

一个全局耦合不连续映像格子中的冻结化随机图案模式*

谭红芳 金涛 屈世显†

(陕西师范大学物理学与信息技术学院, 理论与计算物理研究所, 西安 710062)

(2011年5月17日收到; 2011年6月25日收到修改稿)

本文研究了一类既不连续又不可逆分段线性映像构成的全局耦合映像格子系统中的一类典型集体动力学行为, 即冻结化随机图案模式. 计算了平均同步序参量和最大李雅普诺夫指数随耦合强度的变化. 结果显示, 当耦合强度超过某个阈值后, 在给定动力学变量的初始下, 系统几乎都能达到完全或部分同步状态, 出现冻结化随机图案. 这些现象表明, 耦合映像格子系统中存在着多个共存的吸引子. 因此, 其冻结化图案的结构和分布敏感地依赖于格点动力学变量初始值的选取. 感兴趣地是, 即使当单映像处于混沌状态时, 格点间的耦合仍能将系统调制到规则的运动状态, 这种特征对于混沌控制具有重要的利用价值. 上述丰富动力学行为的出现是由于单映像中不连续性和不可逆性相互作用的结果.

关键词: 耦合映像格子, 不连续映像, 集体动力学

PACS: 05.45.Ra, 05.45.-a

1 引言

大多数时空系统的时间、空间和状态变量都是连续变化的, 一般采用偏微分方程来描述. 然而, 严格可解的偏微分方程为数不多, 常常需要数值计算. 事实上, 在数值计算中, 通过一定的近似方法可将连续方程变为时间和空间离散化的差分方程, 而保持状态变量连续变化, 即可得到所谓耦合映像格子模型^[1]. 耦合映像格子模型克服了偏微分方程的缺点同时又能保留原系统的固有属性, 因此成为探索时空系统的有力工具, 被普遍用于混沌控制、时空动力学以及同步等方面的研究, 受到研究者的广泛关注^[1-6]. 经典的耦合映像格子是由规则的耦合单元组成, 例如, 最近邻耦合、次近邻耦合、全局耦合、随机耦合等等. 全局耦合映像格子是作为耦合映像格子的平均场形式引入的, 由于系统中每一个格点都受到其他所有格点的影响, 因而适于研究具有长程相互作用的系统, 如约瑟夫逊结阵列^[7]、电荷密度波^[8]、多模激光动力学^[9]、神经动力学^[10]、神经信息处理^[11]等.

迄今为止对耦合映像格子的研究大多局限于

连续映像, 而事实上, 许多真实系统, 例如: 心肌细胞^[12]、张弛振荡器^[13-16]、功率变换器^[17]等, 往往表现出不连续的突变行为, 需要用不连续映像来刻画. 因此研究以不连续映像为格点演化动力学的耦合映像格子模型具有重要的理论价值和现实意义.

基于以上考虑, 本文研究由一类既不连续又不可逆映像^[15,16]构成的全局耦合映像格子的集体动力学行为.

2 模型和映像

全局耦合映像格子的数学描述为

$$x_i^{t+1} = (1 - \varepsilon)f(x_i^t) + \frac{\varepsilon}{N-1} \sum_{j=1; j \neq i}^N f(x_j^t), \quad (1)$$

其中, x_i^t 为第 i 格点处、离散时间 t 时刻系统的动力学状态, ε 为耦合强度, N 为格点数, $f(x)$ 为每个格点的演化动力学. 在本文中, 我们选用的映像为分段线性既不连续又不可逆映像, 定义为

$$x_i^{t+1} = f_i(x_i^t) = k_i \cdot x_i^t + b_i \quad i = 1, 2, 3, 4, \quad (2)$$

* 国家自然科学基金 (批准号: 10875076) 和陕西省自然科学基金 (批准号: SJ08A23) 资助的课题.

† E-mail: sxqu@snnu.edu.cn

其中

$$\begin{aligned}
 k_1 &= \frac{y_b - y_A}{x_b - x_A}, & b_1 &= y_A, & x &\in [x_A, x_b]; \\
 k_2 &= \frac{y_C - y_b}{x_g - x_b}, & b_2 &= y_b - k_2 x_b, & x &\in [x_b, x_g]; \\
 k_3 &= 3.07055, & b_3 &= -0.530165, & x &\in [x_g, x_F]; \\
 k_4 &= 0.405507, & b_4 &= -0.201586, & x &\in [x_F, x_G]; \\
 y_b &= b_1 - \mu.
 \end{aligned}$$

其他参数: $x_A = 0, x_b = 0.107663, x_g = 0.35, x_F = 0.497121, x_G = 1, y_A = 0.203921, y_C = 0.46, y_G = y_A.$ μ 为控制参数.

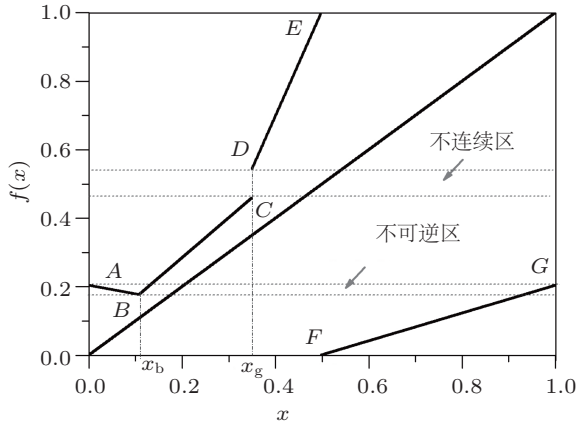


图1 映像函数

该映像的示意图如图 1 所示, 其中 C 和 D 点之间形成了一个迭代不能达到的不连续区, 称为“禁区”, 而在 y_b 与 y_A 之间则形成了一个映像的不可逆区. 不连续和不可逆性的互相竞争产生了极其丰富的动力学行为 [16]: 当 $\mu_1 \leq \mu < \mu_2$ 时, 周期 5 与 11 带混沌吸引子共存; 当 $\mu_3 \leq \mu < \mu_4$ 时, 周期 5 与周期 6 吸引子共存; 当 $\mu_4 \leq \mu < \mu_5$ 时, 周期 5 与 12 带混沌吸引子共存; 当 $\mu_5 \leq \mu < \mu_6$ 时, 周期 5 与 6 带混沌吸引子共存; 当 $\mu_6 \leq \mu < \mu_7$ 时, 出现 6 带混沌吸引子. 这里, $\mu_i, i = 1, 2, 3, \dots, 7$ 为临界参量, 其数值见文献 [16].

3 结果与分析

本文主要研究控制参数在不同区间取值时上述全局耦合不连续映像格子模型的集体动力学. 作为典型例子, 研究了 $\mu = 0.03 \in [\mu_1, \mu_2)$ 和 $\mu = 0.053 \in [\mu_6, \mu_7)$ 两个参数下系统的集体动力学行为. 我们用平均同步序参量 $\langle R \rangle$ 和最大李雅普诺夫指数 λ_{\max} 表征系统的集体动力学. 其中,

物理量 $\langle R \rangle$ 用来表征系统的同步状态, 定义为 [5]

$$\langle R \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{t=t_0}^{T+t_0} R_t, \quad (3)$$

这里, t_0 为瞬态, R_t 通过下式定义, 即

$$R_t \exp(i\varphi_t) \equiv \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \exp(2\pi i x_t^{(j)}), \quad (4)$$

这里, R_t 和 φ_t 分别为 t 时刻的振幅和相位. 特别地, 当系统达到完全同步状态时, 即系统中所有格点的动力学状态相同时, $\langle R \rangle = 1$. 最大李雅普诺夫指数 λ_{\max} 定义为 [6]

$$\lambda_{\max} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{i=1}^T \log \frac{d_i}{d_0}, \quad (5)$$

这里 d_0 为动力学变量的两个邻近的初值间距, d_i 第 i 步的间距. 当 $\lambda_{\max} < 0$ 时, 系统处于周期运动状态; 而当 $\lambda_{\max} > 0$ 时, 系统处于混沌状态. 本工作中, 系统尺寸设定为 $N = 501$. 在数值计算中, 格点动力学变量的初始值随机地在相空间 $[0, 1]$ 中取值.

3.1 $\mu = 0.03 \in [\mu_1, \mu_2)$ 情况

在这种情况下, 格点上的单映像 (非耦合的情况) 中出现共存的周期 5 和 11 带混沌状态. 事实上, 11 带混沌的出现是由于不可逆性与不连续性相互作用的结果, 这种情况可以通过一个 5 阶映像理解. $\mu < \mu_1$ 时, 映像的不连续点 x_g 及其相应的 1 到 4 阶逆映像值将相空间分割为 5 个区域, 5 阶映像在每个区域形成一个 V 字形的分段线性映像, 其下降支与对角线的交点分别给出 5 个稳定不动点. 而当 $\mu \geq \mu_1$ 时, 该 5 个不动点依然保持稳定. 与此同时, x_g 的 2 阶逆映像抬升到高于映像的极小值, 形成围绕着 x_b 的一对 x_g 的 3 阶逆映像值. 在 5 阶映像中, 这一对 3 阶逆映像值在上述五个区域中最左侧的 V 字形映像底部切出一个映孔; 同时, 与这对逆映像值相应的 4 阶逆映像值将最右侧的 V 字形映像底部也切出一个映孔. 该两映孔形成了逃逸通道, 将 5 个分立的区域联通, 在相空间形成了 11 个带子, 在其中的迭代为混沌运动, 因此称为 11 带混沌. 它与周期 5 吸引子共存 (详细情况见文献 [16]).

为了解释全局耦合格子系统的集体动力学, 图 2(a) 给出了系统序参量 $\langle R \rangle$ 随耦合强度 ε 的变化关系, 图 2(b) 给出了相应的最大李雅普诺夫指数. 图中的每个点都是在舍去暂态 ($t_0 = 10000$) 后经过足够长时间 ($T = 50000$) 平均的结果. 可以看出, 当 $\varepsilon < 0.24$ 时系统处于非同步化的周期运动状

态; 当 $0.24 \leq \varepsilon < 0.45$ 时, 系统处于周期运动状态. 在一些参数处出现了非同步行为, 在其他的参数上处于同步化状态. 当 $\varepsilon \geq 0.45$ 时, $\langle R \rangle = 1$, 表明系统处于同步化运动. 最大李雅普诺夫指数显示: 在其中三个子区域内, 系统处于同步化的 11 带混沌状态, 而在其他参数区间为同步化的周期 5 状态.

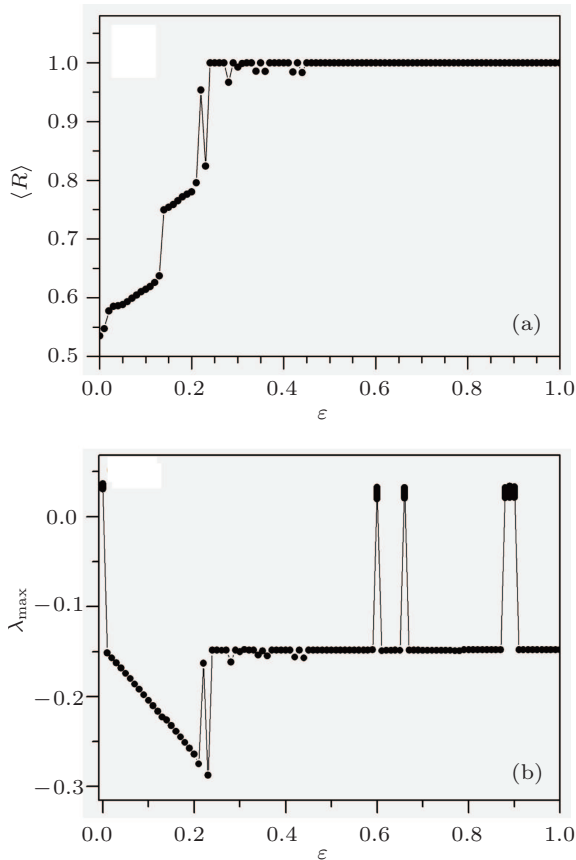


图 2 $\mu = 0.03$ 时的平均同步序参量 (a) 和最大李雅普诺夫指数 (b) 随耦合强度的变化

为了更仔细地显示系统的时空动力学行为, 我们在图 3(a) 和 (b) 分别给出了两个耦合强度下 ($\varepsilon = 0.54$ 和 $\varepsilon = 0.88$) 的空间振幅变化图. 图 3(a) 显示: 每个格点都处于周期 5 运动状态, 所有的格点都步调一致, 即同步化的周期 5 运动. 其运动轨迹与单映像的周期 5 轨道相同. 图 3(b) 显示: 所有的格点动力学都同步到 11 带混沌运动状态, 其混沌轨道与单映像的 11 带混沌轨道相同. 上述两种动力学行为是典型的冻结化随机图案模式^[1,6], 表明在本文的时空系统中至少存在两种稳定的吸引子, 一种为周期吸引子, 另一种为混沌吸引子, 其吸引域互相缠绕着分布在系统相空间. 鉴于吸引域的这种特征, 这里的冻结化图案具体表现为哪种模式严重依赖于动力学变量初始值的选择. 如果大部分的初始值选在周期 5 吸引子的吸引域,

格点动力学耦合的结果可以使它们同步在周期 5 轨道; 如果大部分的初始值选在 11 带混沌吸引子的吸引域, 格点动力学耦合的结果可以使它们同步在 11 带混沌轨道. 如果格点动力学变量的初值处于两种吸引域的数目相若, 系统中就会出现部分同步, 系统的实空间就会被分割为不同的区域, 它们要么处于同步化的周期 5, 要么处于同步化的 11 带混沌, 具体的分布取决于初始值的分布, 具有冻结化随机图案模式的典型特征.

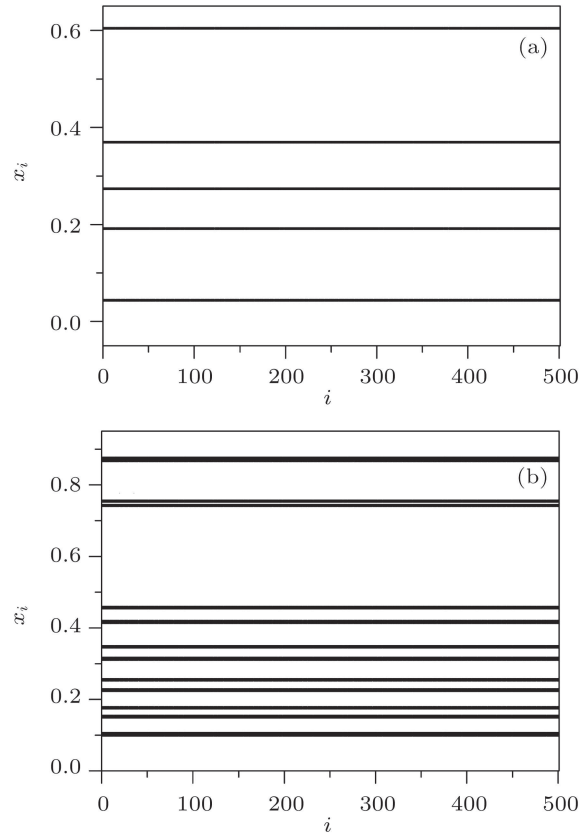


图 3 格点空间振幅变化图 (a) $\varepsilon = 0.54$; (b) $\varepsilon = 0.88$

3.2 $\mu = 0.053 \in [\mu_6, \mu_7]$ 的情况

在这一参数区间单映像处于 6 带混沌状态. 平均同步序参量和最大李雅普诺夫指数随耦合强度的变化分别如图 4(a) 和 (b) 所示, 其中的每个点都是在舍去暂态 ($t_0 = 10000$) 后经过足够长时间 ($T = 50000$) 平均的结果. 可以看出, 当耦合强度 $\varepsilon \geq 0.16$ 时, 除个别耦合强度区间外, 系统几乎都可以达到完全同步状态, 并且由于最大李指数均大于零, 系统实际上处于同步化的混沌状态.

图 5 为相应的空间振幅变化图, (a) 为耦合强度 $\varepsilon = 0.36$ 的情况, (b) 为耦合强度 $\varepsilon = 0.45$ 的情况. 在较小的耦合强度下 (图 5(a)), 出现部分同步,

系统空间被两类吸引子分割, 一个处于周期 6, 另外一个处于周期 5. 前者实际上同步在单映像中已经失稳的周期 6 轨道上, 这实际上就是通过格点间的耦合实现控制的例子. 后者可能是耦合映像系统所具有的一个新的吸引子. 在较大的耦合强度下 (图 5(b)), 系统达到了完全的同步, 同步于一个混沌吸引子上. 该混沌吸引子实际上具有带状结构, 但不同于单映像的任何一个混沌吸引子, 而是耦合映像系统所出现的一个新吸引子结构. 上述图案结构的细节也敏感地依赖于动力学变量之初值的选择, 这是系统中具有多种吸引子共存的结果. 因此, 其动力学行为具有冻结化随机图案模式.

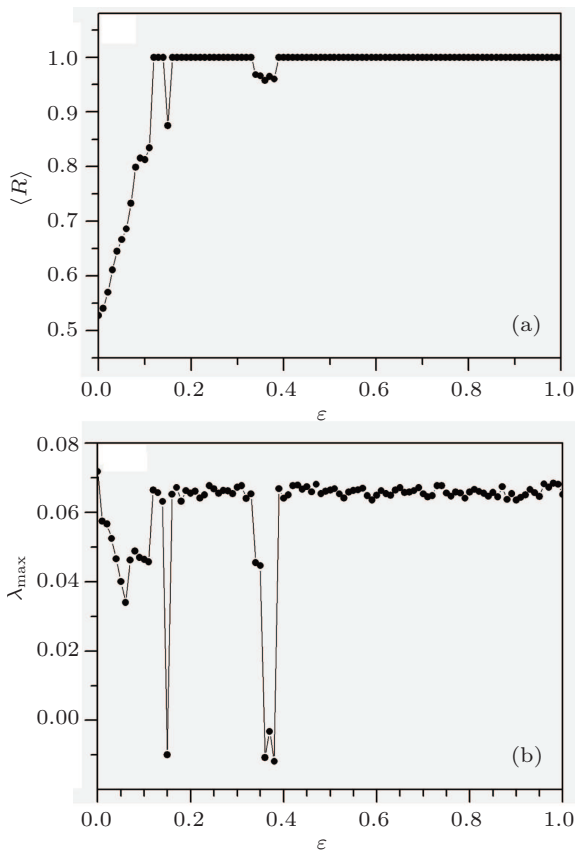


图 4 $\mu = 0.053$ 时的平均序参量和李雅普诺夫指数随耦合强度的变化

4 结论

本文用数值模拟的方法研究了一类既不连续又不可逆分段线性映像构成的全局耦合映像格子系统的一类典型集体动力学行为, 冻结化随机图案模式. 计算了平均同步序参量和最大李雅普诺夫指

数随耦合强度的变化. 结果显示, 当耦合强度超过某个阈值以后, 在给定动力学变量的初始值时, 系统几乎都能达到完全或部分同步状态, 空间振幅变化图显示出冻结化随机图案模式. 这些现象表明, 耦合映像格子系统中存在着许多共存的吸引子, 因此其冻结化图案的结构和分布敏感地依赖于格点动力学变量初始值的选取. 感兴趣的是, 在本系统中即使当单映像处于混沌状态时, 格点间的耦合仍能将系统调制到规则的运动, 这种特征对于混沌控制具有重要的利用价值.

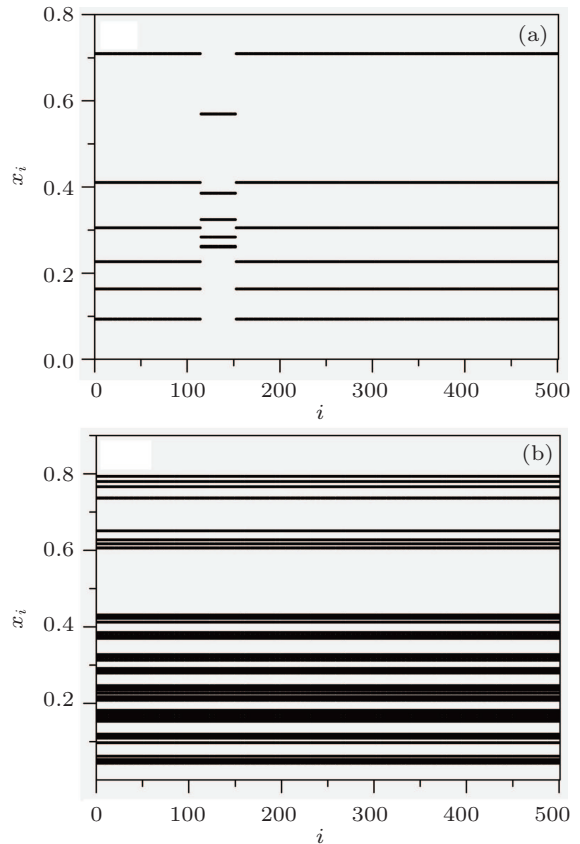


图 5 格点空间振幅变化图 (a) $\varepsilon = 0.36$; (b) $\varepsilon = 0.45$

最后我们强调, 上述特征动力学现象的出现是由单映像的特殊性质决定的. 事实上, 不连续和不可逆性质的加入使单映像的动力学在不连续点附近发生不连续的跃变, 使系统较处处光滑映像系统更加敏感; 禁区的存在还会遮挡一些动力学行为, 不连续性和不可逆性的竞争造成了丰富的动力学. 因此, 由这类映像构成的耦合映像格子系统会出现较多的共存吸引子, 呈现较连续系统更加丰富多变的冻结化图案模式, 易于实现混沌控制.

- [1] Kanoke K 1992 *Chaos* **2** 279
 [2] Kanoke K 1991 *Physica D* **54** 5
 [3] Hu G, Qu Z L 1994 *Phys. Rev. Lett.* **72** 68
 [4] Batista A M, Pinto S E de S, Viana R L, Lopes S R 2002 *Phys. Rev. E* **65** 056209
 [5] Santos A M, Viana R L, Lopes S R, Pinto S E de S, Batista A M 2006 *Physica A* **367** 145
 [6] Yang W M 1994 *Spatio-temporal Chaos and Coupled Map Lattices* (Shanghai: Education And Technology Press of Shanghai) (in Chinese) [杨维明 1994 时空混沌和耦合映像格子 (上海: 上海教育出版社)]
 [7] Wiesenfeld K, Hadley P 1989 *Phys. Rev. Lett.* **62** 1335
 [8] Sompolinsky H, Golomb D 1991 *Phys. Rev. A* **43** 6990
 [9] Wiesenfeld K, Bracikowski C, James G, Roy R 1990 *Phys. Rev. Lett.* **65** 1749
 [10] Sompolinsky H, Golomb D, Kleinfeld D 1991 *Phys. Rev. A* **43** 6990
 [11] Wang T, Wang K J, Jia N 2011 *Neural Computing* **74** 1673
 [12] Grudzinski K, Zebrowski J J 2004 *Physica A* **336** 153
 [13] Budd C J, Piironen P T 2006 *Physica D* **220** 127
 [14] He D R, Wang B H, Bauer M, Habip S, Krueger U, Martienssen W, Christiansen B 1994 *Physica D* **79** 335
 [15] Qu S X, Christiansen B, He D R 1995 *Phys. Lett. A* **201** 413
 [16] Qu S X, Lu Y Z, Zhang L, He D R 2008 *Chin. Phys. B* **17** 4418
 [17] Ren H P, Liu D 2005 *Chin. Phys.* **14** 1352

Frozen random patterns in a globally coupled discontinuous map lattices system*

Tan Hong-Fang Jin Tao Qu Shi-Xian[†]

(Institute of Theoretical & Computational Physics, School of Physics and Information Technology, Shaanxi Normal University, Xi'an 710062, China)

(Received 17 May 2011; revised manuscript received 25 June 2011)

Abstract

A class of the characteristic collective dynamic behaviors, *i.e.*, the frozen random patterns, in a globally coupled both-discontinuous-and-non-invertible-map lattices are studied. The coupling-strength dependences of the mean order parameters and the largest Lyapunov exponents are calculated and analyzed. The result shows that, given the initial values for the dynamical variables, the system will reach its complete or partial synchronization state when the coupling strength is beyond some critical value, where the frozen random pattern appears. These phenomena reveal that there are coexisting attractors in the system, and thus the structure and the distribution of the frozen random patterns sensitively depend on the choice of the initial dynamics variables. The interesting event is that the system can be modulated to some regular states of motion by the coupling among lattices even when the single maps are in the chaotic states, which may have some important applications in controlling chaos. The rich dynamical behaviors mentioned above are due to the interplay between the discontinuity and the non-invertibility in the map.

Keywords: coupled map lattices, discontinuous map, collective dynamics

PACS: 05.45.Ra, 05.45.-a

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No.10875076), and the Natural Science Foundation of Shaanxi Province (Grant No.SJ08A23).

[†] E-mail: sxqu@snnu.edu.cn