

一个新混沌系统及其电路仿真

周小勇[†]

(江苏技术师范学院电气信息工程学院, 常州 213001)

(2011年5月3日收到; 2011年5月24日收到修改稿)

提出了一个新的三维自治混沌系统, 并对系统的基本动力学特性进行了深入研究, 得到系统的 Lyapunov 指数和维数, 给出了系统数值仿真图、Poincaré 映射图、Lyapunov 指数谱和分岔图, 重点分析了不同参数变化对系统动力学行为的影响. 最后, 设计了该混沌系统的硬件电路并运用 Multisim 软件对该电路进行仿真实验, 数值仿真和电路仿真证实了该混沌系统与以往发现的混沌系统并不拓扑等价, 是一个新的混沌系统.

关键词: 混沌系统, Lyapunov 指数谱, Poincaré 截面图, 电路实现

PACS: 05.45.-a

1 引言

自从 Lorenz 于 20 世纪 60 年代在实验中发现第一个混沌吸引子以来, 混沌理论的研究和应用在许多领域中得到了极大的关注, Lorenz 系统成为后人研究混沌理论的出发点和基石^[1,2]. 在其基础上, 一些混沌系统相继被发现和提出, 1999 年 Chen 在混沌系统控制中发现了一个与 Lorenz 系统类似但拓扑不等价的新混沌吸引子 Chen 系统^[3,4]. 2002 年 Lü 等人相继发现了 Lü 系统及连接上述三个系统的统一混沌系统^[5-7]. 2004 年, Liu 等发现了一类含有平方非线性项的 Liu 混沌系统^[8]. 2005 年, Qi 等人发现了 Qi 混沌系统^[9]. 另外, 近年来, 各种新混沌系统不断被发现和提出, 如分数阶系统^[10], 多翼混沌系统^[11], 超混沌系统^[12] 及恒 Lyapunov 指数系统等^[13,14]. 新的混沌系统不断被发现和提出, 促进了人们对混沌现象更深入的研究和认识, 进一步丰富和完善了混沌理论, 从而也为混沌理论在信息加密、保密通信、故障诊断、信号发生器设计、信号检测与处理中的应用奠定了基础^[7,15].

本文提出了一个新的三维自治混沌系统, 系统含有四个参数, 其中每一个方程中都含一个非

线性乘积项, 另外有一个方程还同时含有一个平方项. 通过理论推导、数值仿真、Poincaré 截面图、Lyapunov 维数、Lyapunov 指数谱和分岔图, 研究和分析了系统的基本动力学特性, 验证了系统的混沌特性. 同时还设计了该混沌系统的硬件电路原理图, 并进行了电路仿真实验, 证实了该系统的可实现性. 研究表明在相同的混沌行为预期下, 仿真实验与理论分析结论十分吻合.

2 新混沌系统的基本分析

2.1 新混沌系统模型

本文提出的新三维自治混沌系统, 其数学模型描述为

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -ax + by - xz, \\ \dot{y} &= cy + xz, \\ \dot{z} &= -20xy - dz + 2y^2, \end{aligned} \quad (1)$$

式中, a, b, c, d 是实常数. 当 $a = 18, b = 20, c = 12, d = 14$ 时, 系统存在一个典型的混沌吸引子如图 1 所示.

[†] E-mail: zhouxxy99@sohu.com

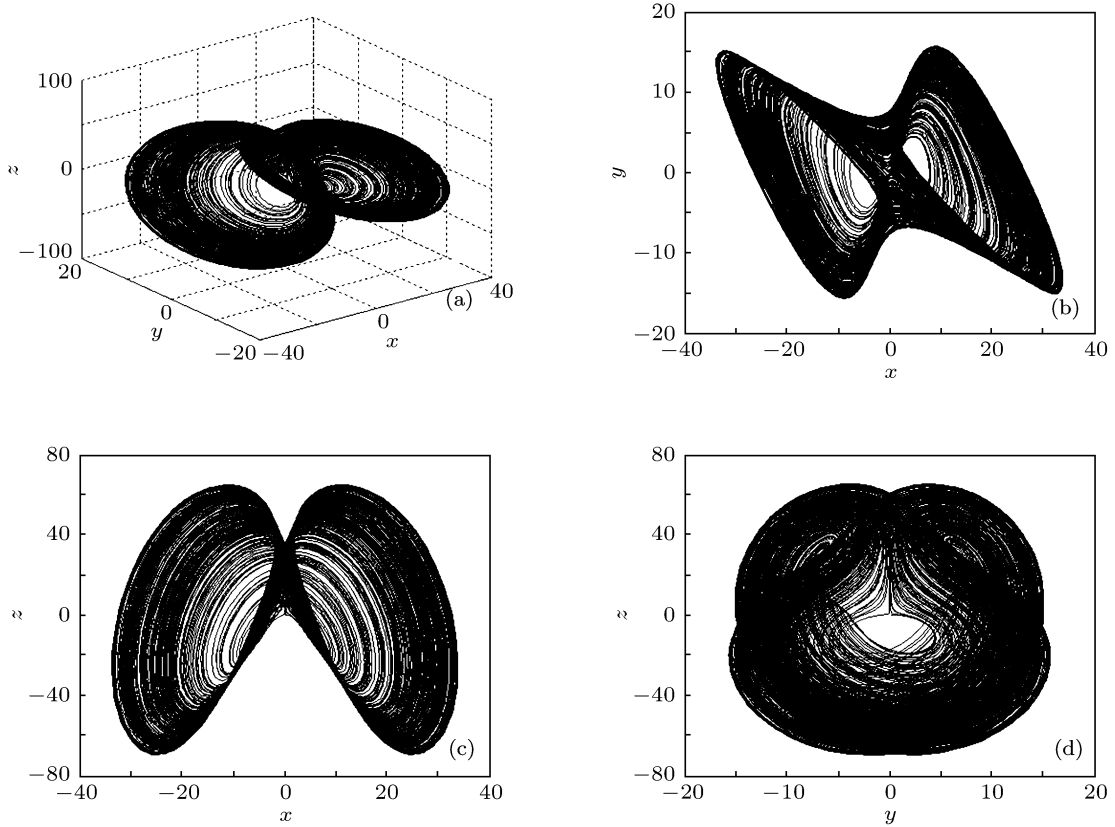


图 1 系统 (1) 的典型混沌吸引子图 (a) x - y - z 相图; (b) x - y 相图; (c) x - z 相图; (d) y - z 相图

由图 1 可发现系统 (1) 的混沌吸引子轨线在特定的吸引域内具有遍历性. 这个系统的混沌吸引子与 Lorenz 系统的吸引子形状不相同, 与 Chen 系统、Lü 系统、Liu 系统以及 Qi 系统的吸引子形状均不相同.

2.2 动力学特性理论分析

1) 对称性和不变性

因为系统 (1) 在 $(x, y, z) \rightarrow (-x, -y, z)$ 变换下具有不变性, 系统的图像关于 z 轴对称, 并且这种对称对系统所有参数均成立.

2) 耗散性和吸引子的存在性

由于

$$\nabla V = \frac{\partial \dot{x}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{y}}{\partial y} + \frac{\partial \dot{z}}{\partial z} = -a + c - d, \quad (2)$$

因为 $a + d - c > 0$, 所以系统 (1) 是耗散的, 且以如下的指数形式收敛:

$$\frac{dV}{dt} = e^{-(a+d-c)t}, \quad (3)$$

即体积元 V_0 在 t 时刻收缩为体积元 $V_0 e^{-(a+d-c)t}$. 这意味着, 当 $t \rightarrow \infty$ 时, 包含系统轨迹线的每个体积元将以指数率 $-(a+d-c)$ 收缩到零. 因此, 所有系统轨线最终会被限制在一个体积为零的集合上, 且它渐进运动固定在一个吸引子上.

3) 平衡点及稳定性

令系统 (1) 方程的右边等于零, 即

$$\begin{aligned} -ax + by - xz &= 0, \\ cy + xz &= 0, \\ -20xy - dz + 2y^2 &= 0. \end{aligned} \quad (4)$$

解方程可得到三个平衡点, 分别为 $s_0 = (0, 0, 0)$,

$$s_1 = \left(\frac{(b+c)\sqrt{cd}}{\sqrt{20(b+c)^2 - 2a(b+c)}}, \frac{a\sqrt{cd}}{\sqrt{20(b+c)^2 - 2a(b+c)}}, \frac{-ac}{b+c} \right),$$

$$s_2 = \left(\frac{-(b+c)\sqrt{cd}}{\sqrt{20(b+c)^2 - 2a(b+c)}}, \frac{-a\sqrt{cd}}{\sqrt{20(b+c)^2 - 2a(b+c)}}, \frac{-ac}{b+c} \right).$$

由于系统 (1) 参数取值满足 $cd > 0$ 及 $10(b+c) - a > 0$, 所以系统有三个平衡点.

把系统 (1) 在平衡点 s_0 处线性化, 得 Jacobi 矩阵 J_0 为

$$J_0 = \begin{bmatrix} -a - z_0 & b & -x_0 \\ z_0 & c & x_0 \\ -20y_0 & 4y_0 - 20x_0 & -d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -18 & 20 & 0 \\ 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & -14 \end{bmatrix}. \quad (5)$$

其特征值方程为

$$|\lambda I - J_0| = 0. \quad (6)$$

因此, 其特征值为

$$\lambda_1 = -18; \lambda_2 = 12; \lambda_3 = -14.$$

由于特征值 λ_1 和 λ_3 是负实数, 而 λ_2 是正实数, 因此平衡点 s_0 是不稳定的且为三维空间中的一个鞍点.

同理, 当把系统参数代入平衡点 s_1 和 s_2 后, 并在两平衡点处分别对系统 (1) 进行线性化, 可得它们的特征值均为

$$\lambda_1 = -22.81; \lambda_2 = 4.78 + 15.56i; \lambda_3 = 4.78 - 15.56i.$$

因为 λ_2 和 λ_3 是实部为正的共轭复数, 且 λ_1 是负实数, 所以平衡点 s_1 和 s_2 都是不稳定的鞍焦点.

2.3 时域波形图、频谱图及 Poincaré 截面图

当系统 (1) 处于混沌时, 其产生的序列具有非周期性, 且对初始值具有敏感性, 其时域波形如图 2 所示, 初始值敏感特性如图 3 所示. 即使初始值 x_0 只相差 0.000001, 其余初始值不变, 其波形大约在 $t=4$ 后完全不相同. 另外, 系统的功率谱是连续谱, 如图 4 所示, 图中没有明显的波峰, 并且峰值连成一片, 说明系统 (1) 是混沌系统, 且序列的频谱很宽.

系统的混沌动力学特性还可以由 Poincaré 截面图观察, 对 Poincaré 截面的选取应恰当, 此截面不能包含系统的轨线, 也不能与轨线相切 [7,9]. 系统 (1) 在几个截面上的 Poincaré 截面图如图 5 所示.

可以看出, Poincaré 截面上有一些成片的具有分形结构的密集点, 吸引子的叶片清晰可见, 这些特征也说明了系统 (1) 为混沌系统.

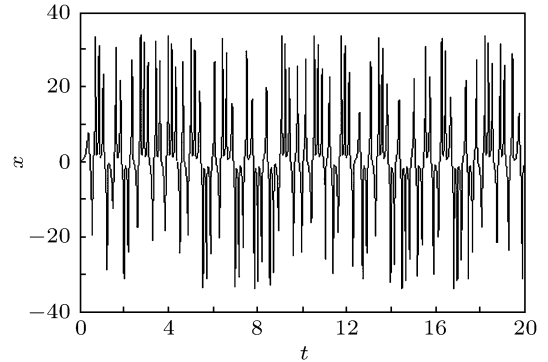


图 2 系统 (1) x 的时域图

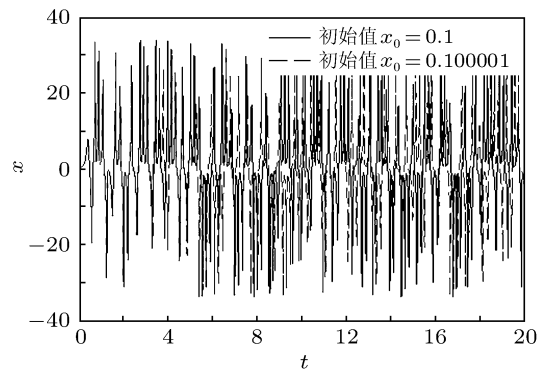


图 3 系统 (1) x 对初值的敏感值

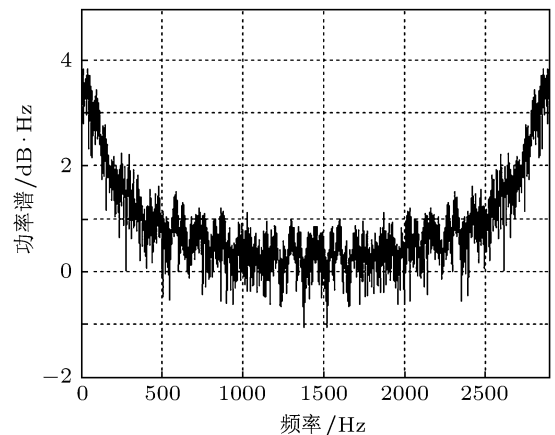


图 4 系统 (1) x 的功率谱

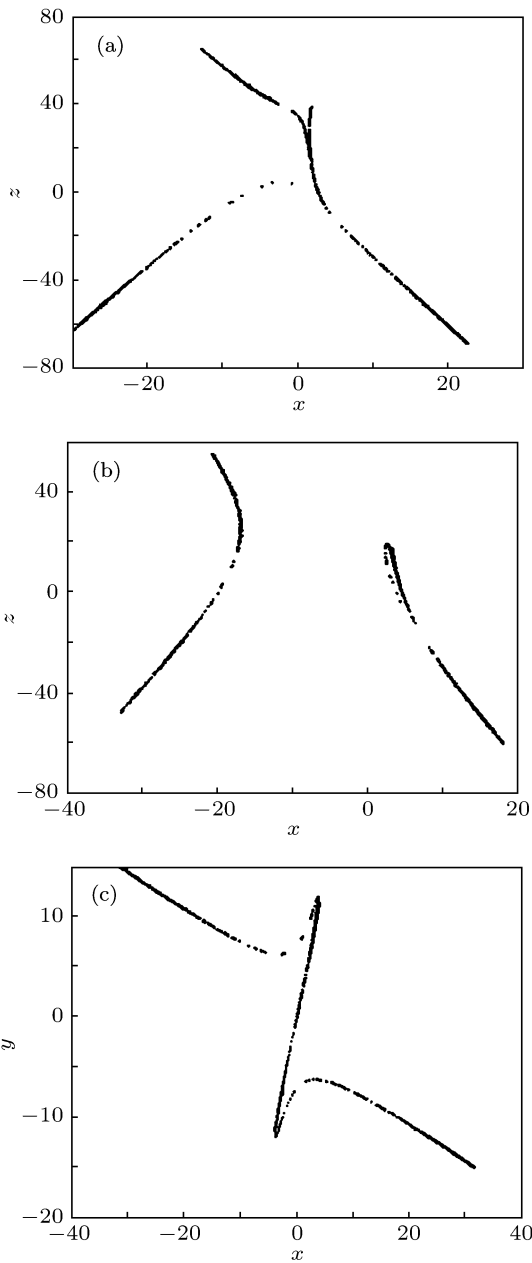


图5 系统(1) Poincaré 截面图 (a) $y = 5$; (b) $y = 10$; (c) $z = 12$

2.4 Lyapunov 指数和 Lyapunov 维数

Lyapunov 指数是定量描述轨线相互排斥和相互吸引的特征值, 特别是系统的最大 Lyapunov 指数是判定混沌系统的重要特征 [7]. 混沌吸引子相邻轨线之间呈现出彼此相互排斥的趋势, 并以指数速率相互分离. 现今, 计算最大 Lyapunov 指数的方法有多种, 本文采用奇异值分解法计算出系统(1)的三个 Lyapunov 指数分别为 $\lambda_{L1} = 4.5166$, $\lambda_{L2} = 0.0019$, $\lambda_{L3} = -33.0823$, 其中一个指数为正, 一个指数接近于零, 一个指数为负, 说明该吸

引子为奇怪吸引子, 其运动是混沌的. 新混沌系统的 Lyapunov 维数为

$$\begin{aligned}
 D_L &= j + \frac{1}{|\lambda_{Lj+1}|} \sum_{i=1}^j \lambda_{Li} \\
 &= 2 + \frac{\lambda_{L1} + \lambda_{L2}}{|\lambda_{L3}|} \\
 &= 2 + \frac{4.5166 + 0.0019}{|-33.0823|} = 2.136. \quad (7)
 \end{aligned}$$

由此可见, 这个新系统的 Lyapunov 维数为分数维数, 验证了该系统为混沌系统.

2.5 系统参数的影响

随着系统参数的变化, 系统平衡点的稳定性将会发生改变, 于是系统就会处于不同的状态. 用分岔图和 Lyapunov 指数谱图 (LE 谱) 可以直观地表明各个系统参数变化时系统状态的变化情况.

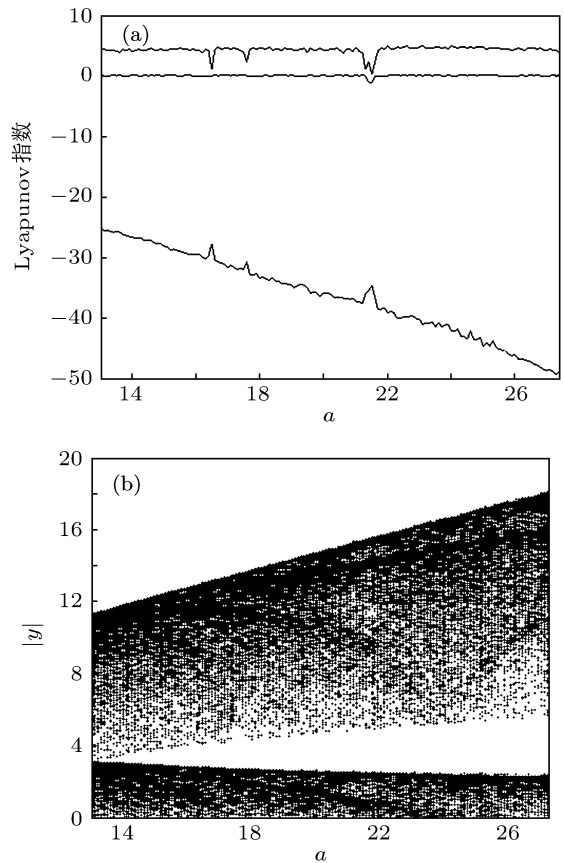


图6 系统(1)随 a 变化时的 LE 谱和分岔图 (a) LE 谱图; (b) $|y|-a$ 的分岔图 (Poincaré 截面 $x = y$)

1) 固定参数 $b = 20, c = 12, d = 14$, 改变 a , 使 $a \in [13, 27.4]$.

当 $a \in [13, 27.4]$ 变化时, 系统的 LE 谱以及关于 y 分岔图如图 6 所示. 当有一个 LE 大于零时, 系

统就处于混沌状态^[7,9]. 由图 6(a) 可见, 随着 a 的变化, 系统的 LE 也在改变, 除最小 LE 指数随着 a 的增大而减小外, 其他两个变化不明显, 最大 LE 始终大于 0, 说明系统处于混沌状态, 并且除很小的区间外, 最大 LE 基本上保持为一个固定值; 而另外一个 LE 基本上保持为 0 不变, 说明系统 (1) 在 $a \in [13, 27.4]$ 始终处于混沌状态, 最大 LE 除很小的区间外几乎不变. 图 6(b) 的 y 分岔图也说明了这一系统动力学特性.

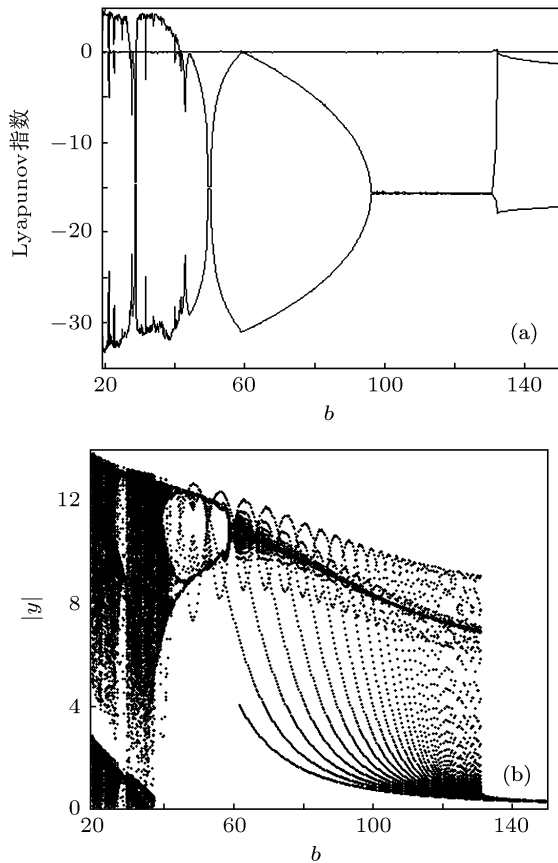


图 7 系统 (1) 随 b 变化时的 LE 谱和分岔图 (a) LE 谱图; (b) $|y|$ - b 的分岔图 (Poincaré 截面 $x=y$)

2) 固定参数 $a = 18, c = 12, d = 14$, 改变 b , 使 $b \in [19, 150]$.

当 $b \in [19, 150]$ 变化时, 系统的 LE 谱以及关于 y 分岔图如图 7 所示. 由图 7(a) 可发现, 系统的 LE 随着 b 的改化而变化. 当 $19 \leq b < 28 \cup 30 \leq b < 41$ 时, 系统最大 LE 大于 0, 系统为混沌状态; 而当 b 处于其他区间时, 除很小小区间点外, 系统基本上都是有两个 LE 小于 0 和一个 LE 等于 0, 系统处于周期状态即系统存在着环吸引子, 只是在少数区间点处, 存在着两个 LE 等于 0 和一个 LE 小于 0, 系统存在着环面吸引子. 值得注意的是,

当 $95 \leq b < 130$ 时, 系统存在着两个相等且小于 0 的 LE 和一个等于 0 的 LE, 说明系统存在着具有恒 Lyapunov 指数特征的极限环状态. 系统的上述动力学特性, 也可由系统 $|y|$ - b 分岔图 (图 7(b)) 看出.

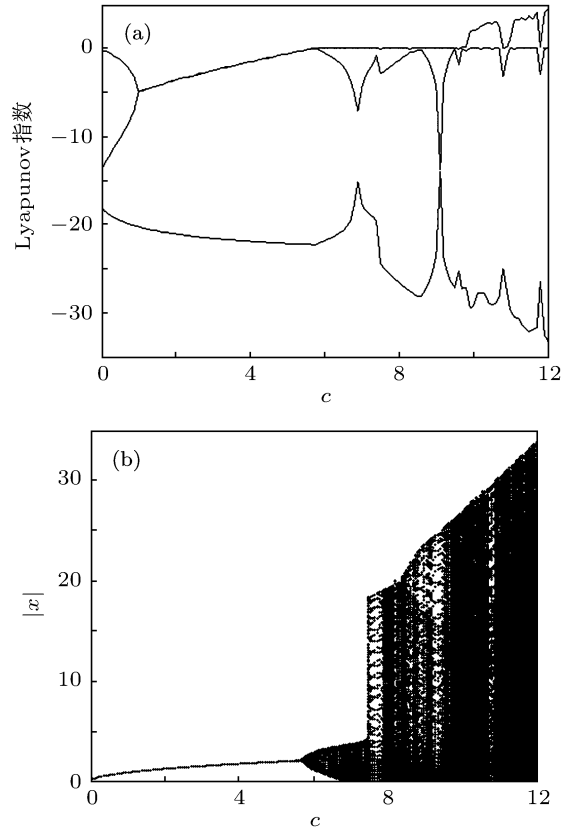


图 8 系统 (1) 随 c 变化时的 LE 谱和分岔图 (a) LE 谱图; (b) $|x|$ - c 的分岔图

3) 固定参数 $a = 18, b = 20, d = 14$, 改变 c , 使 $c \in [0, 12]$.

当 $c \in [0, 12]$ 变化时, 系统的 LE 谱以及关于 x 分岔图如图 8 所示. 由图 8(a) 可见, 随着 c 的变化, 系统的 LE 也在变化. 当 $0 \leq c < 5.6$ 时, 系统 LE 指数小于 0, 系统为稳定状态; 当 $5.6 \leq c < 9.8$ 时, 系统的最大 LE 几乎等于 0, 而其他两个 LE 基本小于 0, 说明系统处于周期状态, 只是在一些点处, 出现两个等于 0 的 LE 和一个小于 0 的 LE, 系统处于二维环面状态; 当 $9.8 \leq c \leq 12$ 时, 系统最大 LE 几乎是大于 0 的, 说明系统处于混沌状态. 图 8(b) 的 $|x|$ - c 分岔图也说明了系统的这些动力学特征.

4) 固定参数 $a = 18, b = 20, c = 12$, 改变 d , 使 $d \in [9, 60]$.

当 $d \in [9, 60]$ 变化时, 系统的 LE 谱以及关于 y 分岔图如图 9 所示. 由图 9(a) 可见, 随着 d

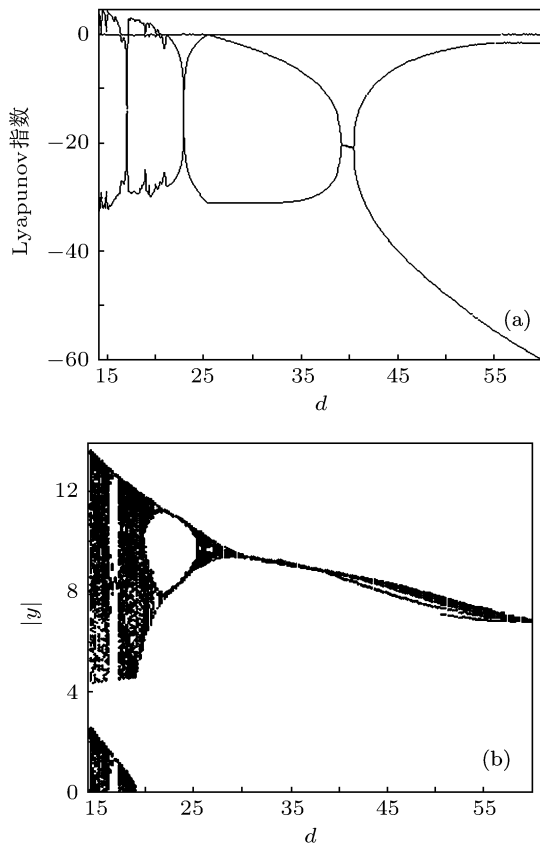


图9 系统(1)随 d 变化时的 LE 谱和分岔图 (a) LE 谱图; (b) $|y|$ - d 的分岔图 (Poincaré 截面 $x=y$)

的变化, 系统的 LE 指数也随着改变. 当 $9 \leq d < 16.5 \cup 17.2 < d \leq 21$ 时, 系统的最大 LE 指数是大于 0 的, 系统处于混沌状态; 当 d 取区间其他值时, 系统的最大 LE 几乎是等于 0 的, 说明系统处于周期状态, 只是在一些点处, 出现两个 LE 等于 0 和一个 LE 小于 0, 系统存在着二维环面状态. 图 9(b) 的 y 分岔图也说明了系统随参数 d 变化的动力学特征.

由以上的 Lyapunov 指数谱图和分岔图分析可知, 参数 a, b, c 和 d 的变化影响着系统的状态, 系统的动力学特性十分丰富, 说明这一新系统是一个典型的混沌系统.

3 系统电路设计与仿真实现

系统的电路如图 10 所示, 即系统可以由电阻、电容、运算放大器、模拟乘法器来实现. 运算放大器采用 LM741, 是用来进行加减运算, 模拟乘法器采用 AD633, 是用来实现系统中的非线性项的.

由于 LM741 的工作容许电压为 $\pm 18\text{ V}$, 而乘法器 AD633 的容许电压仅为 $\pm 10\text{ V}$, 为了可靠地进行电路实验, 把系统的输出电平调小为原来的 $1/10$. 为此可设系统电路变量 u, v 和 w 分别对应系统的数学模型变量 x, y 和 z , 且它们具有如下关系:

$$x = 10u, y = 10v, z = 10w. \quad (8)$$

但为了保证系统电路变量与系统数学模型变量相一致, 又由于系统变量符号的改变不影响其状态及性能, 从而可令

$$u = x, v = y, w = z. \quad (9)$$

系统 (1) 可变为

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -ax + by - 10xz, \\ \dot{y} &= cy + 10xz, \\ \dot{z} &= -200xy - dz + 20y^2. \end{aligned} \quad (10)$$

根据系统电路原理图及电路理论, 可得系统电路实现方程为

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\frac{R_4}{R_1 R_5 C_1} x + \frac{R_4}{R_2 R_5 C_1} y - \frac{R_4}{R_3 R_5 C_1} xz, \\ \dot{y} &= \frac{R_{10}}{R_9 R_{11} C_2} y + \frac{R_{10}}{R_8 R_{11} C_2} xz, \\ \dot{z} &= -\frac{R_{16}}{R_{14} R_{17} C_3} xy - \frac{R_{16}}{R_{20} R_{17} C_3} z + \frac{R_{16}}{R_{15} R_{17} C_3} y^2. \end{aligned} \quad (11)$$

将方程 (11) 与 (10) 相比较, 可得

$$\begin{aligned} a &= \frac{R_4}{R_1 R_5 C_1}, b = \frac{R_4}{R_2 R_5 C_1}, \\ c &= \frac{R_{10}}{R_9 R_{11} C_2}, d = \frac{R_{16}}{R_{20} R_{17} C_3}, \\ 10 &= \frac{R_4}{R_3 R_5 C_1} = \frac{R_{10}}{R_8 R_{11} C_2}, \\ 200 &= \frac{R_{16}}{R_{14} R_{17} C_3}, 20 = \frac{R_{16}}{R_{15} R_{17} C_3}. \end{aligned}$$

当取 $C_1 = C_2 = C_3 = 1\ \mu\text{F}$; $R_5, R_6, R_7, R_{10}, R_{11}, R_{12}, R_{13}, R_{17}, R_{18}, R_{19}$ 分别为 $10\ \text{k}\Omega$, 再取 $R_1 = R_2 = 220\ \text{k}\Omega, R_3 = R_8 = 200\ \text{k}\Omega, R_4 = 110\ \text{k}\Omega, R_9 = 100\ \text{k}\Omega, R_{14} = 2.5\ \text{k}\Omega, R_{15} = 2\ \text{M}\Omega, R_{16} = 62\ \text{k}\Omega$ 和 $R_{20} = 330\ \text{k}\Omega$ 时, 采用 Multisim 软件对电路进行了仿真实验, 仿真结果如图 11 所示. 可以发现仿真实验结果与数值仿真结果是一致的. 由于该软件采用直观的图形界面创建电路, 软件仪器的控制面板及操作方式都与实物相近, 可以实时显示仿真结果, 所以该混沌系统的仿真实验可以反映实际电路的实验效果, 因此仿真实验结果是有效的.

通过上述理论分析和仿真实验证实, 本文提出的非线性系统是一个新的混沌系统, 它具有一切混沌系统的共有特征, 如确定性、有界性、遍历

性、对初值的极端敏感性、一定频率范围内的连续谱、长期不可预测性和正的最大 Lyapunov 指数等.

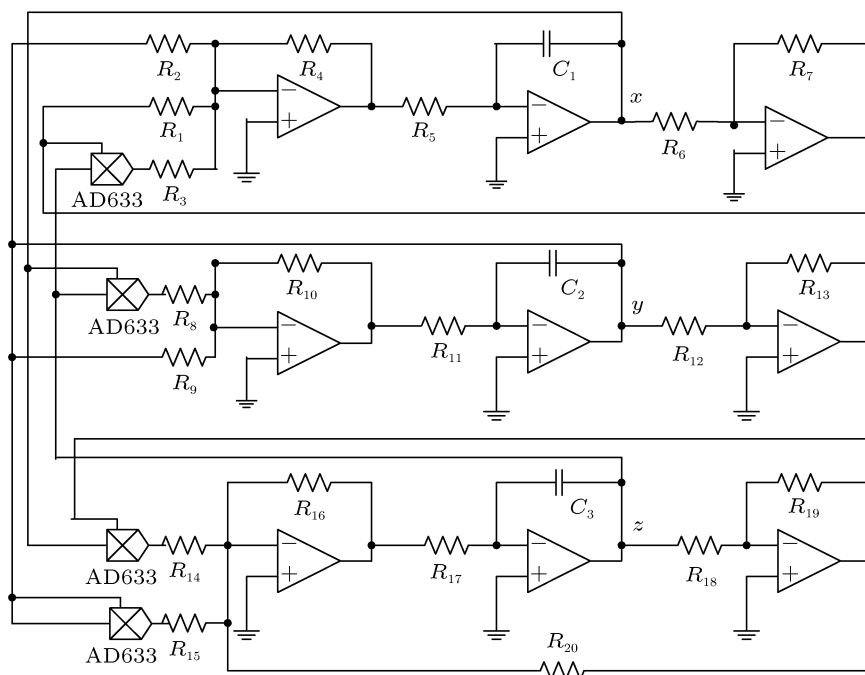


图 10 电路原理图

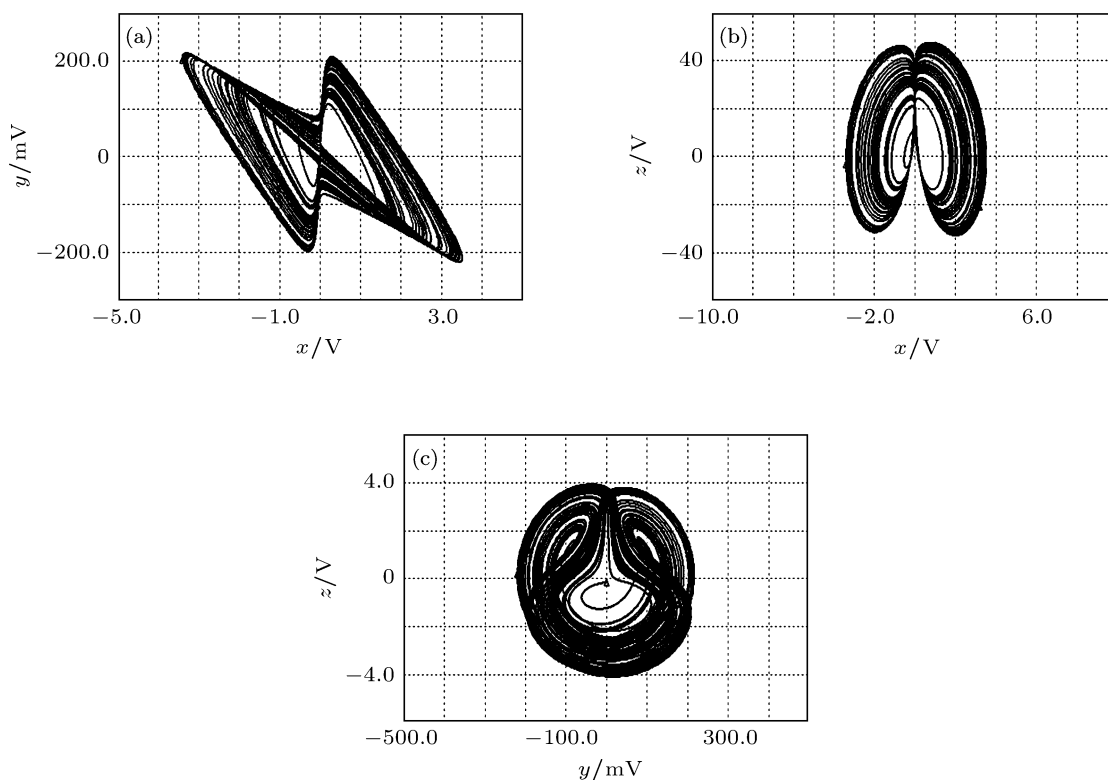


图 11 系统 (1) 的电路实现仿真相图 (a) x - y 相图; (b) x - z 相图; (c) y - z 相图

4 结论

本文提出了一个新的三维自治混沌系统并研究了其动力学特性, 即通过理论分析、数值仿真、Poincaré 截面图、Lyapunov 指数谱和分岔图分析了新混沌系统的基本动力学特性, 验证了系统丰富的混沌特性. 最后还根据新系统的数学模型设计了电子电路并进行了仿真验证, 验证了该系统的物理可实现性. 归纳起来可以得出如下结论:

1) 该系统的混沌吸引子形状有别于 Lorenz 系

统、Chen 系统、Lü 系统、Liu 系统以及 Qi 系统等, 是一个新的混沌吸引子;

2) 新系统存在着复杂的混沌动力学特性, 除具有一切混沌系统的共有特性外, 还具有独特特性, 如系统参数 a 变化时, 系统的最大 Lyapunov 指数在某些区间几乎保持不变; 系统参数 b 变化时, 系统存在着具有恒 Lyapunov 指数特征的极限环状态;

3) 系统可以用电子电路实现, 所以该系统在电子测量、弱信号检测和保密通信等领域中有着潜在的应用价值.

-
- [1] Lorenz E N 1963 *J. Atmos. Sci.* **20** 130
- [2] Lorenz E N 1993 *The Essence of Chaos* (Washington: University of Washington Press)
- [3] Chen G R, Ueta T 1999 *Int. J. Bifur. Chaos* **9** 1465
- [4] Celikovskiy S, Chen G R 2002 *Int. J. Bifur. Chaos* **12** 1789
- [5] Lü J H, Chen G R 2002 *Int. J. Bifur. Chaos* **12** 659
- [6] Lü J H, Chen G R, Cheng D Z 2002 *Int. J. Bifur. Chaos* **12** 2917
- [7] Chen G R, Lü J H 2003 *Dynamics of the Lorenz System Family: Analysis, Control and Synchronization* (Beijing: Science Press) p150 (in Chinese) [陈关荣, 吕金虎 2003 Lorenz 系统族的动力学分析、控制与同步 (北京: 科学出版社) 第 150 页]
- [8] Liu C X, Liu L, Liu K 2004 *Chaos Soliton Fract.* **22** 1031
- [9] Qi G Y, Du S, Chen G R 2005 *Chaos Soliton Fract.* **23** 1671
- [10] Zhao P D, Lj J, Zhang X D 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 2791 (in Chinese) [赵品栋, 张晓丹 2008 物理学报 **57** 2791]
- [11] Hu G S 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 8139 (in Chinese) [胡国四 2009 物理学报 **58** 8139]
- [12] Tang L R, Li J, Fan B 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 1446 (in Chinese) [唐良瑞, 李静, 樊冰 2009 物理学报 **58** 1446]
- [13] Li C B, Wang D C 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 764 (in Chinese) [李春彪, 王德纯 2009 物理学报 **58** 764]
- [14] Li C B, Wang H K, Chen S 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 783 (in Chinese) [李春彪, 王翰康, 陈谔 2010 物理学报 **59** 783]
- [15] Liu Z H 2006 *Fundamentals and Applications of Chaotic Dynamics* (Beijing: High Education Press) p18 (in Chinese) [刘宗华 2006 混沌动力学基础及其应用 (北京: 高等教育出版社) 第 18 页]

A novel chaotic system and its circuit simulation

Zhou Xiao-Yong[†]

(*Department of Electric and Information Engineering, Jiangsu Teachers University of Technology, Changzhou 213001, China*)

(Received 3 May 2011; revised manuscript received 24 May 2011)

Abstract

In this paper, a novel three-dimensional autonomous chaotic system is reported. The dynamic properties of the new system are investigated via Lyapunov dimension, numerical simulation, Poincaré diagrams, Lyapunov exponent spectrum and bifurcation diagrams. The different dynamic behaviors of the system are analyzed especially when each system parameter is changed. Finally, the circuit of this new chaotic system is designed and realized by Multisim software. The simulation results confirm that the chaotic system is different from the existing chaotic systems and is a novel chaotic system.

Keywords: chaotic system, Lyapunov exponent spectrum, Poincaré diagrams, circuit realization

PACS: 05.45.-a

[†] E-mail: zhouxy99@sohu.com