

利用重要度评价矩阵确定复杂网络关键节点

周漩[†] 张凤鸣 李克武 惠晓滨 吴虎胜

(空军工程大学工程学院, 西安 710038)

(2011年1月18日收到; 2011年6月11日收到修改稿)

为了对复杂网络节点重要度进行评估, 针对节点删除法、节点收缩法和介数法的不足, 通过定义节点效率和节点重要度评价矩阵, 提出了一种利用重要度评价矩阵来确定复杂网络关键节点的方法. 该方法综合考虑了节点效率、节点度值和相邻节点的重要度贡献, 用节点度值和效率值来表征其对相邻节点的重要度贡献, 其优化算法的时间复杂度为 $O(Rn^2)$. 实验分析表明该方法可行有效, 对于大型复杂网络可以获得理想的计算能力.

关键词: 复杂网络, 关键节点, 节点效率, 重要度贡献

PACS: 02.10.Ox

1 引言

复杂网络是复杂系统的高度抽象, 它往往有着大量的节点, 节点之间有着复杂的连接关系. 随着复杂网络特性研究的深入, 如何在复杂网络环境下保证网络的可靠性与抗毁性已经成为复杂网络研究的重要课题^[1]. 研究表明, 不同拓扑结构的网络对不同方式的攻击具有不同的抗毁性^[2], 在随机攻击下无标度网络比随机网络具有更强的容错性; 但在蓄意攻击下, 无标度网络却又显得异常脆弱. 因此, 对复杂网络节点重要度的评估是一项很有意义的工作. 由节点重要度评估找出关键节点, 通过重点保护这些关键节点来提高整个网络的可靠性^[3-5]. 节点的重要性可以通过节点中心性来衡量, 常用的复杂网络中心性指标有度指标、紧密度指标、特征向量指标、介数指标和流介数指标等^[6-10]. 介数指标似乎能很好地衡量节点的重要度, 即经过该节点的最短路径越多该节点越重要, 但其算法时间复杂度高, 对于大规模的复杂网络并不适用. 也有学者提出了一些新的复杂网络中心性指标: 文献^[11]根据删除特定节点后的生成树的数量来评估节点的重要程度, 定义最重要的节点为

删除该节点使得生成树数目最小; 文献^[12]通过定义网络的凝聚度, 提出了一种评估复杂网络节点重要度的节点收缩方法, 认为最重要的节点就是将节点收缩后使得网络的凝聚度最大; 文献^[13]考虑了网络中不同节点间的联接关系对节点重要性的影响, 通过定义节点重要性贡献矩阵, 提出了一种利用节点间关联特性的通信网络节点重要性评价方法. 但是, 它们都存在缺陷. 对于节点删除法, 如果多个节点的删除都使得网络不连通, 那么这些节点的重要度是一致的, 由于它没有考虑相邻节点的影响, 从而使得评估结果不精确. 对于节点收缩法, 如果多个节点收缩后使得网络的拓扑结构一致, 这些节点也拥有相同的重要程度, 由于它没有考虑网络拓扑的特殊性, 该方法对特殊节点重要性的度量发挥不了应有的效果, 如链状网络中的节点. 文献^[13]所定义的节点重要性贡献值与度值成反比, 度值越大对相邻节点的贡献越小, 与实际的操作存在差距. 基于以上考虑, 本文为了对复杂网络中节点重要度进行评估, 提出了一种利用重要度评价矩阵来确定复杂网络关键节点的方法, 该方法综合考虑了节点在网络信息传输过程中所起的作用、节点度值和相邻节点的重要度贡献, 能够克服节点删

[†] E-mail: zhouxuan_333@126.com

除法和节点收缩法的不足,使复杂网络中节点重要度的评价更加准确. 本文结构如下: 首先定义节点效率和节点重要度评价矩阵,用节点的度值和效率值来表征它对相邻节点的重要度贡献;然后给出了关键节点确定算法,并对其进行了优化;最后通过实验分析来验证其有效性和可行性.

2 复杂网络关键节点确定

由于复杂网络通常由大量节点组成,并且节点之间通过边进行交互,任何节点的删除或添加都可能影响整个网络的连通性和节点的负载,这也正是目前多数节点重要性评价方法的基础,如节点删除法^[11]、介数法等. 因此,任何互相连通的节点间都存在一定的节点重要性依赖关系,而最直接、最重要的依赖关系存在于相邻(直接相连)节点之间^[13]. 基于此种考虑,文献[13]提出了利用节点重要性贡献关系来评估节点重要性的方法,但是该方法把节点的重要度平均分配给相邻节点,与实际应用不符. 在实际操作过程中,节点的重要度越大、度值越高,则它对相邻节点的影响应该越大. 基于此,本文对文献[13]提出的方法进行修正,提出一种新的利用重要度评价矩阵来确定复杂网络中关键节点的方法,综合考虑节点自身在网络信息流通中所起的作用和相邻节点对其的重要度贡献. 本文运用节点效率来表征节点在网络信息流通中所起的作用,运用节点的度值和效率值来表征相邻节点的重要度贡献. 节点效率体现了节点在网络中的全局重要性,相邻节点的重要度贡献体现了节点的局部重要性.

2.1 理论基础

设图 $G=(V, L)$ 是一个无自环的无向网络,其中 $V=\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ 是网络中所有节点的集合; $L=\{l_1, l_2, \dots, l_m\}$ 且 $L \subseteq V \times V$ 是节点间边的集合.

定义 1 节点度值是指与该节点直接相连的节点数目. 目前普遍认为节点的重要度与其度值有很大的关系,所以,节点的度值能直接反映节点对其相邻节点的影响力. 度值越大,节点对其相邻节点的重要度贡献越大.

定义 2 节点距离是指两节点之间最短路径上的边数,用 d 表示. 如果 v_i 和 v_j 之间不存在路径,则 $d_{ij} \rightarrow \infty$. 网络中任意两个节点之间距离的最大值为网络的直径 R .

定义 3 网络效率 E 是指网络中所有节点对之间距离倒数之和的平均值,它用来表示网络信息流通的平均难易程度. 网络效率越高,网络信息流通越容易.

$$E = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i \neq j} \frac{1}{d_{ij}}, \quad (1)$$

式中, n 为网络中节点数目, d_{ij} 为节点 i 和 j 之间的距离.

2.2 构建重要度评价矩阵

由于网络是由节点和边组成的统一整体,节点的重要度必然要受其相邻节点的影响. 如图 1 所示,如果节点 6 和节点 7 之间没有连接,那么节点 7 的存在对节点 6 并没有多大影响,而一旦节点 6 和节点 7 之间建立连接,就会使得整个网络的效率、度值、最短路径等特性发生变化,由此可知节点的相连是存在重要度贡献的;另一方面,节点 4 和节点 7 虽然具有相同的度值,但是它们在网络中的重要程度是不一致的,究其原因是由于节点自身在网络中的位置和相邻节点的不同而造成的. 显然,单纯地运用度值来衡量节点的重要度是存在明显缺陷的;介数法和节点删除法^[11] 同样也只是考虑了节点的全局重要性(位置信息),而忽略了节点的局部重要性(相邻节点信息). 因此,为了克服这些缺陷,在复杂网络节点重要度评价过程中需要综合考虑节点自身在网络中所处位置(全局重要性)和相邻节点的重要度贡献(局部重要性).

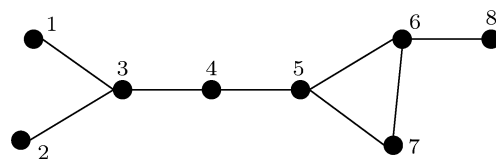


图 1 节点间重要度贡献关系图

彼此孤立的节点之间不存在重要度依赖关系,一旦节点间相互连接,就可能会导致节点负载和重要度的变化,通过节点之间的传递,就会形成一个

重要度贡献关系的拓扑, 它的结构来自于实际网络的拓扑, 是实际网络拓扑的一个映射. 由于网络的邻接矩阵反映了节点之间直接相邻的情况, 而节点间最重要的重要度贡献关系存在于相邻节点之间, 因此节点间的重要度贡献关系可以用邻接矩阵的映射矩阵来表示, 本文将该矩阵定义为节点重要度贡献矩阵.

$$\mathbf{H}_{IC} = \begin{bmatrix} 1 & \delta_{12}D_2/\langle k \rangle^2 & \cdots & \delta_{1n}D_n/\langle k \rangle^2 \\ \delta_{21}D_1/\langle k \rangle^2 & 1 & \cdots & \delta_{2n}D_n/\langle k \rangle^2 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \delta_{n1}D_1/\langle k \rangle^2 & \delta_{n2}D_2/\langle k \rangle^2 & \cdots & 1 \end{bmatrix}, \quad (2)$$

其中, δ_{ij} 为网络邻接矩阵中对应的元素, 称为贡献分配参数, 当 v_i 与 v_j 直接相连时取值为 1, 否则取值为 0; 对角线上的数表示节点对自身的重要度贡献比例值为 1. 从定义 4 可以看出, 节点重要度贡献矩阵 \mathbf{H}_{IC} 与网络的邻接矩阵具有相同的结构, 它是网络邻接矩阵的一个映射, 映射规则为

$$\begin{cases} \delta_{ij} \rightarrow \delta_{ij}D_j/\langle k \rangle^2 & i \neq j, \\ \delta_{ij} \rightarrow 1 & i = j, \end{cases} \quad (3)$$

它反映的是网络重要度贡献关系的拓扑, 这种结构能够充分利用邻接矩阵的信息, 便于计算机实现. \mathbf{H}_{ICij} 表示节点 j 对节点 i 的重要度贡献比例值, 它的形式与文献 [13] 有所不同, 目的是为了避开节点重要度的平均分配、克服文献 [13] 方法的不足, 使得度值越大的节点对其相邻节点的影响越大.

为了体现节点在网络信息传输过程中所起的作用, 依据网络效率的定义, 本文定义节点 k 的效

定义 4 节点重要度贡献矩阵. 在节点数目为 n , 平均度值为 $\langle k \rangle$ 的无自环无向网络中, 若节点 v_i 的度为 D_i , 则 v_i 将自身重要度的 $D_i/\langle k \rangle^2$ 贡献给它的每一个相邻节点. 将所有节点对其相邻节点的重要度贡献比例值用矩阵的形式表示出来, 就形成了节点重要度贡献矩阵, 记为 \mathbf{H}_{IC} :

率 I_k 为

$$I_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1, i \neq k}^n \frac{1}{d_{ki}}, \quad (4)$$

式中, n 为网络中节点数目, d_{ki} 为节点 k 和 i 之间的距离. 从 I_k 的定义中可以看出, 一个节点的效率表达了该节点到网络中其他节点的平均难易程度, 体现了该节点对网络信息传输所做的贡献, 所以节点效率值越大, 表明该节点在网络信息传输过程中所处位置越重要, 移除此节点导致网络信息传输性能下降的可能性就越大. 可见, 节点的效率在一定程度上反映了节点的重要程度.

由于节点的重要程度取决于两个因素: 节点的位置信息和节点的相邻信息. 因此, 本文用度来构建节点之间的重要度关联, 用节点的效率来表征节点的位置信息. 融合节点的效率值, 并用节点的重要度贡献值来代替 \mathbf{H}_{IC} 中的重要度贡献比例值, 就可以得到节点重要度评价矩阵 \mathbf{H}_E

$$\mathbf{H}_E = \begin{bmatrix} I_1 & \delta_{12}D_2I_2/\langle k \rangle^2 & \cdots & \delta_{1n}D_nI_n/\langle k \rangle^2 \\ \delta_{21}D_1I_1/\langle k \rangle^2 & I_2 & \cdots & \delta_{2n}D_nI_n/\langle k \rangle^2 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \delta_{n1}D_1I_1/\langle k \rangle^2 & \delta_{n2}D_2I_2/\langle k \rangle^2 & \cdots & I_n \end{bmatrix}, \quad (5)$$

式中, \mathbf{H}_{Eij} 表示节点 j 对节点 i 的重要度贡献值. 可以看出, 一个节点对其相邻节点的重要度贡献值与节点自身的效率和度值有关, 节点的效率值越

大、度值越高, 则它对相邻节点的重要度贡献越大.

运用节点重要度评价矩阵 \mathbf{H}_E , 综合考虑节点自身的效率和相邻节点的重要度贡献, 可以定义节

点 i 的重要度 C_i :

$$C_i = I_i \times \sum_{j=1, j \neq i}^n \delta_{ij} D_j I_j / \langle k \rangle^2, \quad (6)$$

C_i 表示所有与节点 i 相邻的节点重要度贡献值之和与节点 i 效率值的乘积. 从 (6) 式可以看出, 一个节点的重要度取决于它自身的效率值、度值、相邻节点的效率值和度值的大小, 它综合了节点的全局重要性和局部重要性, 能够提高节点重要度评估的精度, 符合节点重要度评估的实际需要.

2.3 关键节点确定算法

综合考虑节点的效率和相邻节点的重要度贡献, 相当于同时利用了节点的位置信息和度的信息, 运用此方法对复杂网络中节点重要度进行评价, 可以获得比较精确的评价结果. 下面我们给出评估节点重要度的简单算法步骤:

输入: 复杂网络邻接矩阵 $A = (\alpha_{ij})_{n \times n}$

输出: 节点 i 的重要度 C_i

Begin

1) 计算所有节点对之间的最短距离矩阵 $Dis = [d_{ij}]$ /Floyd 算法;

2) 确定节点重要度贡献矩阵 H_{IC}

For $i=1$ to n

(根据 A 确定节点 v_i 的度值和其相邻节点; 按照定义填入 H_{IC} 中)

3) 确定节点重要度评价矩阵 H_E

For $i=1$ to n

(根据 Dis 确定节点 v_i 的效率值 I_i ; 将 H_{IC} 第 i 列中的数都乘以 I_i 作为 H_E 的第 i 列)

4) 计算每个节点的重要度

For $i=1$ to n

(根据 (6) 式, 计算每个节点的重要度, 输出 C_i)

End

从上述算法步骤可以看出, 整个算法的时间复杂度取决于所有节点对之间最短距离矩阵 $Dis = [d_{ij}]$ 的计算. 由于 Floyd 算法的时间复杂性为 $O(n^3)$, 所以该算法的时间复杂性为 $O(n^3)$. 针对 Floyd 算法计算节点对之间最短距离的特点, 本文为了降低其时间复杂性, 可以对其进行优化. 由于 Floyd 算法在计算最短距离矩阵 $Dis = [d_{ij}]$ 过程中, 需要对邻接矩阵 A 进行 n 次乘方 (即进行 n 次循环), 但是当网络中所有节点对之间的最短距离

都已经找到时, 我们就会发现 $Dis = [d_{ij}]$ 在后续循环过程中保持不变. 因此, 在求解 $Dis = [d_{ij}]$ 过程中, 如果盲目地进行 n 次循环, 势必会造成计算资源的浪费、提高算法的时间复杂度. 基于此, 本文在运用 Floyd 算法计算 $Dis = [d_{ij}]$ 过程中, 通过设置标识矩阵来判断节点对之间的最短距离是否已经找到, 一旦找到便跳出循环, 从而减少程序运行的时间, 提高算法的效率. 根据随机矩阵理论, 我们可以知道任意节点对之间的最短距离都可以通过邻接矩阵 $A = (\alpha_{ij})_{n \times n}$ 的乘方来求得. 若节点对之间的最短距离都已经确定, 意味着网络中节点对之间距离的最大值 (网络的直径 R) 也已经确定. 由此可知, 经过优化后本文算法的时间复杂性变为 $O(Rn^2)$. 当网络具有小世界特性, 且网路直径 $R \ll n$ 时, 算法的时间复杂度可以达到 $O(n^2)$, 对大规模复杂网络节点重要度的评价可以获得理想的计算能力.

3 实验分析

3.1 算法有效性分析

如图 1 所示, 网络中有 8 个节点、8 条边, 显然节点的连接度值不能很好地衡量节点的重要度, 如节点 v_3, v_5, v_6 的连接度都为 3, 但它们的重要度显然不同; 对于节点 v_4 虽然它的度值为 2, 但它却处在网络信息传输的关键位置, 它的重要度应该很大. 采用文献 [11] 提出的节点删除法对图 1 中节点的重要度进行评价, 由于节点 v_3, v_4, v_5, v_6 的删除都会使得网络不再连通, 即这些节点删除后生成树数目都为 0, 从而重要度都为 1, 但从直观上判断它们之间的重要程度是有差异的. 采用文献 [12] 提出的方法, 对节点 v_5, v_6 进行节点收缩操作, 由于 v_5, v_6 拓扑结构的特殊性, 它们收缩后网络拓扑结构相同, 使得该方法不能区分它们之间的重要程度. 由此可见, 它们都存在一定的缺陷. 究其原因, 是由于这些方法都只考虑了节点自身在网络中的位置, 而没有考虑相邻节点的重要度贡献. 尽管介数法能够很好地体现节点在信息传输过程中所起的作用, 但是该方法时间复杂度高, 并且对于一些特殊的节点也发挥不了应有的作用, 如 v_4, v_5 . 本文所提出的方法

则避免了这种情况的发生,它综合考虑了节点在网络中的全局重要性和局部重要性,不仅体现了节点自身的重要度和度值,而且体现了相邻节点的影响.运用该方法对节点重要度进行评估,可以显著地区分各节点之间的重要程度,能够提高节点重要度评估的精度,具体评估结果如表 1 所示.

从表 1 可以看出,运用本文所提方法对简单网络节点重要度的评价可以取得一定的效果,能够很好地区分各节点之间的重要程度,有效避免了度值法、节点删除法、节点收缩法的不足.为了进一步说明本文方法的有效性,本文利用图 2 对所提方法进行分析.图 2 是美国的 ARPA (Advanced Research Project Agency) 网络拓扑,它由 21 个节点和 23 条链路组成. ARPA 拓扑是目前分析网络节点重要性时普遍使用的干线网络拓扑,其网络平均度值在 2—3 之间,大部分节点的度值为 2.

表 1 节点重要度评估结果

节点	连接度	介数法	节点删除法	节点收缩法	本文算法
v_1	1	0	0	0.188	0.157
v_2	1	0	0	0.188	0.157
v_3	3	0.393	1	0.594	0.254
v_4	2	0.429	1	0.473	0.461
v_5	3	0.429	1	0.544	0.535
v_6	3	0.214	1	0.544	0.417
v_7	2	0	0.667	0.351	0.404
v_8	1	0	0	0.205	0.152

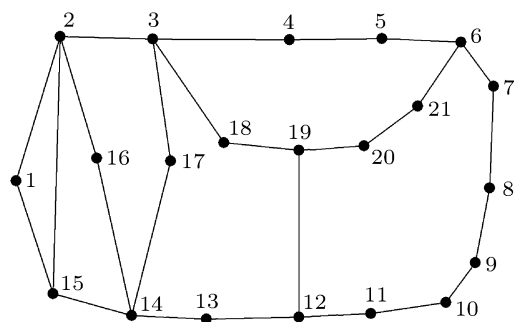


图 2 ARPA 网络拓扑

表 2 是运用本文所提算法以及文献 [11] 和文献 [13] 所述方法对图 2 中节点重要度进行评估的结果.3 种方法得出的节点重要度评估结果有所差

异,原因是各方法判断的侧重点不同.本文算法评价的依据是各节点对网络信息传输的贡献;而文献 [11] 和文献 [13] 分别依据的是节点为网络提供最短可用路由的能力和移除节点后网络生成树数目的变化.运用本文算法可以得出 ARPA 网络中最重要节点是 v_2 .

从表 2 还可以看出,文献 [11] 节点删除法认为节点 v_7 到 v_{11} 的重要度是相同的,而根据本文的算法,这 5 个节点的重要程度是有区别的,这一点与文献 [13] 的结论一致,说明本文所提方法是有效的,它对网络节点重要度的评估具有更高的精度,它能显著地区分复杂网络中特殊节点间的重要度差异.

表 2 ARPA 网络节点重要度评估结果

节点	本文算法	文献 [11]	文献 [13]
v_1	0.1528	0.6262	0.0355
v_2	0.2987	0.9721	0.1770
v_3	0.2984	0.9930	0.4526
v_4	0.1562	0.8387	0.2948
v_5	0.1090	0.8387	0.2776
v_6	0.1261	0.9836	0.3294
v_7	0.0935	0.8797	0.1899
v_8	0.0634	0.8797	0.1458
v_9	0.0624	0.8797	0.1399
v_{10}	0.0680	0.8797	0.1921
v_{11}	0.1062	0.8797	0.2684
v_{12}	0.1815	0.9780	0.4393
v_{13}	0.1839	0.8051	0.2466
v_{14}	0.2369	0.9864	0.2625
v_{15}	0.2522	0.8787	0.1018
v_{16}	0.1978	0.6639	0.0708
v_{17}	0.2214	0.6977	0.1530
v_{18}	0.1970	0.7701	0.2383
v_{19}	0.1845	0.9671	0.3630
v_{20}	0.1115	0.8279	0.1734
v_{21}	0.1023	0.8279	0.1627

3.2 算法效率分析

分别运用本文算法、本文优化算法、介数法和文献 [11] 中的节点删除法在 Intel Core 2 Duo 2.66 GHz 微机上运行 MATLAB 程序对不同规模的

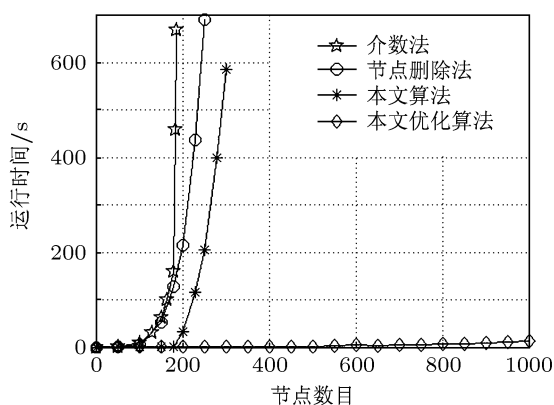


图3 不同节点数目网络中的运行时间

随机网络 (ER 模型, 连接概率 $p = 0.3$) 进行节点重要度评估, 运行时间 (多次取样平均值) 如图 3 所示. 从图中可以看出, 当节点数目较多时, 本文方法要明显优于节点删除法和介数法, 评估 100 个节点的重要度不超过 1 s. 由于 ER 随机网络具有较小的网

络直径, 因此经过优化后的本文算法, 其计算能力更优, 评估 1000 个节点的重要度也不超过 30 s. 这说明本文提出的节点重要度评价方法是有效的, 对于大型复杂网络可以获得理想的计算能力.

4 结论

针对节点删除法、节点收缩法和介数法的不足, 本文综合考虑节点效率、节点度值和相邻节点的重要度贡献, 用节点效率来表征节点的全局重要性, 用相邻节点的重要度贡献来表征节点的局部重要性. 通过构造节点重要度评价矩阵, 提出了一种利用重要度评价矩阵来确定复杂网络中关键节点的方法, 并给出了其优化算法, 该算法的时间复杂度为 $O(Rn^2)$. 最后的实验分析表明, 该方法可行有效, 它能够体现节点之间的重要性差异, 能够使节点重要性的评价更加准确, 它适用于大规模复杂网络中关键节点的确定.

[1] Wang J W, Rong L L, Guo T Z 2008 *4th International Conference on Wireless Communications, Networking and Mobile Computing* Dalian, China September 19–21, 2008 1

[2] Paul H, Seth B 2008 *Proc. of the 41st Annual Hawaii International Conference on System Sciences* Hawaii January 7–10, 2008 1

[3] Eunice E S, Long P, Dustin A, Morgan P 2006 *IEEE International Conference on Systems, Man and Cybernetics* Taipei, China October 8–11, 2006 4693

[4] Marcio R D S, Ma H W, Zeng A P 2008 *Proc. IEEE* **96** 1411

[5] Zhang D Z, Gao L X, Zhang H S, Liu J M 2008 *International Workshop on Knowledge Discovery and Data Mining* Adelaide January 23–24, 2008 59

[6] Bader D A, Madduri K 2006 *International Conference on Parallel Processing* Ohio August 14–18, 2006 539

[7] Mahdi J, Ali A R, Martin H 2008 *IEEE International Symposium on Circuits and Systems* Seattle May 18–21, 2008 2522

[8] William J C, David J F 2008 *IEEE International Conference on Data Mining Workshops* Pisa December 15–19, 2008 949

[9] Qin S, Dai G Z, Li Y L 2006 *Sixth IEEE International Conference on Data Mining-Workshops* Hong Kong, China December 18–22, 2006 284

[10] Brandes U, Kenis P, Wagner D 2003 *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics* **9** 241

[11] Chen Y, Hu A Q, Hu X 2004 *J. China Institute Commun.* **25** 129 (in Chinese) [陈勇, 胡爱群, 胡啸 2004 通信学报 **25** 129]

[12] Tan Y J, Wu J, Deng H Z 2006 *Syst. Eng. Theory & Practice* **26** 79 (in Chinese) [谭跃进, 吴俊, 邓宏钟 2006 系统工程理论与实践 **26** 79]

[13] Zhao Y H, Wang Z L, Zheng J, Guo X J 2009 *J. Beijing University of Aeronautics and Astronautics* **35** 1076 (in Chinese) [赵毅寰, 王祖林, 郑晶, 郭旭静 2009 北京航空航天大学学报 **35** 1076]

Finding vital node by node importance evaluation matrix in complex networks

Zhou Xuan[†] Zhang Feng-Ming Li Ke-Wu Hui Xiao-Bin Wu Hu-Sheng

(Engineering College, Air Force Engineering University, Xi'an 710038, China)

(Received 18 January 2011; revised manuscript received 11 June 2011)

Abstract

In order to evaluate the node importance in complex network, considering the disadvantages of node deletion method, node contraction method and betweenness method, through defining the node efficiency and the node importance evaluation matrix, a method to find the vital node in complex networks is proposed by using the node importance evaluation matrix. Considered in this method are the node efficiency, node degree and adjacent node importance contributions, and used adjacent node degree and efficiency value to characterize the contribution of their importance. Finally, an optimized algorithm whose time complexity was $O(Rn^2)$ is provided. Experiments show that this method is effective and feasible, and it is applicable to large scale complex networks.

Keywords: complex network, vital node, node efficiency, importance contribution

PACS: 02.10.Ox

[†] E-mail: zhouxuan_333@126.com