

## 一种有效的提高复杂网络同步能力的自适应方法\*

朱廷祥 吴晔<sup>†</sup> 肖井华

1) (信息光子学与光通信国家重点实验室(筹)(北京邮电大学), 北京 100876)

2) (北京邮电大学理学院, 北京 100876)

(2011年5月12日收到; 2011年6月21日收到修改稿)

本文提出了一种根据节点状态来调节网络中边权重的自适应方法(MDMF)来提高网络的同步能力,总结了网络规模与网络平均速度对同步能力的影响. 研究发现,通过这种自适应方法,得到网络的同步能力与网络规模成幂率关系. 在相同网络规模下,此方法能使网络的同步能力高于无权网络几个数量级. 当网络规模越大时,提高同步能力越高效.

**关键词:** 平均场, 网络同步能力, 特征值, 无标度网络

**PACS:** 05.45.-a, 05.45.Xt

## 1 引言

自然界中存在的大量复杂系统可以通过形形色色的网络加以描述例如, 神经系统可以看作大量神经细胞通过神经纤维相互连接形成的网络; 计算机网络可以看作是自主工作的计算机通过通信介质如光缆、双绞线、同轴电缆等相互连接形成的网络; 类似的还有电力网络、社会关系网络、交通网络等等<sup>[1-3]</sup> 对网络的研究最开始于数学家通过图论进行研究, 图论通过用某些规则的拓扑结构来模拟真实的网络. 对于物理学家而言, 研究复杂网络的终极目标之一是理解网络拓扑结构对动力学过程的影响<sup>[2]</sup>, 包括传染病如何通过人与人之间的接触传播, 信息包如何在计算机互联网上有效传输, 大型电力网络的局部故障如何通过级联放大最终影响整个网络, 等等<sup>[4-7]</sup>. 在这些网络动力学的研究中, 目前最受关注的是网络上动力系统的同步问题.

同步是自然界中常见的集体行为现象, 人们已观测到的同步现象包括夏日夜晚青蛙的齐鸣、萤火虫的同步发光, 心肌细胞和大脑神经网络的同步<sup>[8]</sup>, 剧场中观众鼓掌频率的逐渐同步<sup>[9]</sup>. 同步在激光系统、超导材料和通信系统等领域中起着重要的作用<sup>[10-12]</sup>. 研究同步有助于让我们更清晰地

认识复杂网络中大量节点的集体行为的动力学过程, 以及预防一些同步的危害. 最近几年, 关于复杂网络的研究突飞猛进, 人们对复杂网络的理解更加准确深入, 对于网络上的动力学行为的研究也更为系统具体, 因此对复杂网络上动力学系统同步的研究也取得了长足的发展. 随着研究人员对网络结构与网络同步能力之间关系理解得深入, 已经有研究人员提出了一些提高网络同步能力的方法. 这里, 提高网络同步能力包含两方面的含义: 一是使原本在某一网络上不能同步的动力学系统能够同步起来, 或者使同步变得容易; 二是在保证同步的基础上提高动力学系统的同步稳定性. 本文的主要工作就是通过提出的改进方法来提高无标度网络的同步能力.

## 2 网络结构与同步能力的关系

Nishikawa 等人<sup>[13]</sup> 最早系统地探讨了网络的各个结构特征量与网络同步能力之间的关系. 他们以全同的混沌系统作为节点上的动力学系统, 以拉普拉斯矩阵作为耦合矩阵, 以耦合矩阵的特征值比  $R$  描述网络的同步能力. Hong 等人<sup>[14]</sup> 通过进一步研究认为网络的最大介数表征了网络的同步能力. 赵明等人<sup>[15]</sup> 在总结了大量研究人员关于网

\* 国家重点基础研究发展计划(批准号: 2010CB923200)和北京邮电大学青年科研创新计划专项资助的课题.

<sup>†</sup> E-mail: wuye@bupt.edu.cn

络同步能力的研究得出: 保证网络的其他结构特征量不变, 单独减小网络的平均距离或减小网络的簇系数或降低网络的度分布的不均匀性都可以提高网络的同步能力. 但只有在保证网络同时具有小的平均距离和均匀的度分布时, 网络才会具有强的同步能力. 而对于大多数情况, 网络的拓扑结构是不能改变或者改变网络拓扑的代价很高, 这是就需要用别的方式来提高网络的同步能力.

那么对于给定拓扑结构的网络, 怎样才能提高网络的同步能力呢? 其中一种有效的方法是根据自适应规则来调节耦合矩阵 [16-18]. 在以往的研究中, Wu 等人提出过一种很有效的自适应方法即 Wu-Chen 方法 [17] 来改变耦合矩阵以提高网络同步能力. 对于  $N$  个节点网络, 其耦合动力学方程可写为

$$\dot{x}_i = F(x_i) + c \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N G_{ij}(H(x_j) - H(x_i)), \quad 1 \leq i \leq N, \quad (1)$$

这里  $x_i$  是节点的状态,  $c$  是全局耦合强度,  $F(x_i)$  是节点的动力学函数,  $H$  是节点的耦合输出函数,  $G = (G_{ij})$  是网络的耦合矩阵.  $G$  存在  $N$  个复特征值  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  并且满足  $0 = \lambda_1 > \text{Re}(\lambda_2) > \text{Re}(\lambda_3) > \dots > \text{Re}(\lambda_n)$  [19],  $\text{Re}(\lambda)$  为特征值实部. 系统主稳定方程的最大 Lyapunov 指数 (LLE) 边界形成系统的主稳定区域. 当耦合矩阵的特征值都处于主稳定区域内, 网络的同步能力可以用特征值比值  $R = \text{Re}(\lambda_n)/\text{Re}(\lambda_2)$  来表征.  $R$  越小, 网络的同步能力越强 [20]. 本文提出一种新的耦合矩阵的生成机理, 通过对比不同机理下生成的耦合矩阵的特征值比值, 可以知道这种方式能高效的提高网络的同步能力. 特别是在网络规模很大的情况下, 能显著提高同步能力.

### 3 模型

考虑包含  $N$  个节点网络, 动力学方程如 (1) 式. 设耦合矩阵为  $G_{ij} = A_{ij}W_{ij}$ , 其中  $A = (A_{ij})$  是网络的连接矩阵,  $W_{ij}$  是节点  $i$  到节点  $j$  的边的权重,  $G_{ii} = -\sum_{j \in K_i} A_{ij}W_{ij}$ ,  $K_i$  是节点  $i$  的邻居个数. 当网络为无权重网络时, 对于所有节点都有  $W_{ij} = 1$ . 接下来提出新的自适应规则来改变网络的耦合矩阵. 通过对同步过程中振子时序图的分析 and 总结, 得出了节点的同步是由网络的邻居的共同影响导致的. 节点的同步总是与节点所有邻居的平均场紧

密相关, 这样就可以猜测当节点与平均场中误差较小振子的耦合强度更大时, 网络更容易达到同步, 并且同步能力能更明显的提升. 而以往的 Wu-Chen 方法 [17] 并没有考虑节点邻居平均场的影响, 只是通过改变节点与邻居中误差最大的节点的权重来改变耦合矩阵, 使网络达到同步.

为了最优化生成高同步能力的耦合矩阵, 初始设定网络所有边的权重为零:  $W_{ij} = 0$ , 网络同步过程中对每个节点的某一条边每隔一个时间段  $T$  以自适应规则增加一个小权重  $\varepsilon^n$ . 这里选取边的规则定义为最小平均场误差法 (min deviation of mean field, MDMF).

考虑在某个时刻节点  $i$  的邻居的平均场记为

$$\bar{e}_i = \frac{1}{K_i} \sum_{j=1, K_i} x_j, \quad (2)$$

这里  $K_i$  是  $i$  节点邻居数, 则对于  $i$  节点的邻居在一个时间步内与平均场的误差定义为

$$E_{j \in K_i} = \int_{t_{n-1}}^{t_n} |x_j - \bar{e}_i| dt. \quad (3)$$

比较邻居节点与平均场误差, 取最小误差节点的编号记为  $k_{\min}^n$ . 对于不同时刻, 则边权重变为

$$\begin{aligned} W_{ik_{\min}^n}^{n+1} &= W_{ik_{\min}^n}^n + \varepsilon^n; \\ W_{ik}^{n+1} &= W_{ik}^n, \quad k \neq k_{\min}^n, \end{aligned} \quad (4)$$

这里  $\varepsilon^n$  是一个与  $n$  有关的小量.  $W_{ik}^n$  是  $i$  与  $k$  节点间在  $[t_{n-1}, t_n)$  之间的边权重. 这样就能在同步过程中每隔  $T$  时间增加节点与它的邻居中最接近平均场的邻居的权重, 当网络达到同步状态后, 就得到了系统的耦合矩阵, 并且计算耦合矩阵特征值比值  $R$  来表征网络的同步能力.

我们使用 Rössler 振子为例, 网络结构为  $N$  个节点, 平均度为  $m$  的 BA 无标度网络. 节点的状态为  $X_i = (x_i, y_i, z_i)$ , 对应 (1) 式中的各项, 取动力学方程为

$$F(X_i) = [-a(y_i + z_i), ax_i + by_i, z_i(x_i - c) + d]. \quad (5)$$

取  $a = 0.97, b = 0.15, c = 8.5, d = 0.4$ , 在这套参数下, Rössler 振子处于混沌区, 每个节点的耦合函数

$$\text{为 } H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{ 即节点之间只通过 } x \text{ 方向耦合.}$$

定义网络的平均同步误差为  $E = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \|X_i - \bar{X}\|$ , 这里  $\bar{X} = (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$  是所有振子的平均值. 在我们的模型中取初始边权重为零, 时间步长  $T = 1$ , 即每

隔  $T$  增加相应边的权重, 每个时间步增加的边权重为  $\varepsilon^n = \varepsilon e^{-n/n_0}$ , 则 (4) 式就变成

$$\begin{aligned} W_{ik_{\min}}^{n+1} &= W_{ik_{\min}}^n + \varepsilon e^{-n/n_0}, \\ W_{ik}^{n+1} &= W_{ik}^n, \quad k \neq k_{\min}. \end{aligned} \quad (6)$$

这里引入增加边权重与  $n$  相关是为了在同步过程中不至于使边权重太大使振子在同步过程中溢出. 当  $n \rightarrow \infty$  时,  $\varepsilon^n \rightarrow 0$ , 取  $\varepsilon = 0.001, n_0 = 1200$ . 这里时间步长  $T, \varepsilon, n_0$  的取值在很大一段范围内对最终的结果没有影响. 数值模拟系统的耦合动力学方程 (1) 的变化. 当同步误差  $E$  小于  $1 \times 10^{-5}$  时, 认定网络达到同步. 此时的耦合矩阵为最终耦合矩阵, 并且求出特征值比值  $R$ . 为了比较 MDMF 方法提高网络同步能力的效果, 本文对比了 Wu-Chen<sup>[17]</sup> 方法的结果.

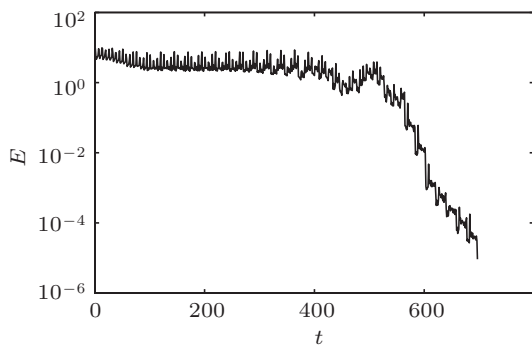


图 1 BA 网络  $m = 5, N = 500$  同步误差  $E$  与同步时间  $t$  的关系

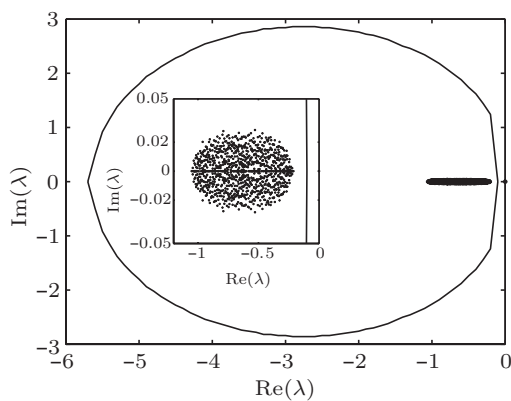


图 2 MDMF 方法下耦合矩阵的特征值分布 (其中实线围成的区域为系统的主稳定区域, 系统参数为 BA 网络下  $N = 1000$ , 平均边数  $M = 4$ . 纵坐标为特征值虚部, 横坐标为特征值实部. 图中插图为特征值的局部放大)

### 4 数值模拟结果

考虑 BA 无标度网络平均度  $m = 5$  情况下, 用 MDMF 来构造网络耦合矩阵.

图 1 是在  $m = 5, N = 500$  情况下, 网络的平均同步误差随时间的变化曲线. 从图 1 中可以看出刚开始时间步少时, 网络的耦合强度不大, 系统的平均同步误差变化不大, 当时间步再增长时, 系统的平均耦合强度达到一个阈值, 平均同步误差急速下降, 系统逐渐走向同步状态.

图 2 是用 MDMF 方法下生成的耦合矩阵特征值的分布. 其中实线是 Rössler 振子主稳定函数提供的在复平面上最大 Lyapunov 指数 (LLE) 区域. 图中可以看出, 特征值全都位于主稳定区域内, 通过局部放大可以知道  $\max |\text{Im}(\lambda)| \ll \max |\text{Re}(\lambda)|$ . 这样  $R = \text{Re}(\lambda_n)/\text{Re}(\lambda_2)$  能准确的表征网络的同步能力.

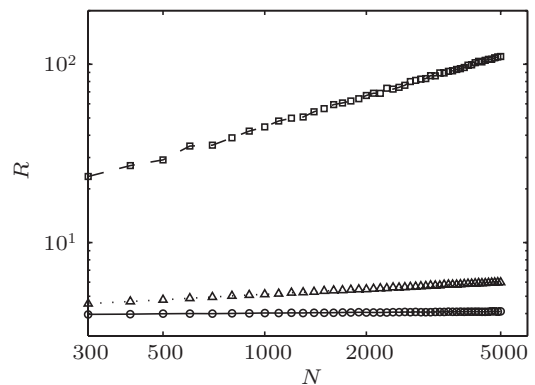


图 3 不同生成方式下得到的网络耦合矩阵的特征值比值  $R$  随着网络规模  $N$  的变化曲线 (实线 (○) 代表 MDMF, 点线 (△) 代表 Wu-Chen<sup>[17]</sup> 方法, 虚线 (□) 代表无权重网络的特征值比值随网络规模的变化)

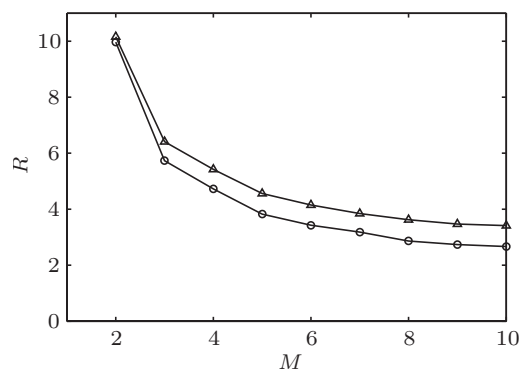


图 4 在相同网络规模下, 不同平均度条件下网络同步能力的变化曲线 (这里横坐标表示网络的平均边数  $M$ , 对应网络的平均度为  $2M$ , 纵坐标为特征值比值  $R$ , 对应网络的同步能力. 实线 (○) 为 MDMF, 虚线 (△) 为 Wu-Chen 方法)

图 3 表示不同网络规模下, 不同方式得到的同步耦合矩阵特征值的变化规律. 这里是用生成 200 个规模相同的网络做同步模拟后得到的平均特征值比值. 图中实线 (○) 是 MDMF, 点线 (△) 是 Wu-Chen<sup>[17]</sup> 方法, 虚线 (□) 是无权重 BA 网络的特征值

比值的变化曲线. 从图中可以看出随着网络规模的增大时, 耦合矩阵的特征值比值也随之增加. 同时, 在相同网络规模下, MDMF 的同步能力优于 Wu-Chen 方法, 同时远远优于无权重 BA 无标度网络的同步能力. 同时, 这种方法在网络规模变大时, 网络耦合矩阵的特征值保持在一个较小的值, 并且随着网络规模的增大变化不大, 即网络的同步能力很强. 图中可以看出不同条件下特征值变化符合幂率曲线, 特征值比值变化规律符合  $R \propto N^\alpha$ . 拟合出图中曲线的特征值比值幂指数. 对于无权重网络的幂指数  $\alpha_1 = 0.55 \pm 0.020$ , 与文献 [17] 所得结果一致, 对于 Wu-Chen 方法的幂指数  $\alpha_2 = 0.10 \pm 0.005$ , 对于 MDMF 的幂指数有  $\alpha_3 = 0.015 \pm 0.001$ . 当网络规模  $N = 10^6$  时, 图中三种方式下的特征值比值为  $R_1 = 2.000 \times 10^3$ ,  $R_2 = 10.21$ ,  $R_3 = 4.45$ , 可以看出 MDMF 在网络规模很大时, 特征值比值依然很小, 网络同步能力远优于另外两种方式.

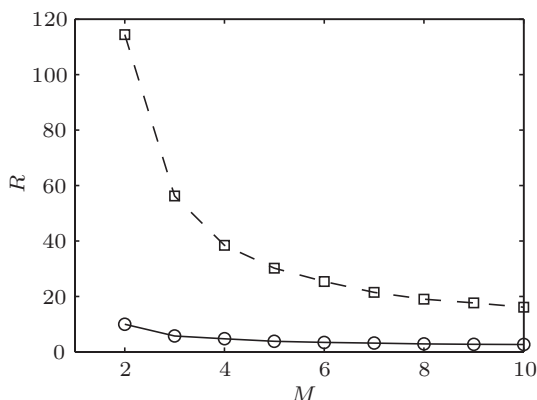


图 5 在相同网络规模下, MDMF 与无权重 BA 网络同步能力的比较 (这里网络规模为  $N = 500$ , 横坐标代表网络的每个节点平均边数, 对应网络的平均度为  $2M$ , 纵坐标为特征值比值, 对应网络的同步能力)

图 4 比较了在不同平均度条件下不同的方式下特征值比值的情况, 网络参数为  $N = 500$  的无标度网络, 其中虚线 ( $\Delta$ ) 为 Wu-Chen 方法下得到的特征值比值, 实线 ( $\circ$ ) 为 MDMF 得到的特征值比值, 由图可以看出, 两种方式下网络的同步能力都随着平均度的增加而提高, 同时 MDMF 在相同平均度下同步能力优于 Wu-Chen 方法.

图 5 对比了不同方式下网络同步能力与网络平均度的关系, 其中虚线 ( $\square$ ) 为无权重网络, 实线 ( $\circ$ ) 为 MDMF. 图中可以看出 MDMF 下的网络同步能力远优于无权重网络, 并且都随着网络平均度的增加而提高.

## 5 结论

在这篇文章中, 提出了一种新的构造无标度网络的耦合矩阵的方式 (MDMF), 可以高效的提高网络的同步能力. 比较了不同网络规模, 不同的平均度, 不同构造方式下网络的同步能力. 数值模拟出了不同方式下网络同步能力与网络规模成幂指数关系, 拟合出不同方式下的幂指数. 比较这三种方式下的幂指数, 得出 MDMF 生成的网络耦合矩阵特征值比值增长缓慢, 也即在网络规模很大时, 网络的同步能力也能保持良好, 所以 MDMF 在大型网络的同步中有很大的优势. 同时也比较了在 BA 网络规模一定的情况下, 不同方式下网络同步能力与平均度的关系, 同样得出 MDMF 是一种高效的方式. 这样对于我们构建网络高同步能力的耦合矩阵给出了一种很有效的方法.

- [1] Shao J, Havlin S, Stanley H E 2009 *Phys. Rev. Lett.* **103** 018701
- [2] Newman M E J, Strogatz S H, Watts D J 2001 *Phys. Rev. E* **64** 026118
- [3] Moreira A A, Andrade J S, Herrmann H J, Indekeu J O 2009 *Phys. Rev. Lett.* **102** 018701
- [4] Hooyberghs H, VanSchaeybroeck B, Moreira A A, Andrade J S, Herrmann H J 2010 *Phys. Rev. E* **81** 011102
- [5] Zhou T, Wang B H 2005 *Chin. Phys. Lett.* **22** 1072
- [6] Li R H, Chen W S, Li S 2010 *Chin. Phys. B* **19** 010508
- [7] Sergey V, Buldyrev, Parshani R, Paul G, Stanley H E, Havlin S 2010 *Nature*(in London) **464** 1025
- [8] Sun Y Z, Tang Y F 2010 *Chin. Phys. B* **19** 020506
- [9] Barrat A, Barthélemy M, Vespignani A 2009 *Cambridge Univ Press* **24** 125
- [10] Achlioptas D, D'Souza RM, Spencer J 2009 *Science* **323** 1453
- [11] Li X J, Xu Z Y, Xie Q C 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 1532 [李小娟, 徐振源, 谢青春 2010 物理学报 **59** 1532]
- [12] Wang G Z, Cao Y J, Bao Z J, Han Z X 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 3597 (in Chinese)[王光增, 曹一家, 包哲静, 韩祯祥 2009 物理学报 **58** 3597]
- [13] Nishikawa T, Motter A E, Lai Y C 2003 *Phys. Rev. Lett.* **91** 14101
- [14] Hong H, Kim B J, Choi M Y 2004 *Phys. Rev. E* **69** 067105
- [15] [周涛, 柏文洁, 汪秉宏 2005 物理 **34** 31]
- [16] [汪小帆, 李翔, 陈关荣 2006 复杂网络理论及其应用 (北京: 清华大学出版社) 第 194—221 页]
- [17] Wu Y, Shang Y, Chen M Y, Zhou C S, Kurths J 2008 *chaos* **18** 037111

[18] Barahona M, Pecora L M 2002 *Phys. Rev. Lett.* **89** 054101

[20] Chavez M, Huang D, Amann A, Boccaletti S 2005 *Phys. Rev.*

[19] Nishikawa T, Motter A E, Lai Y, Hoppensteadt F C 2003 *Phys. Rev. Lett.* **91** 014101

*Lett.* **94** 218701

# An efficient adaptive method of improving the synchronization of complex networks\*

Zhu Ting-Xiang Wu-Ye<sup>†</sup> Xiao Jing-Hua

(State Key Lab of Information Photonics and Optical Communications (Beijing University of Posts and Telecommunications), Beijing 100876, China)

(School of Science, Beijing University of Posts and Telecommunications, Beijing 100876, China)

(Received 12 May 2011; revised manuscript received 21 June 2011)

## Abstract

In this paper, we present an adaptive method to improve the synchronization of complex networks. We summarize the effects of the average degree of network and the size of network on the synchronization. By this adaptive method, We obtain a power law relationship between the synchronous capacity and the size of network. At the same network size, this method can enhance the network synchronous capacity several orders of magnitude higher than that of unweighted network. When the network size is larger, it is more efficient to improve synchronous capacity.

**Keywords:** mean field, network synchronization, eigenvalue, scale-free network

**PACS:** 05.45.-a, 05.45.Xt

---

\* Project supported by the National Basic Research Program of China (Grand No. 2010CB923200) and the Beijing University of Posts and Telecommunications Special Innovative Projects of Young Researchers.

<sup>†</sup> E-mail: wuye@bupt.edu.cn