

周期型二元颗粒链中孤波传播的二体碰撞近似分析*

陈琼¹⁾ 杨先清^{1)†} 赵新印¹⁾ 王振辉¹⁾ 赵跃民²⁾

1) (中国矿业大学理学院, 徐州 221116)

2) (中国矿业大学化工学院, 徐州 221116)

(2011年5月27日收到; 2011年9月1日收到修改稿)

本文运用二体碰撞近似理论研究了孤波在周期型二元颗粒链中的传播. 周期型二元颗粒链由 N 个大球和一个小球交替排列而成, 球的材质都相同. 将小球和与之相邻的大球等效成一个球, 形成一条等效链. 采用二体碰撞近似理论, 推导了孤波在颗粒链中传播的速度、通过颗粒链时间以及小球的振荡频率. 理论分析得到小球振荡频率随着半径的增大而减小, 该结果与计算机模拟结果符合得相当好. 二体碰撞近似理论给出的波通过整条颗粒链时间, 在 $N \leq 2$ 时与计算机模拟结果符合得很好. 理论计算的误差随链长的变化不大. 但随着 N 的增大, 理论得到的结果相对误差变大.

关键词: 周期型二元颗粒链, 孤波, 二体碰撞近似

PACS: 45.70.-n, 46.40.Cd, 43.25.+y

1 引言

近年来, 对于波入射一维颗粒系统的研究已经引起了越来越多的学者的兴趣, 这不仅仅是由于入射孤波在一维颗粒系统中传播时所表现出的特殊的动力学行为, 更重要的是对该系统的研究涉及到生物、医学、环境、建筑、材料、工程等多方面的领域^[1,2]. 然而到目前为止, 仍然没有一个确定的、系统的理论可以用来解释这些特殊现象, 因此对于一维颗粒系统中波的传播问题研究就显得尤为重要, 也有利于人们对二维、三维颗粒系统的深入理解.

一维颗粒系统是强的非线性系统, 对它的研究主要是从实验、计算机模拟和理论三个方面进行. 在实验上, 孤波入射同种材质颗粒构成的均匀链的情况已经有了很多的研究^[3-5], 如水平放置的颗粒链链中入射波表现为一个独立的孤波^[4]; 若考虑重力即在竖直放置的颗粒链链中, 小的冲击孤波的振幅与链的长度或传播时间呈幂率型衰减的关系^[5]. 而波入射异种颗粒构成的不均匀链的特殊行为和其更广泛的应用背景引起了人们更大的兴趣.

当孤波从硬球(或大球)传到软球(或小球)时能量被软球俘获且以幂率型关系衰减^[6,7]. Daraio 等^[8]对两维 Y 形颗粒链的研究在实验和计算机模拟结构中观察到了波的分裂和不规则的反射现象. Job 等^[9]的实验发现了入射波在有缺陷链中传播时, 缺陷小球处出现局域振荡的现象. Porter 等^[10]对由 N 个大球(或重球)与一个小球(或轻球)交替排列的 $N:1$ 周期型二元颗粒链进行了实验研究, 得到力与波传播速度的关系. 由于颗粒链的构成具有灵活的可调性, 对该系统的研究在工程上就有着许多潜在的应用, 如冲击和能量吸收层^[11-13]、声聚焦装置(可调声学透镜)、声吸收层和声扰频器^[14,15]等.

理论上, 对该非线性系统的研究主要有长波长近似和二体碰撞近似(即短波长近似)两种方法. 长波长近似理论是将颗粒系统看作是连续的系统, 可以很好地解释均匀链中的一些非线性现象^[16,17]. 对于不均匀系统, Porter 等^[10]用长波长理论解释了半径相同、材料不同的球交替排列的系统(即 $1:1$ 周期型二元颗粒链)中波的传播行为, 理论计算得到波的传播速度和峰宽与实验相符.

* 国家自然科学基金创新研究群体科学基金(批准号:50921002)和中央高校基本科研业务费专项资金(批准号:2010LKWL09)资助的课题.

† E-mail: xianqiang@163.com

Jayaprakash 等^[18]用该理论研究了孤波在大小不同钢球-PTFE 球交替排列的颗粒链中传播的情况,得到了孤波运动偏微分方程的解析解.但是由于长波长近似理论对不均匀系统的连续近似处理较为困难且求解微分方程时也较为复杂,至今为止该理论并没有对 $N : 1 (N \geq 2)$ 周期型二元颗粒链进行研究.二体碰撞近似理论认为颗粒碰撞或是波的传播只发生在两个相邻有压缩存在的颗粒间,处理时只考虑两个颗粒碰撞后动量守恒和能量守恒,较长波长近似理论简易且方便. Rosas 和 Lindenberg^[19]对长波长近似和二体碰撞近似两个理论进行了对比,发现对于软球长波长近似理论的计算误差较小,而对硬球二体碰撞理论则比较适用. Harbola 等用二体碰撞近似理论成功的解释了波在锥型链^[20]、装饰链^[21]、随机装饰链^[22]、有初始压缩和无初始压缩的 o-ring 链^[23]以及颗粒气体^[24]中传播的非线性行为.理论研究不仅对更好的理解该系统的特殊行为有着促进作用,而且在凝聚态物理和固体物理中都有着潜在的应用.

本文运用二体碰撞近似理论和计算机模拟对 $N : 1$ 周期型二元颗粒链中波的传播情况进行了深入研究.颗粒链是由 N 个大球和一个小球交替排列而成的,若颗粒链中有 M 个小球,则该链总球数为 $L = MN + M + N$.采用自由边界条件,二体碰撞近似理论得到孤波在传播过程中小球的振荡频率、波的传播速度以及波通过整条颗粒链的时间.研究发现小球的振荡频率随着半径的增大而减小.二体碰撞近似理论给出的波通过整条颗粒链时间,在 $N \leq 2$ 时与计算机模拟结果符合得很好.但随着 N 的增大,理论得到的结果相对误差变大.

2 模型

2.1 无量纲化

一维颗粒系统中,颗粒间的相互作用力主要是 Hertzian 相互作用力即弹性力.假定颗粒链由材料相同半径不同的球构成,则相邻颗粒间的 Hertz 相互作用力^[3]

$$F(\delta_{i,i+1}) = k_{i,i+1}(\delta_{i,i+1})^{3/2}H(\delta_{i,i+1}), \quad (1)$$

其中 $\delta_{i,i+1} = R_i + R_{i+1} - (x_{i+1} - x_i)$ 为两个球的压缩量, x_i 和 R_i 分别为第 i 个球的位置和半径. $k_{i,i+1} = \frac{2E}{3(1-v^2)}\sqrt{\frac{R_i R_{i+1}}{R_i + R_{i+1}}}$ 为颗粒间的弹性系

数, E 和 v 分别为颗粒材料的杨氏模量和泊松比. $H(x)$ 为阶梯函数,当 $x > 0$ 时 $H(x) = 1$,当 $x \leq 0$ 时 $H(x) = 0$.第 i 个球的运动微分方程为

$$M_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} = k_{i,i-1} \delta_{i,i-1}^{3/2} H(\delta_{i,i-1}) - k_{i,i+1} \delta_{i,i+1}^{3/2} H(\delta_{i,i+1}), \quad (2)$$

其中 M_i 为第 i 个球的质量, $i = 2, \dots, L-1$.给定第一个球一个初始速度 V_0 (即相当于初始脉冲),其他球的初始速度均为零.为了方便理论分析以及计算机模拟,我们将所有的量进行重新标度.定义无量纲常量

$$\xi \equiv \frac{3(1-v^2)M_1 V_0^2}{\sqrt{2}ER_1^3}, \quad (3)$$

其中 M_1 和 R_1 分别为颗粒链中第一个球的质量和半径.使得 u_i, τ, m_i 和 r_i 满足

$$\begin{aligned} u_i &= \frac{x_i}{R_1 \xi^{2/5}}, & \tau &= \frac{tV_0}{R_1 \xi^{2/5}}, \\ r_i &= \frac{R_i}{R_1}, & m_i &= \frac{3M_i}{4\pi\rho R_1^3}, \end{aligned} \quad (4)$$

则(2)式可化为

$$\begin{aligned} m_i \frac{d^2 u_i}{d\tau^2} &= \eta_{i-1,i}(u_{i-1} - u_i)^{3/2} H(u_{i-1} - u_i) \\ &\quad - \eta_{i,i+1}(u_i - u_{i+1})^{3/2} \\ &\quad \times H(u_i - u_{i+1}), \end{aligned} \quad (5)$$

无量纲化后的初始速度为 $v_0 = 1$

2.2 二体碰撞分析

当两个球 i 和 $i+1$ 发生碰撞时,根据动量守恒和能量守恒有

$$\begin{aligned} m_i v_i &= m_i v'_i + m_{i+1} v_{i+1}, \\ \frac{1}{2} m_i v_i^2 &= \frac{1}{2} m_i v'^2_i + \frac{1}{2} m_{i+1} v_{i+1}^2, \end{aligned} \quad (6)$$

可得到碰撞后第 $i+1$ 个球的速度为

$$v_{i+1} = \frac{2v_i}{1 + m_{i+1}/m_i}. \quad (7)$$

3 不均匀链的理论分析

本文采用由 N 个大球和一个小球交替排列而成的颗粒链,则无量纲化后大球的质量、半径和大球间的弹性模量都为 1,小球的质量和半径分别为 m 和 r ,其中 $m = r^3 \ll 1$,大球与小球间的弹性模量记为 $\eta = [2r/(1+r)]^{1/2}$.对于 $N : 1$ 周期型二元颗粒链,文献[10]和[21]已经分别进行了 $N = 1$

时的长波长理论研究和二体碰撞理论研究. 本文首先分析 $N = 2$ 时的颗粒链, 然后再将所得的结果扩展到 $N > 2$ 的情况, 得到周期型二元颗粒链理论分析的普适结果.

3.1 2 : 1 周期型二元颗粒链

首先分析由两个大球和一个小球交替排列构成的颗粒系统, 如图 1 所示. 第 $i, i + 1, i + 3, i + 4, i + 6, i + 7$ 个球为大球, 第 $i + 2$ 和 $i + 5$ 为小球.

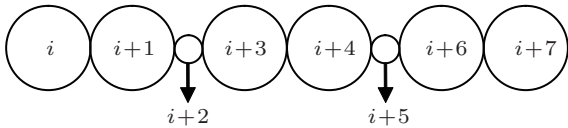


图 1 2 : 1 周期型二元颗粒链

颗粒链中球的运动微分方程可写为

$$\begin{aligned}
 \ddot{u}_i &= -(u_i - u_{i+1})^{n-1} H(u_i - u_{i+1}), \\
 \ddot{u}_{i+1} &= (u_i - u_{i+1})^{n-1} H(u_i - u_{i+1}) \\
 &\quad - \eta(u_{i+1} - u_{i+2})^{n-1} H(u_{i+1} - u_{i+2}), \\
 m\ddot{u}_{i+2} &= \eta(u_{i+1} - u_{i+2})^{n-1} H(u_{i+1} - u_{i+2}) \\
 &\quad - \eta(u_{i+2} - u_{i+3})^{n-1} H(u_{i+2} - u_{i+3}), \\
 \ddot{u}_{i+3} &= \eta(u_{i+2} - u_{i+3})^{n-1} H(u_{i+2} - u_{i+3}) \\
 &\quad - (u_{i+3} - u_{i+4})^{n-1} H(u_{i+3} - u_{i+4}), \\
 \ddot{u}_{i+4} &= (u_{i+3} - u_{i+4})^{n-1} H(u_{i+3} - u_{i+4}) \\
 &\quad - \eta(u_{i+4} - u_{i+5})^{n-1} H(u_{i+4} - u_{i+5}), \\
 m\ddot{u}_{i+5} &= \eta(u_{i+4} - u_{i+5})^{n-1} H(u_{i+4} - u_{i+5}) \\
 &\quad - \eta(u_{i+5} - u_{i+6})^{n-1} H(u_{i+5} - u_{i+6}), \\
 \ddot{u}_{i+6} &= \eta(u_{i+5} - u_{i+6})^{n-1} H(u_{i+5} - u_{i+6}) \\
 &\quad - (u_{i+6} - u_{i+7})^{n-1} H(u_{i+6} - u_{i+7}), \\
 \ddot{u}_{i+7} &= (u_{i+6} - u_{i+7})^{n-1} H(u_{i+6} - u_{i+7}). \quad (8)
 \end{aligned}$$

文献 [21] 发现位于两个大球之间的小球会有振荡行为. 由于小球振荡振幅较小, 可以忽略, 因此小球的位移可近似等于相邻两个大球的位移和的一半, 即

$$\begin{aligned}
 u_{i+2} &= \frac{u_{i+1} + u_{i+3}}{2}, \\
 u_{i+5} &= \frac{u_{i+4} + u_{i+6}}{2}. \quad (9)
 \end{aligned}$$

若只是考虑第 $i + 1, i + 2, i + 3$ 三个球, 则有 $m\ddot{u}_{i+2} + \ddot{u}_{i+1} + \ddot{u}_{i+3} = 0$, 根据 (9) 式可以得到 $(1 + m/2)(\ddot{u}_{i+1} + \ddot{u}_{i+3}) = 0$, 这样三个球就可以

看作两个球来进行处理. 第 $i + 4, i + 5, i + 6$ 个球也采用同样的处理方法. 定义等效质量 $\mu = 1 + m/2$, 则 (8) 式可化为

$$\begin{aligned}
 \ddot{u}_i &= -(u_i - u_{i+1})^{n-1} H(u_i - u_{i+1}), \\
 \mu\ddot{u}_{i+1} &= (u_i - u_{i+1})^{n-1} H(u_i - u_{i+1}) \\
 &\quad - \frac{\eta}{2^{n-1}}(u_{i+1} - u_{i+3})^{n-1} H(u_{i+1} - u_{i+3}), \\
 \mu\ddot{u}_{i+3} &= \frac{\eta}{2^{n-1}}(u_{i+1} - u_{i+3})^{n-1} H(u_{i+1} - u_{i+3}) \\
 &\quad - (u_{i+3} - u_{i+4})^{n-1} H(u_{i+3} - u_{i+4}), \\
 \mu\ddot{u}_{i+4} &= (u_{i+3} - u_{i+4})^{n-1} H(u_{i+3} - u_{i+4}) \\
 &\quad - \frac{\eta}{2^{n-1}}(u_{i+4} - u_{i+6})^{n-1} H(u_{i+4} - u_{i+6}), \\
 \mu\ddot{u}_{i+6} &= \frac{\eta}{2^{n-1}}(u_{i+4} - u_{i+6})^{n-1} H(u_{i+4} - u_{i+6}) \\
 &\quad - (u_{i+6} - u_{i+7})^{n-1} H(u_{i+6} - u_{i+7}), \\
 \ddot{u}_{i+7} &= (u_{i+6} - u_{i+7})^{n-1} H(u_{i+6} - u_{i+7}). \quad (10)
 \end{aligned}$$

通过近似处理得到的等效链如图 2 所示, 两端球的质量和与邻近球的弹性常数都不变仍然为 1, 中间球的质量均为 μ , 球与球间的弹性常数变为 $\frac{\eta}{2^{n-1}}$.

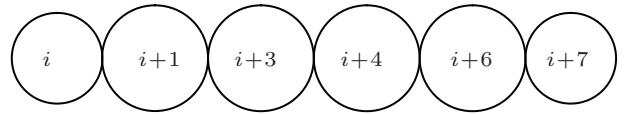


图 2 等效后 2 : 1 周期型颗粒链

经过等效后, 对于第 $i + 2$ 个球的分析就转化成了对等效后链中 $i + 1$ 和 $i + 3$ 球的分析. 二体碰撞碰撞的理论基础是碰撞只发生在邻近有碰撞行为的两个颗粒上. 当两个球之间发生碰撞时, 根据 (10) 式可得其运动微方程为

$$\begin{aligned}
 \mu\ddot{u}_{i+1} &= -\frac{\eta}{2^{n-1}}(u_{i+1} - u_{i+3})^{n-1}, \\
 \mu\ddot{u}_{i+3} &= \frac{\eta}{2^{n-1}}(u_{i+1} - u_{i+3})^{n-1}. \quad (11)
 \end{aligned}$$

定义新的变量 $\delta = u_{i+1} - u_{i+3}$, 则有

$$\begin{aligned}
 \ddot{\delta} &= \ddot{u}_{i+1} - \ddot{u}_{i+3} \\
 &= -\frac{2}{\mu} \cdot \frac{\eta}{2^{n-1}}(u_{i+1} - u_{i+3})^{n-1} \\
 &= -\frac{\eta}{\mu_m 2^{n-1}} \delta^{n-1}, \quad (12)
 \end{aligned}$$

其中 $\mu_m = \mu/2$, 即为把两个球看作一个整体时的等效质量. 已知碰撞前只有第 $i + 1$ 球有速度, $i + 3$ 球的速度为零, 则根据 (7) 式可得到这个小系统的初速度为 ($v_0 = 1$)

$$\dot{\delta}(0) = \dot{u}_{i+1}(0) - \dot{u}_{i+3}(0)$$

$$\begin{aligned} &= \dot{u}_{i+1}(0) = v_{i+1} \\ &= \frac{2v_0}{1+\mu} = \frac{2}{1+\mu}. \end{aligned} \quad (13)$$

根据能量守恒条件 $\frac{1}{2}\mu_m\dot{\delta}^2(t) + \frac{\eta}{2^{n-1}n}\delta^n(t) = \frac{1}{2}\mu_m\dot{\delta}^2(0)$, 则

$$\begin{aligned} \dot{\delta}(t) &= \left[\dot{\delta}^2(0) - \frac{2}{\mu_m} \cdot \frac{\eta}{2^{n-1}n} \delta^n(t) \right]^{1/2} \\ &= \left[\dot{\delta}^2(0) - \frac{\eta}{2^{n-3}n\mu} \delta^n(t) \right]^{1/2}. \end{aligned} \quad (14)$$

当 $i+1$ 与 $i+3$ 球的速度相同即 $\dot{\delta} = 0$ 时, 两球的压缩量达到最大 δ_{\max} . 根据 (14) 式可得最大压缩量

$$\delta_{\max} = \left[\frac{2^{n-3}n\mu}{\eta} \dot{\delta}^2(0) \right]^{1/n}. \quad (15)$$

因此, 孤波从第 $i+1$ 传到第 $i+3$ 个球所用的时间为

$$\begin{aligned} T &= \int_0^{\delta_{\max}} \frac{d\delta}{\dot{\delta}} \\ &= \sqrt{\pi} \left(\frac{2^{n-3}n\mu}{\eta} \right)^{1/n} \left[\dot{\delta}(0) \right]^{2/n-1} \frac{\Gamma(1+1/n)}{\Gamma(1/2+1/n)} \\ &= \sqrt{\pi} 2^{-\frac{2n+1}{2n}} n^{\frac{1}{n}} r^{-\frac{1}{2n}} (1+r)^{\frac{1}{2n}} (2+r^3)^{\frac{1}{n}} \\ &\quad \times (4+r^3)^{\frac{n-2}{n}} \frac{\Gamma(1+1/n)}{\Gamma(1/2+1/n)}, \end{aligned} \quad (16)$$

则波在该链中的传播速度为 $V_s = 1/T$.

小球的振动频率为

$$\begin{aligned} f &= \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{2(n-1)}{m}} \eta^{\frac{1}{n}} \left(\frac{n\mu}{8} \right)^{\frac{n-2}{2n}} \left[\dot{\delta}(0) \right]^{\frac{n-2}{n}} \\ &= \frac{\sqrt{n-1}}{\pi} 2^{\frac{1-n}{2n}} n^{\frac{n-2}{2n}} r^{\frac{1-3n}{2n}} (1+r)^{-\frac{1}{2n}} \\ &\quad \times (2+r^3)^{\frac{n-2}{2n}} (4+r^3)^{\frac{2-n}{n}}. \end{aligned} \quad (17)$$

3.2 $N : 1 (N > 2)$ 周期型二元颗粒链

将该理论分析扩展到 $N > 2$ 的周期型二元颗粒链, N 个大球和一个小球交替排列 (如图 3 所示), 总球数为 $L = MN + M + N$.

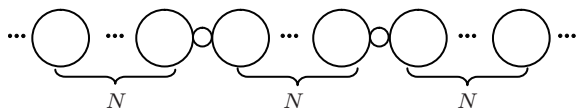


图 3 $M > 2, N > 2$ 的颗粒链

链中各球的运动微分方程为

$$m_1 \ddot{u}_1 = -\eta_1 (u_1 - u_2)^{n-1} H(u_1 - u_2),$$

$$\begin{aligned} m_i \ddot{u}_i &= \eta_{i-1} (u_{i-1} - u_i)^{n-1} H(u_{i-1} - u_i) \\ &\quad - \eta_i (u_i - u_{i+1})^{n-1} H(u_i - u_{i+1}), \\ m_L \ddot{u}_L &= \eta_{L-1} (u_{L-1} - u_L)^{n-1} \\ &\quad \times H(u_{L-1} - u_L), \end{aligned} \quad (18)$$

其中 $i = 2, \dots, L-1$. 采用与上面相同的方法进行近似分析, 可得等效后链 (共 $L-M$ 个球) 中各球的运动微分方程为

$$\begin{aligned} \mu_1 \ddot{u}_1 &= -\mathfrak{R}_1 (u_1 - u_2)^{n-1} H(u_1 - u_2), \\ \mu_i \ddot{u}_i &= \mathfrak{R}_{i-1} (u_{i-1} - u_i)^{n-1} H(u_{i-1} - u_i) \\ &\quad - \mathfrak{R}_i (u_i - u_{i+1})^{n-1} H(u_i - u_{i+1}), \\ \mu_{L-M} \ddot{u}_{L-M} &= \mathfrak{R}_{L-M-1} (u_{L-M-1} - u_{L-M})^{n-1} \\ &\quad \times H(u_{L-M-1} - u_{L-M}), \end{aligned} \quad (19)$$

其中

$$\begin{aligned} \mu &= \mu_N = \mu_{N+1} = \mu_{2N} = \mu_{2N+1} = \dots \\ &= \mu_{MN} = \mu_{MN+1} = 1 + m/2, \\ \mathfrak{R} &= \mathfrak{R}_N = \mathfrak{R}_{2N} = \dots = \mathfrak{R}_{MN} \\ &= \frac{\eta}{2^{n-1}} = 2^{1-n} \left(\frac{2r}{1+r} \right)^{1/2}. \end{aligned} \quad (20)$$

其他的等效质量、半径和弹性常数都为 1. 波通过等效链中第 $N, 2N, \dots, MN$ 个球的时间为

$$\begin{aligned} T_i &= \int_0^{\delta_i^{\max}} \frac{d\delta_i}{\dot{\delta}_i} = \sqrt{\pi} \left(\frac{2^{n-3}n\mu}{\eta} \right)^{1/n} \\ &\quad \times \left[\dot{\delta}_i(0) \right]^{2/n-1} \frac{\Gamma(1+1/n)}{\Gamma(1/2+1/n)}. \end{aligned} \quad (21)$$

波通过第 $N+1, 2N+1, \dots, MN+1$ 个球的时间为

$$\begin{aligned} T_i &= \sqrt{\pi} \left(\frac{n\mu}{4} \right)^{1/n} \left[\dot{\delta}_i(0) \right]^{2/n-1} \\ &\quad \times \frac{\Gamma(1+1/n)}{\Gamma(1/2+1/n)}. \end{aligned} \quad (22)$$

波通过其他球的时间为

$$\begin{aligned} T_i &= \sqrt{\pi} \left(\frac{n}{4} \right)^{1/n} \left[\dot{\delta}_i(0) \right]^{2/n-1} \\ &\quad \times \frac{\Gamma(1+1/n)}{\Gamma(1/2+1/n)}. \end{aligned} \quad (23)$$

根据 (21), (22) 和 (23) 式可以得到波通过整条颗粒链的时间为

$$t = \sum_{i=1}^{L-M} T_i. \quad (24)$$

4 计算结果和讨论

为了验证理论的正确性,我们对 $N : 1$ 周期型二元颗粒链中孤立波的传播行为进行了计算机模拟,并将模拟结果与理论结果进行对比.图 4 为颗粒链中部分粒子的速度随时间的变化图像,图 4(a) 为 $M = 2$ 时的 2:1 周期型二元颗粒链,图 4(b) 为 $M = 25$ 时的 2:1 周期型二元颗粒链.从图中可以看出,等效后的颗粒链中球的速度(用虚线表示)与初始链中相对应球的速度(用实线表示)符合很好.

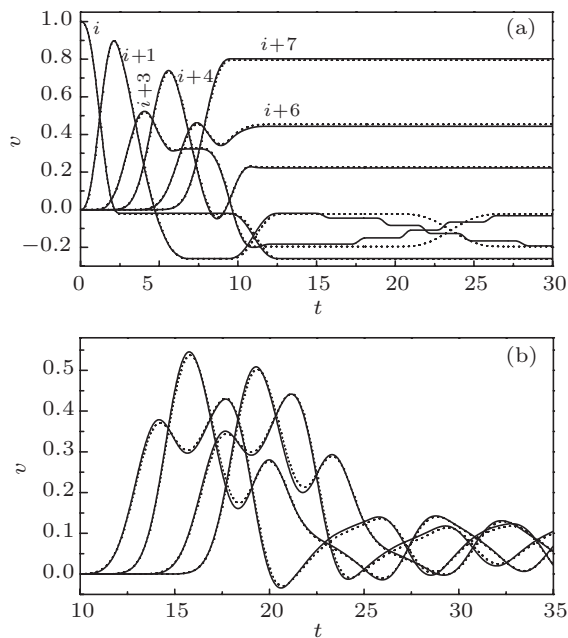


图 4 初始链中大球速度(实线)和等效链中大球速度(虚线)随时间变化图像(小球半径 $r = 0.3$) (a) $M = 2$ 时的 2:1 型周期型二元颗粒链中每个大球的速度变化情况; (b) $M = 25$ 时的 2:1 型周期型二元颗粒链中第 12—15 大球的速度变化情况

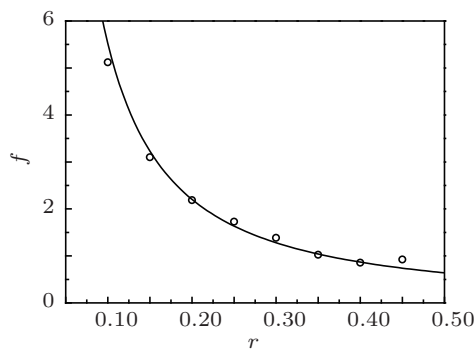


图 5 2:1 周期型二元颗粒链中局域振动频率随小球半径的变化关系(空心圆是计算机模拟结果,实线是理论结果)

图 5 为 2:1 周期型二元颗粒链中小球振动频率随小球半径的变化关系.空心圆是计算机模拟的结

果,实线是 (17) 式的理论计算结果,其中 $n = 5/2$.孤波在颗粒链传播过程中,由于球的大小不均匀性,在小球附近引起的局域振动模.从图 5 中可以看出,局域振动模的频率与小球的半径有关,并随半径减小而增大.另一方面,在近似理论处理过程中,将小球与其相邻的大球等效成一个球,从而使由质量相差较大的两种颗粒组成的颗粒链转化成质量相差较小的两种颗粒组成的颗粒链,即将原本有缺陷的颗粒链近似看作了质量均匀的颗粒链.图 5 进一步验证了上述近似理论处理的正确性.

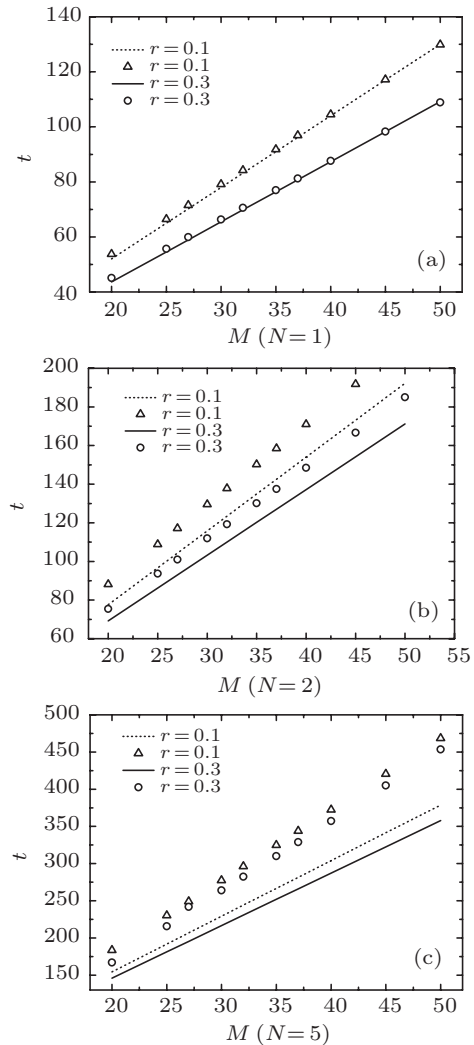


图 6 波通过周期型二元颗粒链的总时间及误差分析(空心三角和空心圆分别表示 $r = 0.1$ 和 $r = 0.3$ 的计算机模拟结果,虚线和实线分别代表了 $r = 0.1$ 和 $r = 0.3$ 的理论计算结果) (a) 波通过 1:1 周期型二元颗粒链的时间随链长的变化; (b) 波通过 2:1 周期型二元颗粒链的时间随链长的变化; (c) 波通过 5:1 周期型二元颗粒链的时间随链长的变化

图 6 为 N 不同的周期型二元颗粒链中波通过整条链所用时间随颗粒链长度的变化关系,其中点代表了计算机模拟结果,线是近似理论 (24) 式的结

果. 图 6(a) 是孤波通过 1:1 周期型二元颗粒链的时间随颗粒链长度变化. 对于 1:1 周期型二元颗粒链, 除等效颗粒链的两端球质量不同外, 近似理论得到其余球的质量均相同, 且球与球之间的弹性常数也相同, 因此可近似看做是均匀的颗粒链. 因此, 从图 6(a) 可以明显看出理论和计算机模拟符合的非常好. 对于 2:1 周期型二元颗粒链, 虽然等效后颗粒链中球的质量和半径均相同, 但是球与球之间的弹性常数有差别, 因此等效的颗粒链是不均匀的. 从图 6(b) 可以看出该情况下的理论结果就相对于计算机模拟结果有了一定的误差. 图 6(c) 为孤波通过 5:1 周期型二元颗粒链的时间随链长的变化情况. 对于 5:1 周期型二元颗粒链, 等效后颗粒链中不仅球的质量和半径有变化, 球与球之间的弹性常数也有差别, 因此近似理论结果与实际偏差较大. 由于采用二体碰撞近似得到球的速度较实际情况大, 因此理论波通过整条链的时间就相对于计算机模拟结果偏小. 从图 6 中可以看出, 对于 $N : 1$ 周期型二元颗粒链, 小球的半径越小, 孤波通过整条颗粒链的时间就越长.

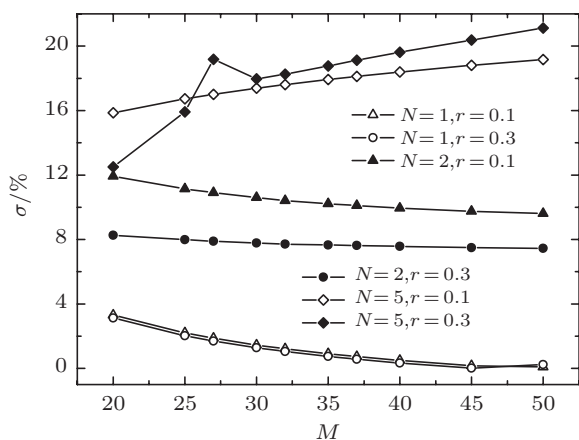


图 7 孤波通过周期型二元颗粒链所用时间的理论计算结果与计算机模拟结果间的相对误差

为了分析近似理论与实际结果的偏差, 定义波

通过颗粒链的时间的理论值为 t_t , 计算机模拟结果为 t_n , 则二者的相对误差 $\sigma = \frac{|t_t - t_n|}{t_n} \times 100\%$. 图 7 给出了 N 不同时 σ 随 M 的变化情况. 当 $N = 1$ 或 $N = 2$ 时, σ 随着颗粒链长度的增加而慢慢减小趋于定值. 对于 1:1 周期型二元颗粒链, 近似理论分析得到的结果相对误差 $< 2\%$; 对于 2:1 周期型二元颗粒链, 理论分析的结果相对误差约为 7.7%. 说明对于 $N \leq 2$ 时 $N : 1$ 周期型二元颗粒链, 二体碰撞近似理论的与计算机模拟结果符合得很好. 随着 N 的增大近似理论所得的结果与计算机模拟结果相差的也越大. 当 $N = 5$ 时, 理论分析的相对误差约为 17.7%, 误差较大.

5 结论

周期型二元颗粒链是最简单的不均匀系统, 对它的研究不仅给物理学诸多领域的研究作了铺垫, 也给许多工程应用提供了理论基础. 由于长波长近似理论对不均匀系统的连续近似处理较为困难且求解微分方程时较为复杂, 该理论还没有对 $N : 1 (N \geq 2)$ 周期型二元颗粒链进行研究. 本文就采用二体碰撞近似理论对 $N : 1 (N \geq 2)$ 周期型二元颗粒链进行了研究. 为了模拟和计算方便, 我们先将速度、质量、半径等量进行了重新标度, 把颗粒链中的小球和与之相邻的大球等效成一个球得到一条等效链, 然后用二体碰撞近似理论上得到了孤波传播速度、通过整条颗粒链的时间以及小球的振荡频率. 发现局域模的振荡频率随着小球半径的增大而减小, 该结果与计算机模拟符合得相当好. 对于 $N \leq 2$ 时 $N : 1$ 周期型二元颗粒链, 二体碰撞近似理论的与计算机模拟结果符合得很好. 随着 N 的增大近似理论所得的结果与计算机模拟结果相差的也越大. 该研究有利于人们对更复杂的颗粒链中孤波传播行为的理解.

[1] Huang J, Sun Q C 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 6124 (in Chinese) [黄晋, 孙其诚 2007 物理学报 **56** 6124]
 [2] Wang P J, Xia J H, Liu C S, Liu H, Yan L 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 014501 (in Chinese) [王平建, 夏继宏, 刘长松, 刘会, 闫龙 2011 物理学报 **60** 014501]
 [3] Sen S, Hong J, Bang J, Acalos E, Doney R 2008 *Phy. Rep.* **462** 21
 [4] Carretero-González R, Khatri D, Porter M A, Kevrekidis P G, Daraio C 2009 *Phys. Rev. Lett.* **102** 024102

[5] Hong J, Xu A 2001 *Phys. Rev. E* **63** 061310
 [6] Hong J 2005 *Phys. Rev. Lett.* **94** 108001
 [7] Daraio C, Nesterenko V F, Herbold E B, Jin S 2006 *Phys. Rev. Lett.* **96** 058002
 [8] Daraio C, Ngo D, Nesterenko V F, Fraternali F 2010 *Phys. Rev. E* **82** 036603
 [9] Job S, Santibanez F, Tapia F, Melo F 2009 *Phys. Rev. E* **80** 025602(R)

- [10] Porter M A, Daraio C, Herbold E B, Szelengowicz I, Kevrekidis P G 2008 *Phys. Rev. E* **77** 015601(R)
- [11] Vergara L 2006 *Phys. Rev. E* **73** 066623
- [12] Wang P J, Xia J H, Li Y D, Liu C S 2007 *Phys. Rev. E* **76** 041305
- [13] Wang P J, Li Y D, Xia J H, Liu C S 2008 *Phys. Rev. E* **77** 060301(R)
- [14] Daraio C, Nesterenko V F, Herbold E B, Jin S 2005 *Phys. Rev. E* **72** 016603
- [15] Nesterenko V F, Daraio C, Herbold E B, Jin S 2005 *Phys. Rev. Lett.* **95** 158702
- [16] Hascoet E, Herrmann H J 2000 *Eur. Phys. J. B* **14** 183
- [17] Daraio C, Nesterenko V F 2006 *Phys. Rev. E* **73** 026612
- [18] Jayaprakash K R, Starosvetsky Y, Vakakis A F 2011 *Phys. Rev. E* **83** 036606
- [19] Rosas A, Lindenberg K 2004 *Phys. Rev. E* **69** 037601
- [20] Harbola U, Rosas A, Esposito M, Lindenberg K 2009 *Phys. Rev. E* **80** 031303
- [21] Harbola U, Rosas A, Romero A H, Esposito M, Lindenberg K 2009 *Phys. Rev. E* **80** 051302
- [22] Harbola U, Rosas A, Romero A H, Lindenberg K 2010 *Phys. Rev. E* **82** 011306
- [23] Pinto I L D, Rosas A 2010 *Phys. Rev. E* **82** 031308
- [24] Pinto I L D, Rosas A, Lindenberg K 2009 *Phys. Rev. E* **79** 061307

Binary collision approximation for solitary wave in periodic dimer granular chains*

Chen Qiong¹⁾ Yang Xian-Qing^{1)†} Zhao Xin-Yin¹⁾ Wang Zhen-Hui¹⁾ Zhao Yue-Min²⁾

1) (College of Science, China University of Mining and Technology, Xuzhou 221116, China)

2) (School of Chemical Engineering & Technology, China University of Mining and Technology, Xuzhou 221116, China)

(Received 27 May 2011; revised manuscript received 1 September 2011)

Abstract

We study solitary wave propagation in periodic dimer granular chains of beads with the same material but different sizes by binary collision approximation. This kind of chain which is called “ $N : 1$ dimer” consists of pairs of N big beads and one small bead. First we present a method to map the actual chain into an effective chain, then use the binary collision approximation to obtain the transmitted solitary wave speed, the total time taken by the pulse to pass through the chain, and the frequency of oscillation of the small particle. Frequency of oscillation, which increases with the decrease of the radius of the small particle, is analytically obtained. And the results are in excellent agreement with numerical results. For the total time of the pulse passing through the chain, the results of theoretical analysis is in good agreement with numerical results when $N \leq 2$. The relative error seems no change with the chain length but becomes larger with the increase of the value of N .

Keywords: periodic dimer granule chain, solitary wave, binary collision approximation

PACS: 45.70.-n, 46.40.Cd, 43.25.+y

* Project supported by the Science Fund for Creative Research Groups of the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 50921002) and the Fundamental Research Funds for the Central Universities (Grant No. 2010LKWL09).

† E-mail: xianqiang@163.com