{D}{\sqrt{b\alpha}} \right) \right). \end{aligned}$$

根据文献 [21,22] 中的方法, 可以得到关联函数的表达式:

$$K(t) = C\delta(t) + B_2\langle G(t)G(0) \rangle, \quad (10)$$

其中

$$\begin{aligned} C &= S(0) = \frac{1}{2w_0} \left( \cosh^{-3}(P+Q) \right. \\ &\left. + \cosh^{-3}(P-Q) \right), \\ B_2 &= \frac{1}{4} \left( \tanh(P+Q) - \tanh(P-Q) \right)^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle G(t)G(0) \rangle &= \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} (2k+1)^{-2} \\ &\quad \times \exp[-i(2k+1)\Omega t], \\ \Omega &= \frac{2\pi}{T}. \end{aligned} \quad (11)$$

根据关联函数与功率谱密度函数  $S(\omega)$  之间的关系,  $S(\omega)$  得到如下表达式:

$$\begin{aligned} S(\omega) &= C(P, Q) + \frac{8}{\pi} B_2(P, Q) \\ &\quad \times \sum_k (2k+1)^{-2} \delta[\omega - (2k+1)\Omega]. \end{aligned} \quad (12)$$

根据绝热近似理论, 信噪比 (SNR) 可表示为

$$SNR = \frac{8B_2(P, Q)}{\pi C(P, Q)} = \frac{8w_0Q^2}{\pi \cosh(P)}. \quad (13)$$

其中,  $w_0, P, Q$  的表达式如 (9) 式所示.

### 3 延迟时间以及噪声对信噪比的影响

通过 (13) 式所给出的信噪比的表达式, 我们分析各个参数对初始条件为  $x(0) = x_+$  时系统信噪比的影响.

图 2(a) 给出了信噪比  $SNR$  作为乘性噪声强度  $D$  的函数随着系统非对称性  $r$  变化的曲线. 从图中可以看出信噪比随着  $r$  的增加是单调减小的; 而当  $r$  取固定的较小值时, 信噪比随着  $D$  的增加先是出现了极小值而后又有一个极大值, 说明此时共振抑制和推进并存; 而当  $r$  值较大时, 信噪比曲线只有一个极小值, 随机共振现象消失. 考虑到系统非对称性有正负之分, 我们得到图 2(b) 这个三维图像, 很明显可以发现此处信噪比随着  $r$  的增加是先增加后减小, 得到了随机共振现象. 同时  $D$  对信噪比的影响与图 2(a) 中结论是一致的.

图 3 给出了在时滞量  $\tau$  取不同值时, 信噪比  $SNR$  随着乘性噪声强度  $D$  变化的函数. 信噪比随着  $D$  的增加先减小后增加, 曲线上有一个极小值, 出现了一个抑制平台, 而后曲线又随着  $D$  的增加再次减小, 曲线上有共振出现并且峰值的位置随着时滞量的增加而下降右移, 但是当乘性噪声强度取值较大时, 信噪比曲线随着  $\tau$  的增加而增加.

在图 4 中我们画出了信噪比  $SNR$  作为加性噪声强度  $\alpha$  的函数随着不同的信号振幅  $A$  变化的曲线. 信噪比曲线随着  $\alpha$  的增加先增加再减小, 在  $SNR - \alpha$  参数平面上观察到了随机共振现象. 峰

值的位置随着信号振幅的增加而单调增加.

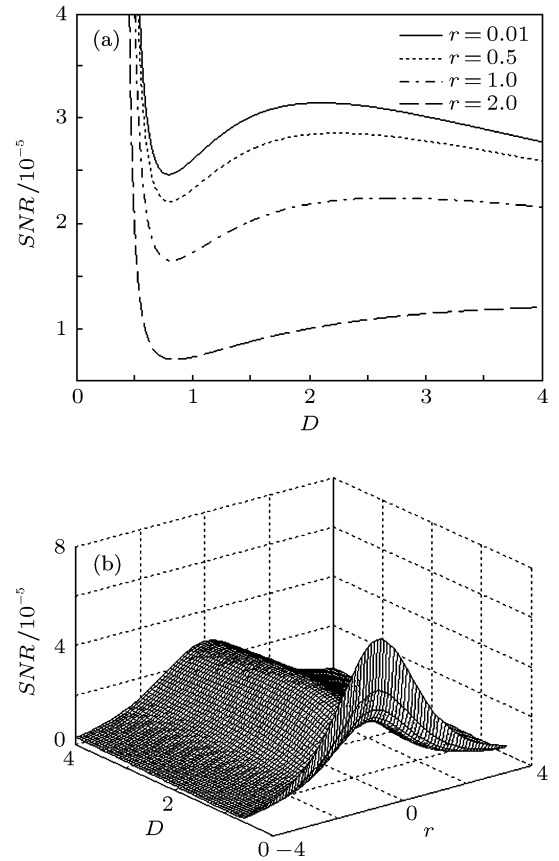


图 2 (a) 信噪比  $SNR$  作为乘性噪声强度  $D$  的函数随着系统非对称性  $r$  变化的曲线; (b) 信噪比  $SNR$  随着乘性噪声强度  $D$  以及系统非对称性  $r$  变化的三维曲线 ( $\alpha = 0.7, \tau = 0.1, b = 1, A = 0.01$ )

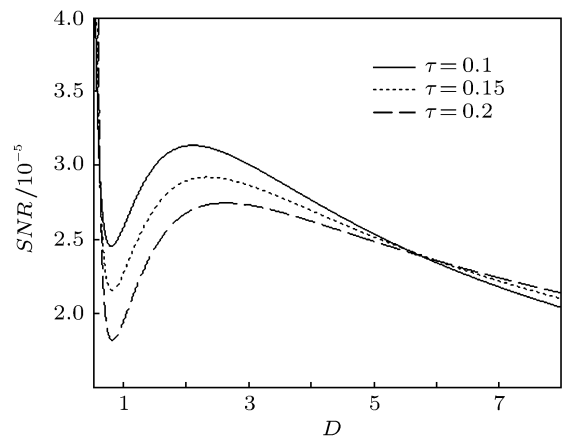


图 3 信噪比  $SNR$  作为乘性噪声强度  $D$  的函数随着时滞量  $\tau$  变化的曲线 ( $\alpha = 0.7, r = 0.1, b = 1, A = 0.01$ )

在图 5 中我们画出了信噪比  $SNR$  作为加性噪声强度  $\alpha$  的函数随着不同的系统参数  $b$  变化的曲线. 信噪比曲线随着  $\alpha$  的增加非单调变化, 是一个峰曲线, 这意味着随机共振发生. 当  $\alpha$  取值较小时,  $SNR$  随着  $b$  的增加而增加; 而当  $\alpha$  取值较大时,

SNR 随着  $b$  的增加而减小. 信噪比曲线上共振峰的位置随着  $b$  的增加位置左移并且峰值逐渐增大.

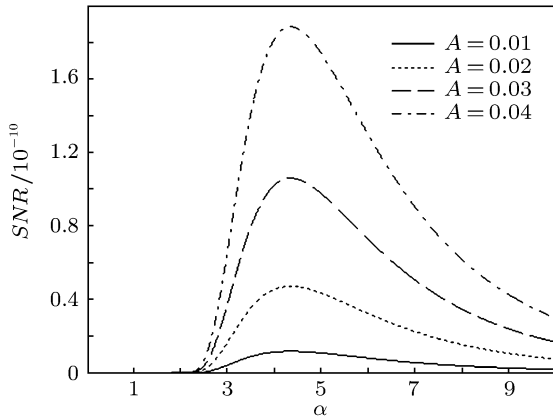


图4 信噪比 SNR 作为加性噪声强度  $\alpha$  的函数随着信号振幅  $A$  变化的曲线 ( $D = 0.5, r = 0.1, b = 1, \tau = 0.1$ )

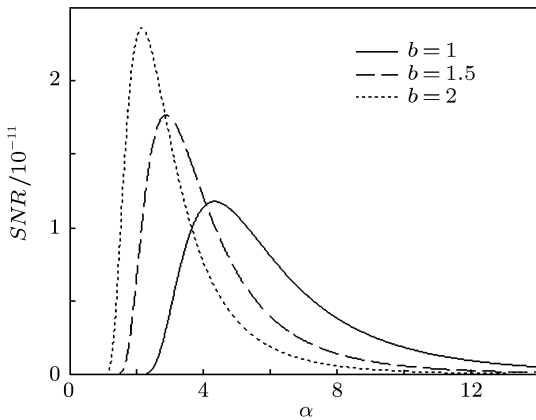


图5 信噪比 SNR 作为加性噪声强度  $\alpha$  的函数随着系统参数  $b$  变化的曲线 ( $D = 0.5, r = 0.1, \tau = 0.1, A = 0.01$ )

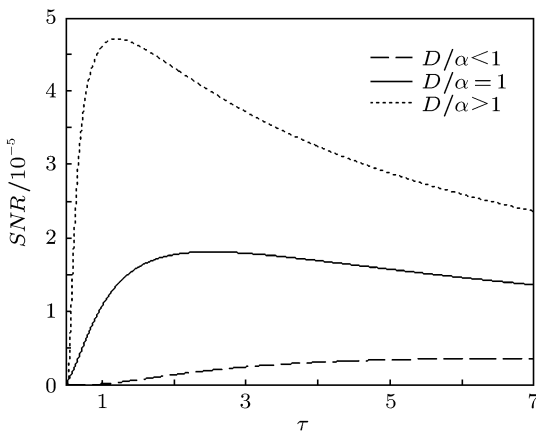


图6 信噪比 SNR 作为时滞量  $\tau$  的函数随着乘性与加性噪声强度比  $D/\alpha$  变化的曲线 ( $\alpha = 0.2, D = 0.1(D/\alpha < 1); D = 0.2(D/\alpha = 1); D = 0.3(D/\alpha > 1), r = 0.1, b = 1, A = 0.01$ )

图6给出了信噪比 SNR 作为时滞量  $\tau$  的函数随着乘性与加性噪声强度的比值  $D/\alpha$  变化的曲线. 从图中可以看出当  $D/\alpha > 1$  和  $D/\alpha = 1$  时, 随着  $\tau$  的增加, 两条曲线都有一个单峰, 产生了随机共振现象.  $D/\alpha > 1$  时峰值的位置高于  $D/\alpha = 1$  时. 而当  $D/\alpha < 1$  时, 信噪比曲线随着  $\tau$  的增加单调增加, 此时随机共振现象消失.

图7给出的是信噪比 SNR 随着时滞量  $\tau$  和系统非对称性  $r$  变化的三维曲线. 当时滞量取不同值时, 信噪比曲线随着系统非对称性增加为钟形曲线, 系统出现随机共振的同时峰值的位置随着时滞量的增加先增加再减小. 很显然, 当  $|r|$  比较小时, 信噪比曲线随着时滞量的变化产生随机共振现象; 而当  $|r|$  取值很大时, 信噪比曲线随着  $\tau$  的增加单调增加, 共振现象消失.

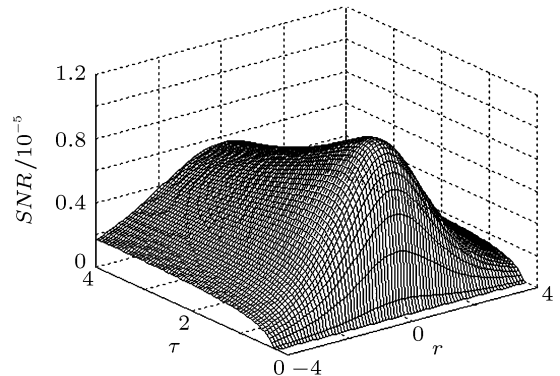


图7 信噪比 SNR 随着时滞量  $\tau$  以及系统非对称性  $r$  变化的三维曲线 ( $\alpha=0.7, D=0.5, b=1, A=0.01$ )

## 4 结论

本文主要考虑了白噪声与周期矩形信号对时滞非对称单稳系统随机共振的影响. 在绝热近似条件下, 利用信噪比理论得到了信噪比的表达式, 通过分析信噪比曲线发现如下结论: SNR- $D$  曲线上抑制与共振并存; 而 SNR- $\alpha$  曲线上只有随机共振现象产生, 说明乘性与加性噪声强度对信噪比的影响是不同的. 当  $D/\alpha < 1$  以及系统非对称性  $|r|$  取值很大时, SNR- $\tau$  参数平面上的随机共振现象消失了. 同时 SNR- $r$  参数平面上也观察到了随机共振现象. 在本文的研究中考虑的是周期矩形信号对系统的影响, 但在研究中也引入其他的信号形式, 比如周期余弦信号. 本文的主要结论是通过解析方法得到的, 而数值方法也是随机共振研究的重要途径, 这是我们今后研究工作的重点.

- [1] Frank T D 2005 *Phys. Rev. E* **71** 031106  
 [2] Piwonski T, Houlihan J, Busch T, Huyet G 2005 *Phys. Rev. Lett.* **95** 040601  
 [3] Nie L R, Mei D C 2008 *Phys. Rev. E* **77** 031107  
 [4] Cai J C, Mei D C 2008 *Mod. Phys. Lett. B* **22** 2759  
 [5] Wu D, Zhu S Q 2006 *Phys. Rev. E* **73** 051107  
 [6] Dong X J 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 5618 (in Chinese) [董小娟 2007 物理学报 **56** 5618]  
 [7] Masoller C 2002 *Phys. Rev. Lett.* **88** 034102  
 [8] Zhang H Q, Xu W, Xu Y, Zhou B C 2010 *Science in China G* **53** 745  
 [9] Jia Z L 2010 *Chin. Phys. B* **19** 020504  
 [10] Jin Y F, Hu H Y 2007 *Physica A* **382** 423  
 [11] Guo Y F, Xu W, Wang L 2010 *Chin. Phys. B* **19** 040503  
 [12] Guo F, Zhou Y R, Zhang Y 2010 *Chin. Phys. B* **19** 070504  
 [13] Zhou Y R 2011 *Chin. Phys. B* **20** 010501  
 [14] Dykman M I, Luchinsky D G, Mannella R, McClintock P V E, Stein N D, Stockset N G 1995 *Nuovo Cimento D* **17** 661  
 [15] Evstigneev M, Reimann P, Pankov V, Princeet R H 2004 *Europhys. Lett.* **65** 7  
 [16] Stocks N G, Stein N D, Soskin S M, McClintock P V E 1992 *J. Phys. A: Math. Gen.* **25** L1119  
 [17] Vilar J M G, Rubi J M 1996 *Phys. Rev. Lett.* **77** 2863  
 [18] Zhou B C, Xu W 2009 *Chaos, Solitons and Fractals* **40** 401  
 [19] Guo F, Huang Z Q, Fan Y, Li S P, Zhang Y 2009 *Chin. Phys. Lett.* **26** 10054  
 [20] McNamara B, Wiesenfeld K 1989 *Phys. Rev. A* **39** 4854  
 [21] Ginzburg S L, Pustovoit M A 1999 *JETP* **89** 801  
 [22] Ginzburg S L, Pustovoit M A 2002 *Phys. Rev. E* **66** 021107

# Stochastic resonance in a time-delayed asymmetric mono-stable system modulated by periodic rectangular signal\*

Zhang Xiao-Yan<sup>†</sup> Xu Wei Zhou Bing-Chang

(Department of Applied Mathematics, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China)

(Received 7 March 2011; revised manuscript received 30 May 2011)

## Abstract

We investigate the stochastic resonance of the time-delayed mono-stable system modulated by periodic rectangular signal and Gaussian white noises. The expression of signal-to-noise ratio (SNR) is obtained, and the stochastic resonance phenomenon is found in this system. The study shows that the effects of multiplicative intensity and white noise intensity on SNR are different. In the SNR-D plot, the phenomena of resonance and suppression coexist. When the value of the bias of system  $|r|$  is bigger or the ratio of multiplicative intensity to white noise intensity  $D/\alpha$  is less than 1, the stochastic resonance phenomenon in the SNR- $\tau$  plots disappears.

**Keywords:** the time-delayed asymmetric mono-stable system, stochastic resonance, periodic rectangular signal

**PACS:** 05.40.-a, 02.50.-r

\* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 10872165, 11102155).

<sup>†</sup> E-mail: zhangxiaoyan320@mail.nwpu.edu.cn