

多振子梁弯曲振动中的局域共振带隙*

文岐华 左曙光† 魏欢

(同济大学新能源汽车工程中心, 上海 201804)

(2011年4月26日收到; 2011年6月21日收到修改稿)

从梁的弯曲振动方程出发, 利用传递矩阵法, 给出了无限周期结构的一维多振子声子晶体梁的弯曲振动带隙结构, 并利用有限元方法计算了有限周期结构梁的弯曲振动频率响应. 建立了多振子声子晶体梁的简化模型, 推导出带隙起始截止频率公式. 结果表明: 一维多振子声子晶体梁具有比单振子声子晶体梁更宽更丰富的振动带隙, 可应用于呈倍频关系的减振降噪中; 振动在带隙频率范围内频率响应具有明显的衰减; 所建立的简化模型与理论模型结果符合较好. 研究工作为梁类结构的减振提供一种新的思路.

关键词: 声子晶体, 多振子梁, 局域共振, 带隙

PACS: 43.40.+s, 63.20.-e

1 引言

梁类结构是工程中经常遇到的一种基本构件, 多年来一直是振动与噪声控制领域的主要研究对象之一. 许多学者在该领域做了大量工作, 试图采用不同的方法以达到减振降噪的目的. 由于声子晶体具有振动带隙的特性^[1-4], 因而被引入到弯曲振动梁的设计中.

目前, 国内外学者从理论、仿真及实验等各方面对声子晶体梁进行了研究. 如王刚^[5]对二维和三维声子晶体的简化模型进行了研究, 结果表明基体和局域振子可以分别简化为均质细直梁和弹簧振子的一维结构; Hirsekorn^[6], Goffaux 和 Sanchez-Dehesa^[7]也引入了类似弹簧振子结构的简化原理模型; 郁殿龙^[8]从理论、仿真及实验等各方面验证了梁类周期结构的 Braag 带隙和局域共振带隙的存在; 王刚等^[9], Yu 等^[10]应用理论分析、有限元仿真和实验验证相结合的方法对单振子声子晶体梁弯曲振动进行了研究, 在低频范围内 (0—800 Hz) 获得了单个振动带隙及其传递特性.

然而, 在实际问题中, 振动与噪声在传递过程中多出现倍频成分, 单振子声子晶体梁的低频单带隙特性具有很大的局限性, 不能满足工程减振降噪

的要求, 因此有必要对多振子声子晶体梁的振动带隙和传递特性进行分析. 本文从梁的弯曲振动方程出发, 基于传递矩阵法推导了多振子声子晶体细直梁的弯曲振动弹性波能带结构的计算方法; 并分别采用传递矩阵法和有限元法分析了铝、橡胶/铜块振子和橡胶/铜块振子构成的周期结构细直梁的弯曲振动带隙结构, 以及有限周期条件下的振动传递特性; 最后建立了多振子声子晶体梁的简化模型, 推导出带隙起始截止频率公式. 这一研究工作将为梁类结构的减振提供一种新的思路.

2 多振子声子晶体梁的振动带隙及传输特性计算

2.1 基于传递矩阵法的带隙特性计算方法

图 1 所示为一个截面形状为环形的局域共振细直梁周期结构, 由细直梁和等间距连接在其上的多个振子组成, 第 i 个振子的刚度为 k_i , 质量为 m_i , 该周期结构的晶格常数为 a . 讨论细直梁的弯曲振动, 将未变形时梁的轴线取作 x 轴, 并假设梁仅做对称弯曲振动, 其轴线仅有 y 方向横向位移 $y(x, t)$.

* 国家自然科学基金 (批准号: 51075302) 资助的课题.

† E-mail: sgzuo@tongji.edu.cn

当截面尺寸(长和宽或者半径)远比梁的长度小5倍以上时,满足 Euler-Bernouli 梁条件,其弯曲振动方程为^[9]

$$EI \frac{\partial^4 y(x,t)}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = 0, \quad (1)$$

式中 ρ, E 分别为密度,弹性模量; A 为梁的截面积; I 为截面二次矩; 梁的横向位移为 $y(x,t)$. 设横向位移 $y(x,t) = X(x)\exp(i\omega t)$, 其中 $X(x)$ 为幅值, ω 为角频率.

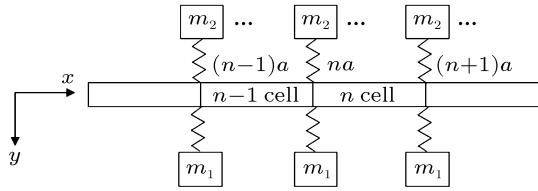


图1 多振子声子晶体梁理论模型示意图

对于第 n 段梁, Euler 梁的弯曲振动方程的解可写为如下形式^[9]:

$$y(x'_n, t) = e^{i\omega t} [A_n^+ \cos(\alpha x'_n) + A_n^- \sin(\alpha x'_n) + B_n^+ \cosh(\alpha x'_n) + B_n^- \sinh(\alpha x'_n)]. \quad (2)$$

对于第 $n+1$ 段梁, (1) 式的解同样可写为

$$y(x'_{n+1}, t) = e^{i\omega t} [A_{n+1}^+ \cos(\alpha x'_{n+1}) + A_{n+1}^- \sin(\alpha x'_{n+1}) + B_{n+1}^+ \cosh(\alpha x'_{n+1}) + B_{n+1}^- \sinh(\alpha x'_{n+1})], \quad (3)$$

式中 $\alpha^4 = \rho A \omega^2 / EI$; $x'_n = x - x_n$, $x'_{n+1} = x - x_{n+1}$ 分别为第 n 段和第 $n+1$ 段梁上的相对坐标. 设 $x = x_{n+1}$ 处的第 i 个振子的纵向位移为

$$Z_{(n+1)i} = C_{(n+1)i} e^{i\omega t}, \quad (4)$$

对于 $x = x_{n+1}$ 处的第 i 个振子有

$$m_i \ddot{Z}_{(n+1)i} + k_i (Z_{(n+1)i} - y_{n+1}(0, t)) = 0, \quad (5)$$

即有

$$A_{n+1}^+ + B_{n+1}^+ - C_{n+1} = -\omega^2 m_i C_{(n+1)i} / k_i. \quad (6)$$

则在 $x = x_{n+1}$ 处, 梁的横向位移、倾角、弯矩及剪切力连续条件分别为

$$\begin{aligned} & A_{n+1}^+ + B_{n+1}^+ \\ &= A_n^+ \cos(\alpha a) + A_n^- \sin(\alpha a) \\ &+ B_n^+ \cosh(\alpha a) + B_n^- \sinh(\alpha a), \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} & A_{n+1}^- + B_{n+1}^- \\ &= -A_n^+ \sin(\alpha a) + A_n^- \cos(\alpha a) \end{aligned}$$

$$+ B_n^+ \sinh(\alpha a) + B_n^- \cosh(\alpha a), \quad (8)$$

$$- A_{n+1}^+ + B_{n+1}^+$$

$$= -A_n^+ \cos(\alpha a) - A_n^- \sin(\alpha a)$$

$$+ B_n^+ \cosh(\alpha a) + B_n^- \sinh(\alpha a), \quad (9)$$

$$- A_{n+1}^- + B_{n+1}^- - \sum \omega^2 m_i C_{(n+1)i} / EI \alpha^3$$

$$= A_n^+ \sin(\alpha a) - A_n^- \cos(\alpha a) + B_n^+ \sinh(\alpha a)$$

$$+ B_n^- \cosh(\alpha a). \quad (10)$$

由(1)—(10)式可得

$$\mathbf{K} \psi_{n+1} = \mathbf{H} \psi_n, \quad (11)$$

式中 $\psi_n = [A_n^+, A_n^-, B_n^+, B_n^-]^T$.

$$F = - \sum \omega^2 m_i / [\alpha^3 EI (1 - \omega^2 m_i / k_i)],$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ F & -1 & F & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha a) & \sin(\alpha a) & \cosh(\alpha a) & \sinh(\alpha a) \\ -\sin(\alpha a) & \cos(\alpha a) & \sinh(\alpha a) & \cosh(\alpha a) \\ -\cos(\alpha a) & -\sin(\alpha a) & \cosh(\alpha a) & \sinh(\alpha a) \\ \sin(\alpha a) & -\cos(\alpha a) & \sinh(\alpha a) & \cosh(\alpha a) \end{bmatrix}.$$

由于在 x 方向上是无限周期结构, 所以矢量 ψ_n 必须满足 Bloch 定理

$$\psi_{n+1} = e^{iqa} \psi_n \quad (12)$$

由(12)和(11)式可得

$$|\mathbf{T} - e^{iqa} \mathbf{I}| = 0, \quad (13)$$

其中 $\mathbf{T} = \mathbf{K}^{-1} \mathbf{H}$, \mathbf{I} 为 4×4 的单位矩阵. 通过求解矩阵 \mathbf{T} 的特征值, 即可以得到无限周期结构中角频率 ω 和波矢 q 的关系.

2.2 数值仿真实例

数值仿真模型结构如图2所示, 梁和振子一的参数设置与文献[10]一致, 以便于对比分析. 梁的材料是铝, 中间层材料是橡胶, 振子一最外层的材料为铜, 振子二最外层的材料为钢, 材料属性分别为 $\rho_{Al} = 2600 \text{ kg/m}^3$, $E_{Al} = 7.0 \times 10^{10} \text{ Pa}$, $G_{Al} = 2.7 \times 10^{10} \text{ Pa}$; $\rho_{rubber} = 1300 \text{ kg/m}^3$, $E_{rubber} = 7.7 \times 10^5 \text{ Pa}$, $G_{rubber} = 2.7 \times 10^5 \text{ Pa}$; $\rho_{Cu} = 8950 \text{ kg/m}^3$; $\rho_{steel} = 7780 \text{ kg/m}^3$. 结构参数分别为 $r_0 = 0.007 \text{ m}$, $r_1 = 0.01 \text{ m}$, $r_2 = 0.015 \text{ m}$,

$r_3 = 0.0195 \text{ m}$; $l = 0.01 \text{ m}$; 晶格常数 $a = 0.075 \text{ m}$.

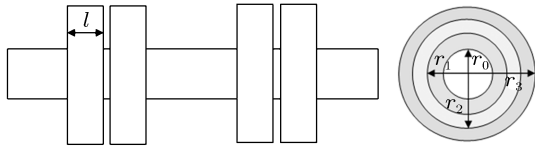


图2 多振子声子晶体梁结构示意图

对于环状橡胶, 其径向等效刚度可以表示为^[11]

$$k = \frac{\pi(5 + 3.29H^2)Gh}{\ln(r_2/r_1)}, \quad (14)$$

其中 $H = \frac{h}{(r_1 + r_2)\ln(r_2/r_1)}$.

根据 (14) 式可得 $k_1 = k_2 = 1.65 \times 10^5 \text{ N/m}$, 振子一的质量 $m_1 = 0.0437 \text{ kg}$, 振子二的质量 $m_2 = 0.038 \text{ kg}$, 梁的截面积 $S = 1.602 \times 10^{-4} \text{ m}^2$, 惯性矩 $I = 5.968 \times 10^{-9} \text{ m}^4$.

根据 (13) 式可以计算得到多振子声子晶体梁的带隙结构图, 见图 3. 与文献 [9] 相比, 在 0—800 Hz 内, 多出来一条带隙, 带隙更丰富, 选择适当的参数, 可以应用于呈倍频关系的减振降噪中; 第一带隙起始频率都是相同的, 为 309 Hz; 多振子第一、二带隙总宽度增加, 从带宽 110.3 Hz 增加到 299.8 Hz.

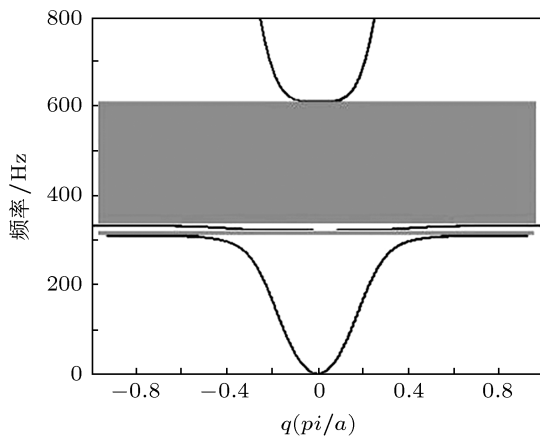


图3 多振子声子晶体梁的带隙结构图

2.3 基于有限元法的传递特性分析

在 (ANSYS) 里面建立如图 4 所示的多振子声子晶体梁有限元模型, 在左端加加速度激励, 右端

拾取响应, 可以得到图 5.

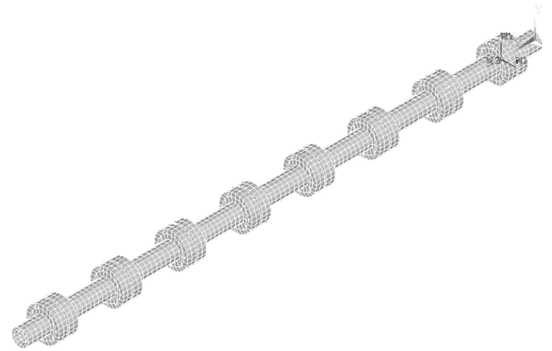


图4 多振子声子晶体梁有限元模型

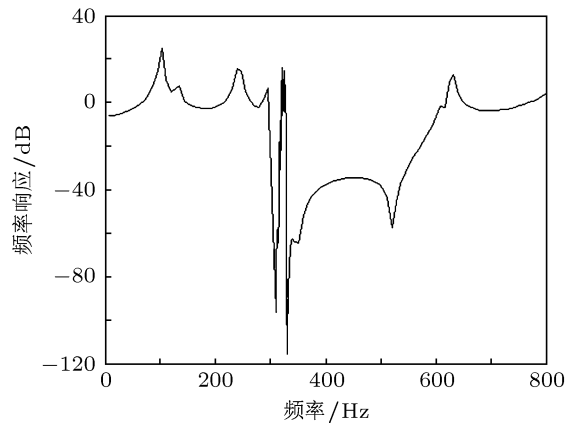


图5 多振子声子晶体梁频率响应图

可以看到在 309—320 Hz 和 331—609 Hz 两带隙频率范围内, 振动频率响应具有平均约 40 dB 的衰减, 这与无限能带结构结果符合较好.

3 多振子声子晶体梁的简化模型

3.1 起始频率简化模型

具有局域共振带隙的典型三维三组元声子晶体的第一带隙的起始频率由局域振子的平动振动谐振频率决定. 该共振模式体现为振子的整体某方向振动, 而相邻原胞内振子振动相位相反, 从而保持整体的动态平衡^[5].

图 6 和图 7 所示分别为多振子声子晶体梁第

—第二带隙起始频率的振型图.

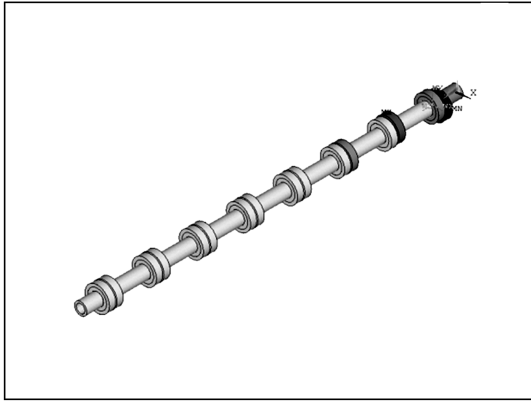


图 6 多振子声子晶体梁频率响应振型图 (309 Hz)

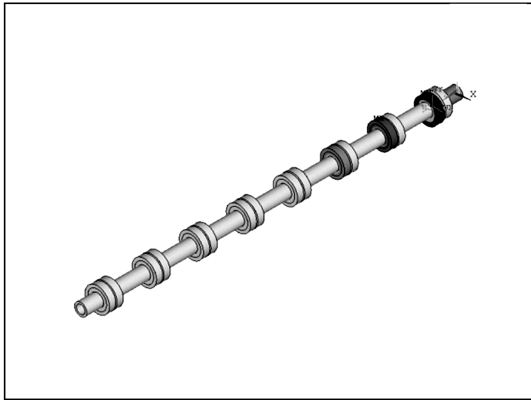


图 7 多振子声子晶体梁频率响应振型图 (331 Hz)

从图 6 和图 7 中振型可以得到如图 8 所示的简化模型.



图 8 带隙起始频率对应的简化模型

设 $\frac{k_1}{m_1} > \frac{k_2}{m_2}$, 得到

$$f_{11} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k_1}{m_1}}, f_{21} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k_2}{m_2}}, \quad (15)$$

其中 f_{11} 为第一带隙的起始频率, f_{21} 为第二带隙的起始频率.

下面分别采用传递矩阵法和简化模型计算多振子声子晶体梁的带隙起始频率. 图 9, 图 10 和图 11 分别给出了带隙起始频率随振子质量比、振

子刚度比和梁质量的变化规律.

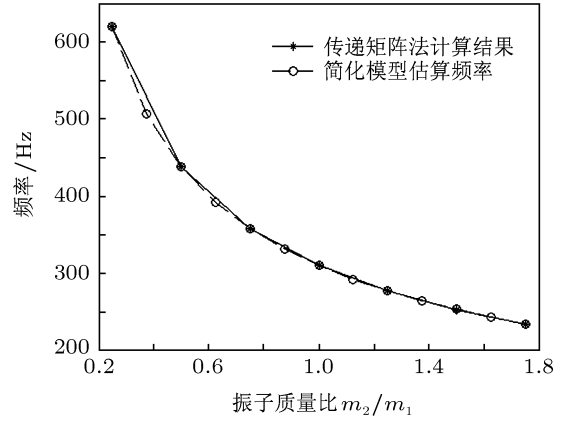


图 9 振子质量比对带隙起始频率影响及模型验证

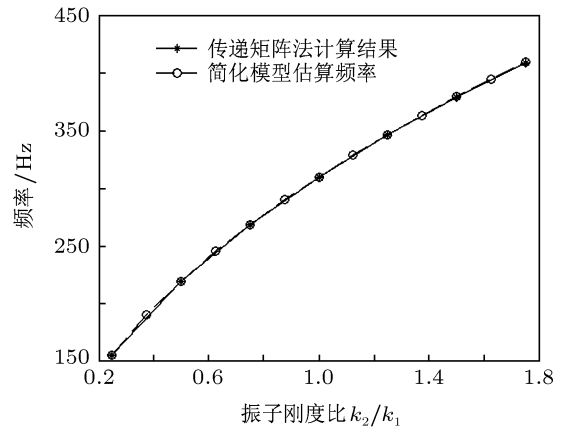


图 10 振子刚度比对带隙起始频率影响及模型验证

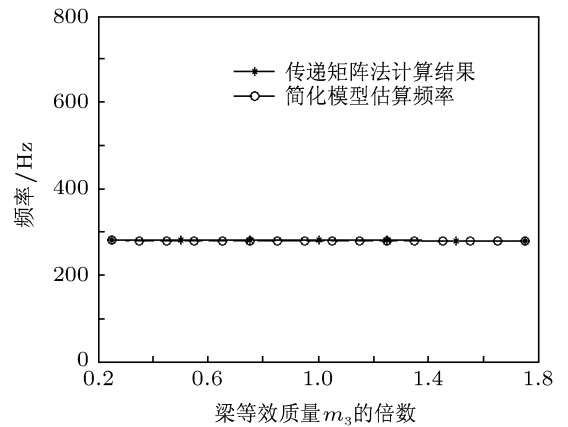


图 11 梁等效质量对带隙起始频率影响及模型验证

由图 9, 图 10 和图 11 可见, 简化模型估计频率和传递矩阵法计算结果基本吻合, 说明该简化模型的有效性.

3.2 截止频率简化模型

在单振子局域共振声子晶体中, 第一带隙的截止频率处, 振子质量和基体在橡胶包覆层的弹性连接下, 形成反相位共振, 声子晶体中所有原胞的振动相位相同, 达到动态平衡 [5].

而对于多振子局域共振声子晶体, 两个截止频率处表现为不同的振型. 在第一带隙截止频率处 (320 Hz), 表现为两个振子和基体在橡胶包覆层的弹性连接下, 形成反相位共振, 两振子分别在基体的两边共振, 如图 12 所示, 针对这种情况, 可以简化成如图 13 的模型. 在第二带隙截止频率处 (609 Hz), 表现为两个振子和基体在橡胶包覆层的弹性连接下, 形成反相位共振, 两振子只是在基体的一边共振, 如图 14 所示, 可以简化成如图 15 所示的简化模型.

虽然是两个模型, 但是可以得到统一的方程, 根据弹簧 k_1 和 k_3, k_2 和 k_4 串联可得:

$$\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_3} = \frac{1}{k_1}, \quad (16)$$

$$\frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_4} = \frac{1}{k_2}, \quad (17)$$

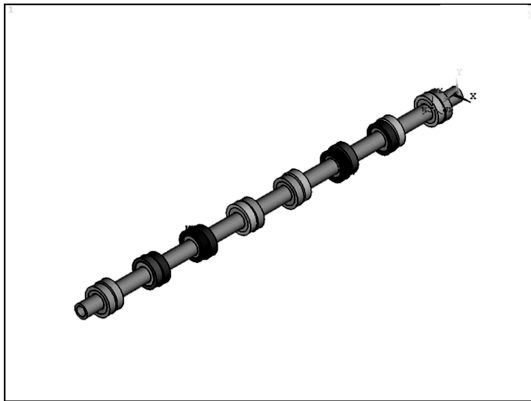


图 12 多振子声子晶体梁频率响应振型图 (320 Hz)

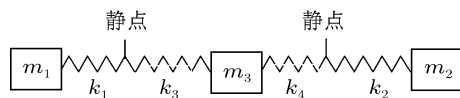


图 13 第一带隙截止频率简化模型

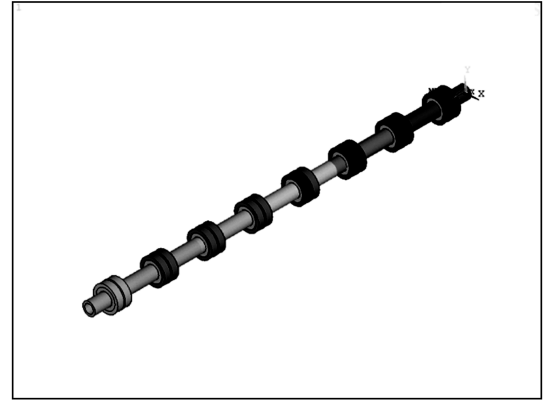


图 14 多振子声子晶体梁频率响应振型图 (609 Hz)

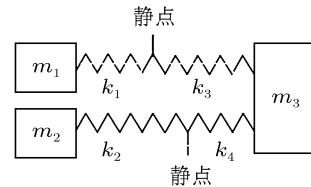


图 15 第二带隙截止频率简化模型

其中 k_1 为振子一等效刚度, k_2 为振子二等效刚度. 根据三个质量在同一频率下共振可得:

$$\frac{k_1}{m_1} = \frac{k_2}{m_2} = \frac{k_3 + k_4}{m_3}. \quad (18)$$

解方程组 (16), (17) 和 (18), 然后根据 $f = \sqrt{k_1/m_1}/2\pi$ 可得截止频率, 在 Maple 里解这个方程组得到两组隐含式的非零解, 设定之前数值算例的参数.

图 16, 图 17 和图 18 分别给出了多振子声子晶体梁的带隙截止频率随振子质量比、振子刚度比和梁质量的变化规律.

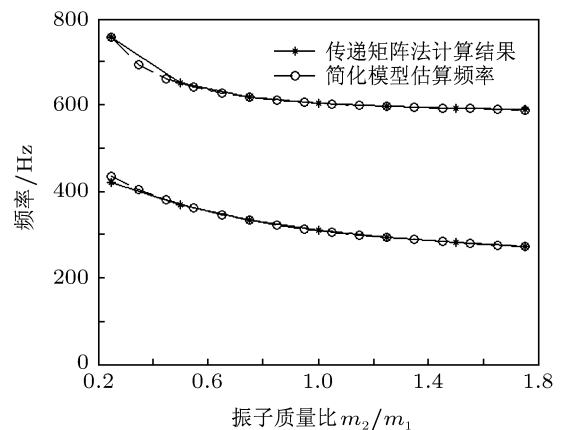


图 16 振子质量比对带隙截止频率影响及模型验证

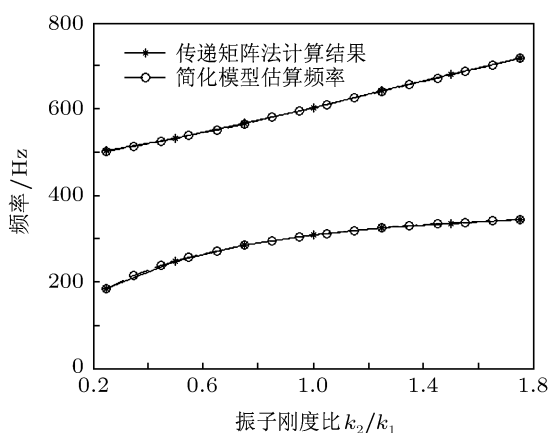


图 17 振子刚度比对带隙截止频率影响及模型验证

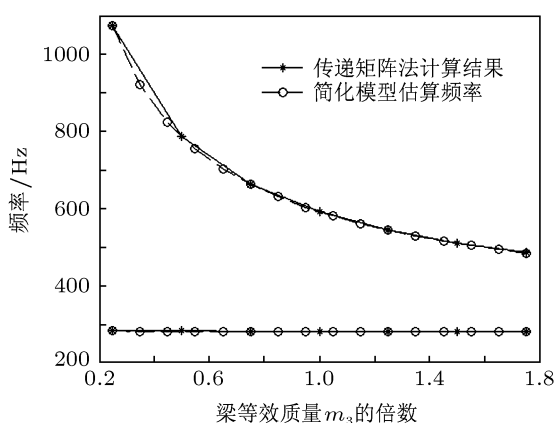


图 18 梁等效质量对带隙截止频率影响及模型验证

由图 16, 图 17 和图 18 可见, 简化模型估计频率和传递矩阵法计算结果基本吻合, 说明该简化模

型的有效性.

4 结论

采用传递矩阵法计算了无限周期的一维多振子声子晶体梁的弯曲振动带隙, 并通过有限元仿真对其有限周期结构的弯曲振动传输特性进行了研究, 最后探究了多振子声子晶体梁的简化模型, 主要结论如下.

1) 无限周期局域共振的多振子梁结构中存在弯曲振动带隙, 并与其有限周期结构的振动传输特性曲线相互对应, 即带隙频率范围内弯曲振动传播受到很大衰减.

2) 局域共振的多振子声子晶体梁较单振子梁相比, 有较丰富的带隙特性, 在低频内可获得较宽的带隙, 选择适当的参数, 可用于呈倍频关系的减振降噪应用中.

3) 分别采用简化的多振子声子晶体梁起始截止频率对应的模型, 得到近似的估算公式, 能较好地与实际相吻合. 这些近似处理有利于加深对声子晶体的局域共振带隙机理的深入理解, 同时可大大简化具有局域共振带隙的复杂声子晶体结构的设计工作.

4) 梁类结构是噪声及振动控制领域研究的主要对象之一, 局域共振多振子梁周期结构中丰富的低频弯曲振动带隙的存在对小尺寸、低频宽带隙声子晶体的研究将起到推动作用, 同时为梁类结构振动控制提供了一种新的技术途径.

- [1] Kushwaha M S, Halevi P, Dobrzynski L, Djafari-Rouhani B 1993 *Phys. Rev. Lett.* **71** 2022
- [2] Shen H J, Wen J H, Yu D L, Wen X S 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 8357 (in Chinese) [沈惠杰, 温激鸿, 郁殿龙, 温熙森 2009 物理学报 **58** 8357]
- [3] Cai L, Han X Y 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 5866 (in Chinese) [蔡力, 韩小云 2006 物理学报 **55** 5866]
- [4] Wen J H, Wang G, Liu Y Z, Yu D L 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 3384 (in Chinese) [温激鸿, 王刚, 刘耀宗, 郁殿龙 2004 物理学报 **53** 3384]
- [5] Wang G 2005 *Ph. D. Dissertation* (Changsha: National University of Defense Technology (in Chinese) [王刚 2005 博士学位论文 (长沙: 国防科技大学)]
- [6] Hirsekorn M 2004 *Appl. Phys. Lett.* **S4** 3364
- [7] Goffaux C, Sanchez-Dehesa J 2003 *Phys. Rev. B* **67** 144301
- [8] Yu D L 2005 *Ph. D. Dissertation* (Changsha: National University of Defense Technology (in Chinese) [郁殿龙 2005 (博士学位论文) (长沙: 国防科技大学)]
- [9] Wang G, Wen J H, Wen X S 2005 *Chin. J. Mech. Eng.* **41** 107 (in Chinese) [王刚, 温激鸿, 温熙森 2005 机械工程学报 **41** 107]
- [10] Yu D L, Liu Y Z, Wang G, Zhao H G, Qiu J 2006 *J. Appl. Phys.* **100** 124901
- [11] Zhao C S, Zhu S J 2004 *Chin. J. Mech. Eng.* **15** 962 (in Chinese) [赵存生, 朱石坚 2004 机械工程学报 **15** 962]

Locally resonant elastic wave band gaps in flexural vibration of multi-oscillators beam*

Wen Qi-Hua Zuo Shu-Guang[†] Wei Huan

(New Energy Vehicle Engineering Centre, Tongji University, Shanghai 201804, China)

(Received 26 April 2011; revised manuscript received 21 June 2011)

Abstract

The flexural vibration behavior of elastic wave across a slender beam with locally resonant multi-oscillators structure is studied by using the transfer-matrix method and the finite element method. A simplified model is proposed, and the formulas of start and end frequencies of band gap are deduced. The more abundant and wider flexural elastic wave band gaps are found in this locally resonant multi-oscillator beam than in one oscillator beam, which can be used in the reduction of multiple-frequency vibration and noise. The frequency response of vibration in the band gap frequency range has obvious attenuation. The results of simplified model are in good agreement with results from the theory model. The research project will provide a new way for vibration reduction of beam structure.

Keywords: phononic crystals, multi-oscillators beam, locally resonant, vibration band gap

PACS: 43.40.+s, 63.20.-e

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 51075302).

[†] E-mail: sgzuo@tongji.edu.cn