

一个新的超混沌系统及其自适应追踪控制*

李春来¹⁾²⁾ 禹思敏^{1)†}

1) (广东工业大学自动化学院, 广州 510006)

2) (湖南理工学院物理与电子学院, 岳阳 414006)

(2011年4月24日收到; 2011年6月14日收到修改稿)

通过在一个三维混沌系统中加入状态反馈控制器, 构造出一个新的四维超混沌系统. 分析表明, 随着不同参数变化该系统呈现周期、复杂周期、准周期、混沌及超混沌运动. 同时设计出模拟电子电路对该超混沌系统进行了实验验证. 最后, 设计了一个自适应追踪控制器, 实现了其对各种不同参考信号的单变量追踪控制.

关键词: 超混沌系统, Lyapunov 指数, 混沌电路, 追踪控制

PACS: 05.45.Ac, 05.45.Xt, 05.45.Pq

1 引言

自 1963 年 Lorenz 发现第一个混沌系统^[1]以来, 人们就不断地寻找新的混沌系统, 并发现了许多新的混沌系统, 如 Chua 系统^[2]、Chen 系统^[3]、Lü 系统^[4]. 混沌系统具有一个正的 Lyapunov 指数, 相轨迹在一个方向上分离, 其动力学行为较为复杂, 可用于保密通信、图像加密等数字信息领域. 与混沌系统相比, 超混沌系统具有两个甚至两个以上正的 Lyapunov 指数, 相轨迹在多方向上进行分离, 其动力学行为更为复杂. 超混沌信号复杂的动力学行为可以提高混沌保密通信和图像信息加密的安全性, 具有更高的实用价值. 因此, 研究如何生产新的超混沌系统, 已引起科研工作者极大的关注, 并取得了许多成果^[5-9]. 目前, 以现有三维自治混沌系统为基础设计超混沌系统, 还没有系统的方法.

混沌控制和同步的研究是非线性科学中的热门课题之一, 在军事通讯、信息科学和工程等领域具有巨大的应用前景. 在混沌控制研究中, 追踪问题即通过设计适当的控制器使受控系统的输出信号跟踪给定的参考信号, 更具一般性. 特别地, 如果参考信号由混沌系统产生, 追踪控制便演化成驱动与响应混沌系统的同步. 许多学者在这方面做了大量的研究工作. 然而目前这些追踪控制的研究中,

控制器数目较多 (一般与驱动系统维数相同), 且控制器较为复杂.

最近, Yang 等发现了一个新的三维混沌系统. 从方程形式上看, 此混沌系统类似于 Lorenz, Lü 和 Chen 系统, 但它们并不拓扑等价^[10]. 本文在此混沌系统中加入状态反馈控制器, 构造出一个新的四维自治超混沌系统, 并对系统的基本动力学行为进行了深入的研究, 包括功率谱图、Poincare 截面图、Lyapunov 指数谱、分岔图等. 分析表明, 新的四维系统随着不同参数变化呈现周期、复杂周期、准周期、混沌及超混沌运动. 超混沌运动的可调参数范围较大, 便于电路实现. 设计出的模拟电子电路进一步验证了超混沌吸引子的存在, 且实验结果与数值分析符合. 最后, 通过构造一个新的 Lyapunov 函数, 设计了一个自适应追踪控制器, 实现了该超混沌系统对各种不同参考信号的单变量追踪控制, 包括对正弦周期信号的追踪控制、自同步和不同阶异结构系统的广义同步.

2 新超混沌系统模型

三维混沌系统的状态方程为^[10]

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= a(x_2 - x_1), \\ \dot{x}_2 &= cx_1 - x_1x_3, \\ \dot{x}_3 &= -bx_3 + x_1x_2, \end{aligned} \quad (1)$$

* 国家自然科学基金 (批准号: 60572073, 60871025) 和广东省自然科学基金 (批准号: 8151009001000060, 8351009001000002) 资助的课题.

† E-mail: lichunlai33@tom.com

其中 $a = 35, b = 3, c = 35$. 系统有三个不稳定平衡点, 分别为 $O(0, 0, 0), P_+(\sqrt{105}, \sqrt{105}, 35), P_-(-\sqrt{105}, -\sqrt{105}, 35)$.

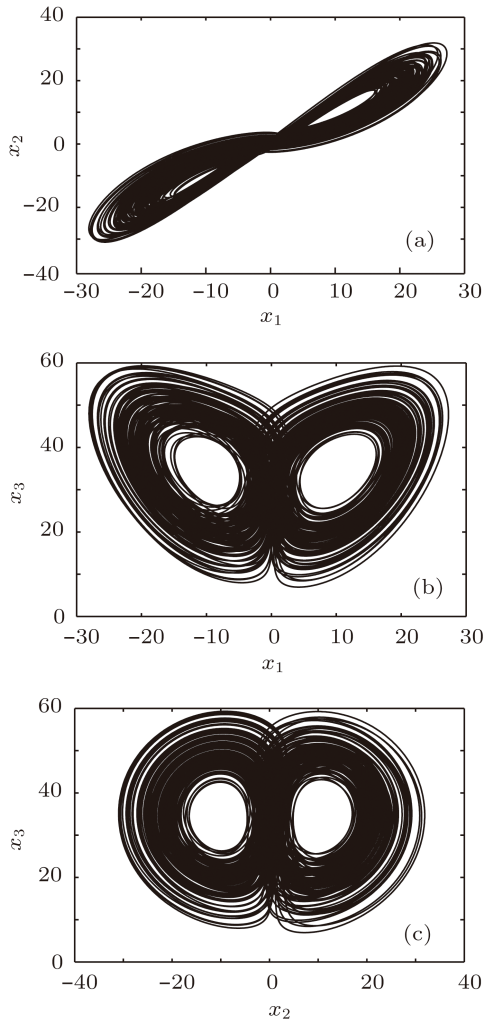


图 1 超混沌系统的相图 (a) x_1-x_2 平面; (b) x_1-x_3 平面; (c) x_2-x_3 平面

在系统 (1) 中第一、第二、第三个方程中分别施加控制器 k_1x_4, k_2x_4, k_3x_4 , 并设 $\dot{x}_4 = -dx_1$, 可构造出如下四阶自治系统:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= a(x_2 - x_1) + k_1x_4, \\ \dot{x}_2 &= cx_1 - x_1x_3 + k_2x_4, \\ \dot{x}_3 &= -bx_3 + x_1x_2 + k_3x_4, \\ \dot{x}_4 &= -dx_1. \end{aligned} \quad (2)$$

系统 (2) 的维数为 4, 且含有 2 个非线性乘积项, 满足了产生超混沌的必要条件. 当参数的取值为 $a = 35, b = 3, c = 35, k_1 = 1, k_2 = 0.2, k_3 = 0.3, d = 5$, 系统的 Lyapunov 指数为 $LE_1 = 0.5, LE_2 = 0.2117, LE_3 = 0, LE_4 = -38.7068$, 此时系统呈现出超混沌行为. 超混沌吸引子的数值仿真结果如图 1 所示.

3 新超混沌系统基本特性

3.1 耗散性和吸引子的存在性

对于系统 (2), 有

$$\begin{aligned} \nabla V &= \frac{\partial \dot{x}_1}{x_1} + \frac{\partial \dot{x}_2}{x_2} + \frac{\partial \dot{x}_3}{x_3} + \frac{\partial \dot{x}_4}{x_4} \\ &= -a - b, \end{aligned} \quad (3)$$

当 $a = 35, b = 3, a + b = 38 > 0$, 系统 (2) 为耗散系统, 且以指数形式 e^{-38t} 收敛. 意味着当 $t \rightarrow \infty$ 时, 包含系统轨线的每个小的体积元以指数率 -38 收缩到 0, 所有系统的轨线会最终被限制在体积为 0 的一个集合上, 并且它渐近地被固定在一个吸引子上, 由此表明了吸引子的存在性.

3.2 平衡点及其稳定性

令系统 (2) 右边等于零, 容易得到系统 (2) 只有一个平衡点 $O(0, 0, 0)$. 在平衡点 O 处线性化系统 (2), 得其 Jacobian 矩阵

$$J = \begin{bmatrix} -a & a & 0 & k_1 \\ c & 0 & 0 & k_2 \\ 0 & 0 & -b & k_3 \\ -d & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (4)$$

由 $|\lambda I - J| = 0$, 且取参数 $a = 35, b = 3, c = 35, k_1 = 1, k_2 = 0.2, k_3 = 0.3, d = 5$, 得对应于平衡点 O 的四个特征值 $\lambda_1 = -3, \lambda_2 = -56.5752, \lambda_3 = 21.5465, \lambda_4 = 0.0287$. 其中 λ_1, λ_2 为负的实根, λ_3, λ_4 为正的实根, 因此平衡点 O 为不稳定的鞍点.

3.3 连续功率谱与 Poincare 截面图

我们知道, 周期信号的功率谱为离散谱, 非周期信号功率谱为连续谱. 而混沌信号是非周期信号, 故为连续谱. 这里以变量 x_1 为例给出系统 (2) 的功率谱, 如图 2(a) 所示. 可以看出吸引子是非周期的, 且 x_1 的功率谱表现出连续的宽带特征. 由于在混沌区域内存在不稳定的极限环, 混沌系统的功率谱除了有明显的噪声外, 还有访问周期轨道时出现的峰值谱线.

为了更清晰地观察出系统的动力学行为, 选择 $x_1 = 0$ 平面作为截面, 图 2(b) 给出了系统在此截面上的 Poincare 映像图. 由图可以看出, 截面上有一些成片的具有分形结构的密集点, 且吸引子的叶片清晰可见, 进一步说明了此时系统是处于混沌态的.

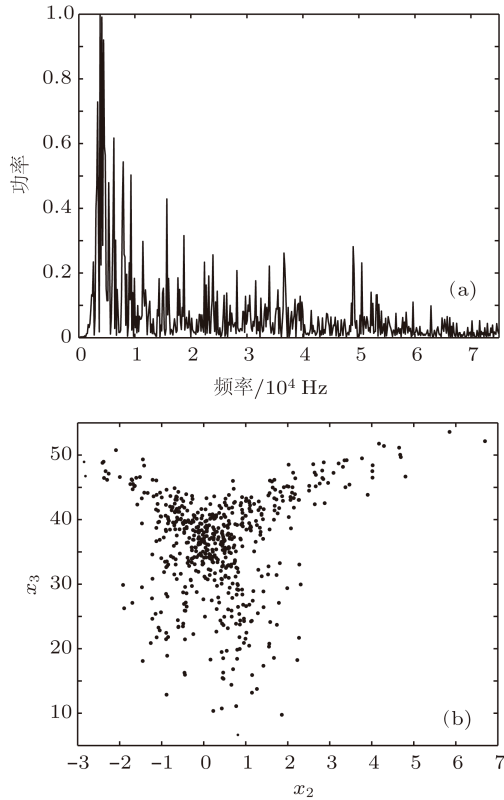


图2 系统(2)的连续功率谱与 Poincaré 截面图 (a) 连续功率谱; (b) Poincaré 截面图

3.4 系统参数的影响

下面我们分析随着参数的改变, 系统的动力学行为的变化情况. 从系统的 Lyapunov 指数谱和分岔图可直观的分析出各个参数变化时, 系统运动状态的变化情况.

1) 固定参数 $a = 35, b = 3, c = 35, k_1 = 1, k_2 = 0.2, k_3 = 0.3$, 改变参数 d . 当 $d \in [1, 100]$, 系统的 Lyapunov 指数谱和分岔图如图 3 所示. 由图 3 可知, 当 $d \in [1, 25]$, 有两个正的 Lyapunov 指数, 系统处于超混沌状态; 当 $d \in [25, 32]$, 只有一个正的 Lyapunov 指数, 系统处于混沌状态; 当 $d \in [32, 36]$, 存在两个正的 Lyapunov 指数, 系统再次进入超混沌状态; 当 $d \in [36, 38]$, 存在两个零值和连个负的 Lyapunov 指数, 系统表现为准周期的运动形式; 当 $d \in [38, 100]$, 系统的最大 Lyapunov 指数为零, 系统表现为周期运动形式. 几个典型参数值处新系统的相轨迹如图 4 所示.

2) 固定参数 $a = 35, b = 3, k_1 = 1, k_2 = 0.2, k_3 = 0.3, d = 5$, 改变参数 c . 系统的 Lyapunov 指数谱和分岔图如图 5 所示. 由图 5 可知, 当 $c \in [0, 32]$, 系统的最大 Lyapunov 指数为零, 系统处于复杂的周期运动状态; 当 $c \in [32, 70]$, 有两个正的 Lyapunov 指数, 系统处于超混沌状态. 图 6 是取不同参

数 c 值时系统的复杂周期轨道.

4 超混沌系统的电路实验

混沌或超混沌系统的一种最直接的物理实现方式是通过模拟电子电路来完成的. 在设计电路之前, 必须对系统的微分方程作一些适当的变换, 这样做的目的有两方面: 一是通过线性比例压缩, 使得混沌系统的状态变量在集成电路工作的电压范围内变化; 二是简化电路设计, 尽量减少所需元器件. 基于此原则, 我们采用线性电阻、线性电容、运算放大器 (TL082)、模拟乘法器 (AD633) 设计了一个模拟电子电路, 如图 7 所示. 为了精确选取电路参数以及便于调整分岔参数, 电路中电阻 $R_1, R_3, R_5, R_7, R_8, R_{10}$ 采用精密可调电位器. 当参数 $a = 35, b = 3, c = 35, k_1 = 1, k_2 = 0.2, k_3 = 0.3, d = 5$, 系统处于超混沌运动状态, 电路中各电阻精确值分别为 $R_1 = R_3 = R_5 = 28.57 \text{ k}\Omega, R_2 = 1000 \text{ k}\Omega, R_4 = 5000 \text{ k}\Omega, R_6 = R_9 = 10 \text{ k}\Omega, R_7 = 3333.33 \text{ k}\Omega, R_8 = 333.33 \text{ k}\Omega, R_{10} = 200 \text{ k}\Omega, R_0 = 10 \text{ k}\Omega$, 电容 $C_0 = 10 \text{ nF}$. 通过示波器观察到的超混沌吸引子如图 8 所示. 由图 8 看出, 电路实验结果与数值仿真结果相符.

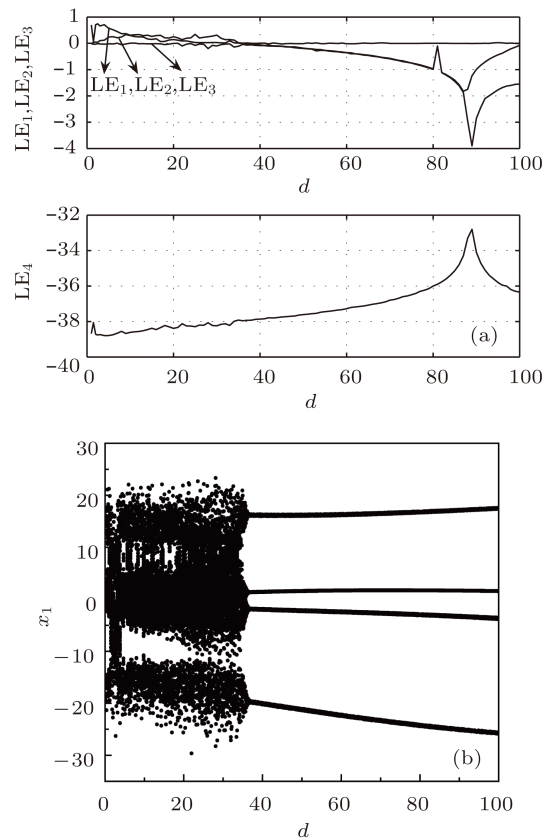


图3 d 变化时系统(2)的 Lyapunov 指数谱和分岔图 (a) Lyapunov 指数谱; (b) 分岔图

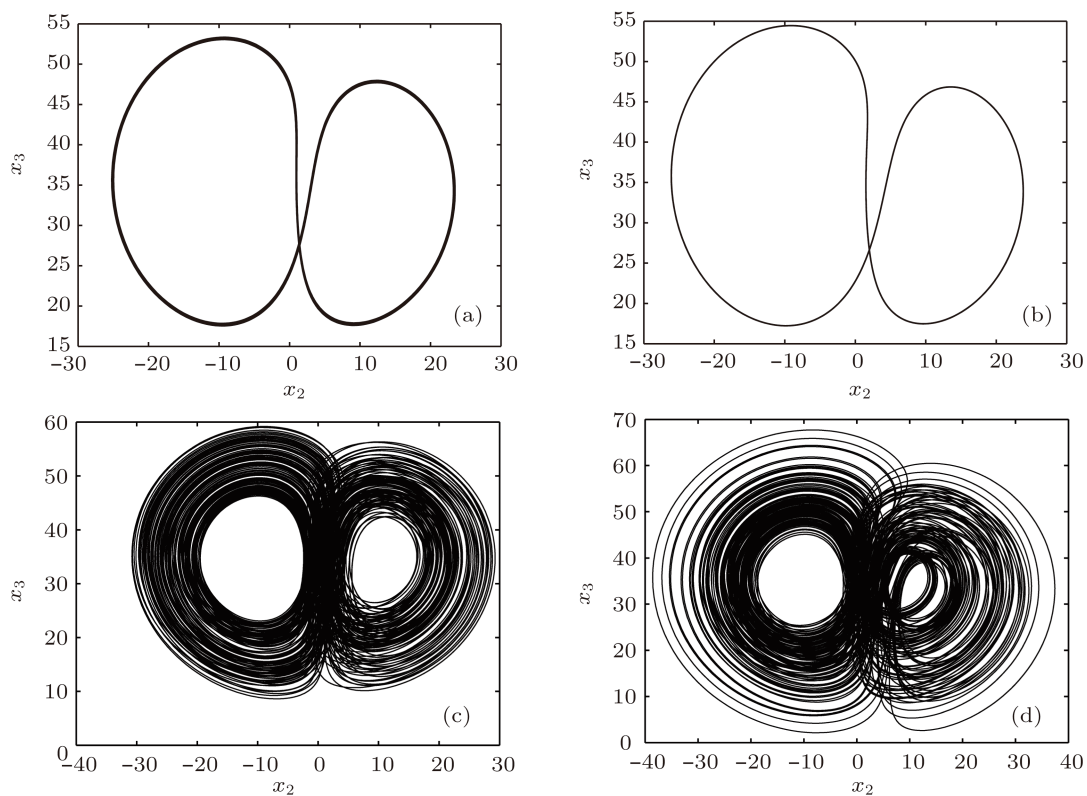


图4 几个典型参数值处新系统的相轨迹 (a) $d = 50$; (b) $d = 37$; (c) $d = 30$; (d) $d = 10$

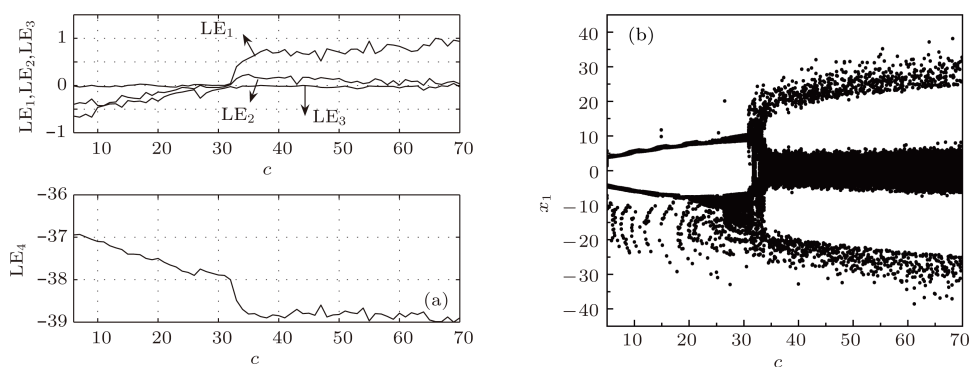


图5 c 变化时系统(2)的Lyapunov指数谱和分岔图 (a) Lyapunov指数谱; (b) 分岔图

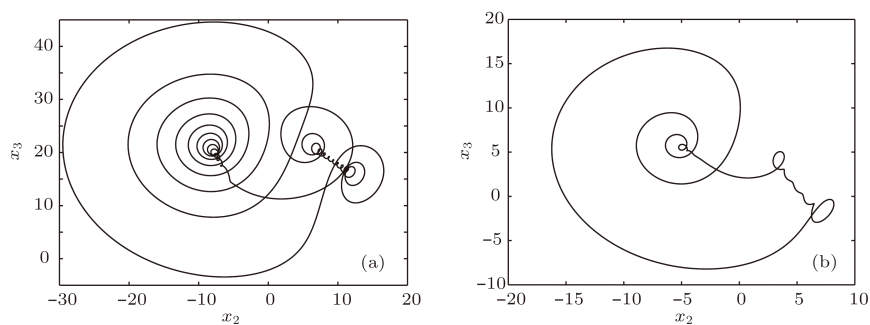


图6 参数 c 取不同值时系统的复杂周期轨 (a) $c = 4$; (b) $c = 20$

5 超混沌系统的单变量自适应追踪控制

5.1 自适应追踪控制器的设计

我们的控制目标是设计一个合适的自适应追踪控制器, 使超混沌系统的状态变量 x_1 能以各种形式追踪任意给定的参考信号. 受控超混沌系统如下:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= a(x_2 - x_1) + k_1 x_4, \\ \dot{x}_2 &= cx_1 - x_1 x_3 + k_2 x_4, \\ \dot{x}_3 &= -bx_3 + x_1 x_2 + k_3 x_4, \\ \dot{x}_4 &= -dx_1 + u \end{aligned} \quad (5)$$

u 为待设计的自适应控制器, 设任意参考信号为 r , 追踪误差为 $e = x_1 - r$. 设计控制器如下:

$$u = \frac{1}{k_1} [\lambda(e + \dot{e}) - a(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + k_1 dx_1 + \ddot{r}], \quad (6)$$

λ 为自适应控制增益, 满足如下规律:

$$\dot{\lambda} = -\gamma(e + \dot{e})^2, \quad (7)$$

γ 为一个正的常数, 其大小直接影响控制增益的收敛速度.

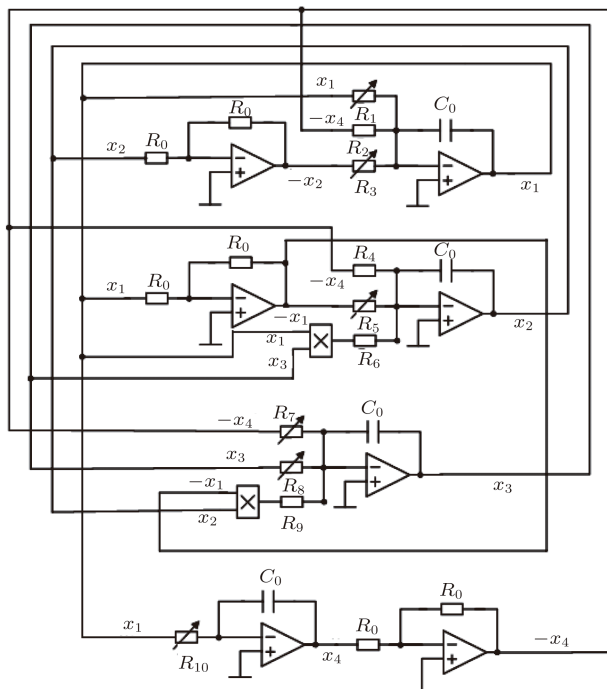


图7 超混沌系统(2)的电路图

定理 对于受控系统(5), 若选择(6)和(7)式表示的自适应控制器, 则其状态变量 x_1 能以不同的形式追踪任意给定的参考信号.

证明 选取正定 Lyapunov 函数

$$V = \frac{1}{2} e^2 + \frac{1}{2} (e + \dot{e})^2 + \frac{1}{2\gamma} (\lambda + 1)^2,$$

其关于时间的导数为

$$\begin{aligned} \dot{V} &= e\dot{e} + (e + \dot{e})(\dot{e} + \ddot{e}) + \frac{1}{\gamma} (\lambda + 1)\dot{\lambda} \\ &= -e^2 + (e + \dot{e})(e + \dot{e} + \ddot{e}) - (\lambda + 1)(e + \dot{e})^2 \\ &= -e^2 + (e + \dot{e})[e + \dot{e} + a(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) \\ &\quad - k_1 dx_1 + k_1 u - \ddot{r}] - (\lambda + 1)(e + \dot{e})^2 \\ &= -e^2 + (e + \dot{e})[e + \dot{e} + \lambda(e + \dot{e})] - (\lambda + 1)(e + \dot{e})^2 \\ &= -e^2 \leq 0. \end{aligned}$$

由 Lyapunov 稳定性理论可知, 在自适应控制器(6)和(7)作用下受控混沌系统(5)的状态变量 x_1 渐近趋近于参考信号 r . 证明完毕.

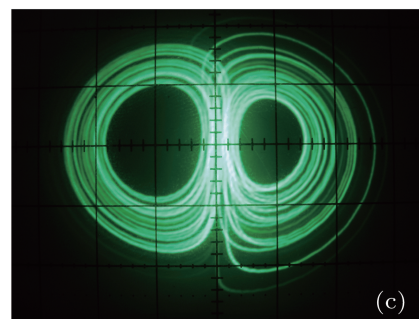
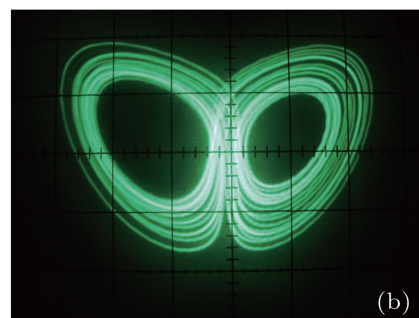
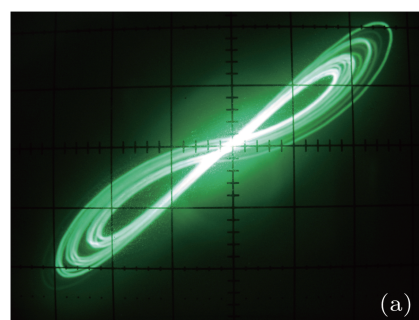


图8 超混沌系统(2)的电路实验结果 (a) x_1-x_2 平面; (b) x_1-x_3 平面; (c) x_2-x_3 平面

5.2 数值仿真

为了验证上述自适应追踪控制器的有效性, 我们以系统(5)的状态变量 x_1 追踪正弦周期信号、自同步和不同阶异结构广义同步为例, 进行数值仿真. 在整个过程中, 采用四阶龙格库塔法进行

数值求解, 系统 (5) 的初值为 (0.5,0.1,0.2,0.01), 参数 $a = 35, b = 3, c = 35, k_1 = 1, k_2 = 0.2, k_3 = 0.3, d = 5, \gamma = 2$, 仿真步长为 0.0002.

5.2.1 追踪正弦周期信号

选取正弦周期信号 $2\sin(t)$ 作为参考信号, 仿真结果如图 9(a),(b). 由图知, 系统变量 x_1 经过 5 s 左右后被控制到周期轨道上, 说明所设计的自适应追踪控制器能使受控系统 (5) 准确追踪上给定周期信号.

5.2.2 自同步

选取此新的超混沌系统作为响应系统

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= a(y_2 - y_1) + k_1 y_4, \\ \dot{y}_2 &= c y_1 - y_1 y_3 + k_2 y_4, \\ \dot{y}_3 &= -b y_3 + y_1 y_2 + k_3 y_4, \end{aligned}$$

$$\dot{y}_4 = -d y_1. \quad (8)$$

系统参数和 (5) 相同, 即 $a = 35, b = 3, c = 35, k_1 = 1, k_2 = 0.2, k_3 = 0.3, d = 5$, 选择参考信号 $r = y_1$. 仿真结果如图 10(a),(b). 由图可知, 系统变量 x_1 经过较短时间 (5 s 左右) 后与 y_1 达到一致, 即在所设计的自适应追踪控制器作用下系统 (5) 和 (8) 关于变量 x_1, y_1 实现了自同步.

5.2.3 不同阶异结构广义同步

选取三阶 Liu 系统作为响应系统, 其状态方程为 [11]:

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= a(y_2 - y_1), \\ \dot{y}_2 &= b y_1 - k y_1 y_3, \\ \dot{y}_3 &= -c y_3 + h y_1^2. \end{aligned} \quad (9)$$

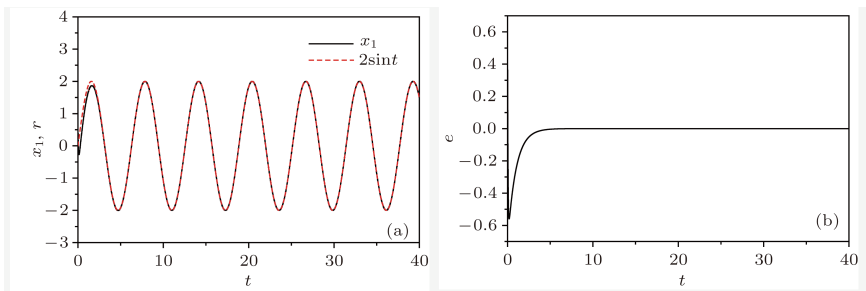


图 9 受控系统 (5) 追踪周期信号的结果 (a) x_1, r 时域波形图; (b) 追踪误差曲线

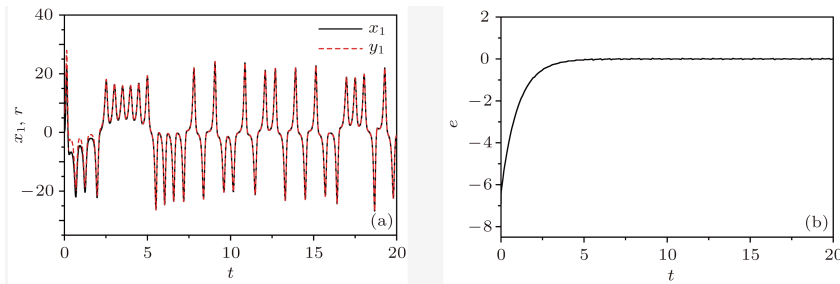


图 10 自同步的仿真结果 (a) x_1, r 时域波形图; (b) 同步误差曲线

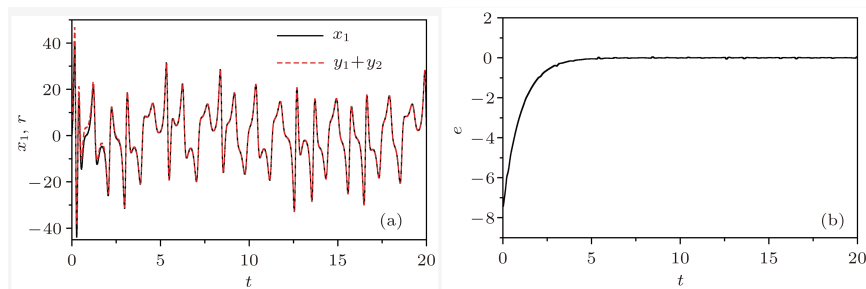


图 11 广义同步的仿真结果 (a) x_1, r 时域波形图; (b) 同步误差曲线

当参数 $a = 10, b = 40, c = 2.5, k = 1, h = 4$, 系统表现为混沌状态. 设参考信号 $r = y_1 + y_2$, 即实现系统 (5) 和 (9) 的广义同步. 仿真结果如图 11(a),(b). 由图知, 系统变量 x_1 经过较短时间 (5 s 左右) 后追踪上参考信号 $y_1 + y_2$, 所以在自适应追踪控制器作用下系统 (5) 和 (9) 实现了广义同步.

6 结论

本文基于一个三维混沌系统, 构造出一个新

的四维自治超混沌系统, 并对系统的基本动力学行为进行了深入的研究, 包括功率谱、Poincare 截面、Lyapunov 指数谱、分岔图等. 分析表明, 新的四维系统随着不同参数变化呈现周期、复杂周期、准周期、混沌及超混沌运动. 设计出的模拟电子电路验证了超混沌吸引子的存在. 最后, 设计了一个自适应追踪控制器, 实现了该超混沌系统对各种不同参考信号的单变量追踪控制, 并以对正弦周期信号的追踪控制、自同步和不同阶异结构系统的广义同步为例, 验证了自适应控制器的有效性.

-
- [1] Lorenz E N 1963 *J. Atmospheric Sci.* **20** 130
 [2] Chua L O, Komuro M, Matsumoto T 1986 *IEEE Trans. CAS* **33** 1072
 [3] Chen G R, Ueta T 1999 *Internat. J. Bifur. Chaos* **9** 1465
 [4] Lü J H, Chen G R 2002 *Internat. J. Bifur. Chaos* **12** 695
 [5] Liu C X, Liu L 2009 *Chin. Phys. B* **18** 2188
 [6] Zhou P, Wei L, Cheng X 2009 *Chin. Phys. B* **18** 2674
 [7] Si G Q, Cao H, Zhang Y B 2011 *Chin. Phys. B* **20** 010509
 [8] Jia L X, Dai H, Hui M 2010 *Chin. Phys. B* **19** 100501
 [9] Bao B C, Liu Z, Xu J P and Zhu L 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 1540 (in Chinese) [包伯成, 刘中, 许建平, 朱雷 2010 物理学报 **59** 1540]
 [10] Yang Q G, Chen G R 2008 *Internat. J. Bifur. Chaos* **18** 1393
 [11] Liu C X, Liu T, Liu K, Liu L 2004 *Chaos, Solitons Fract.* **22** 1031

A new hyperchaotic system and its adaptive tracking control*

Li Chun-Lai^{1)2)†} Yu Si-Min¹⁾

1) (College of Automation, Guangdong University of Technology, Guangzhou 510006, China)

2) (College of Physics and Electronics, Hunan Institute of Science and Technology, Yueyang 414006, China)

(Received 24 April 2011; revised manuscript received 14 June 2011)

Abstract

In this paper, a four-dimensional hyperchaotic system is constructed by adding a state feedback controller into a chaotic system. Numerical simulations and theoretical analysis show that this four-dimensional system will take on periodic, complex periodic, quasi-periodic chaotic hyperchaotic dynamical behaviours as parameters vary. Moreover, an electronic circuit diagram is designed for demonstrating the existence of the hyperchaos. Finally, an adaptive tracking controller is proposed to acquire adaptive tracking control for this hyperchaotic system.

Keywords: hyperchaos, Lyapunov exponent, chaotic circuit, tracking control

PACS: 05.45.Ac, 05.45.Xt, 05.45.Pq

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 60572073, 60871025), and the Natural Science Foundation of Guangdong Province (Grant Nos. 8151009001000060, 8351009001000002).

† E-mail: lichunlai33@tom.com