

## 弹性力学的复变量无网格局部 Petrov-Galerkin 法\*

杨秀丽<sup>1)</sup> 戴保东<sup>1)†</sup> 栗振锋<sup>2)</sup>

1) (太原科技大学工程力学系, 太原 030024)

2) (太原科技大学交通与物流学院, 太原 030024)

(2011年5月5日收到; 2012年6月25日收到修改稿)

复变量移动最小二乘法构造形函数, 其优点是采用一维基函数建立二维问题的试函数, 使得试函数中所含的待定系数减少, 从而有效提高计算效率. 文章基于复变量移动最小二乘法和局部 Petrov-Galerkin 弱形式, 采用罚函数法施加边界条件, 推导相应的离散方程, 提出弹性力学的复变量无网格局部 Petrov-Galerkin 法. 数值算例验证了该方法的有效性.

**关键词:** 无网格法, 复变量移动最小二乘法, 无网格局部 Petrov-Galerkin 法, 弹性力学问题

**PACS:** 02.60.-x, 02.70.Pt, 02.70.-c, 46.25.-y

## 1 引言

无网格法利用一组散布在问题域以及域边界上的场节点表示该问题域及其边界, 基于这些节点构造近似函数, 不会产生因网格重构和畸变引起的困难, 在数值模拟高速碰撞、动态断裂以及移动边界等问题时具有很多基于网格的数值方法无法比拟的优点. 利用无网格法求解工程实际问题已经成为当前计算力学领域的研究热点之一<sup>[1]</sup>.

目前发展的无网格法有十几种, 它们的主要区别在于使用了不同的形函数或微分方程的等效形式. 这些无网格法主要包括无单元 Galerkin 法 (element-free Galerkin method, EFG)<sup>[2,3]</sup>、无网格局部 Petrov-Galerkin 法 (meshless local Petrov-Galerkin method, MLPG)<sup>[4-6]</sup>、再生核粒子法 (reproducing kernel particle method, RKPM)<sup>[7,8]</sup>、有限点法 (the finite point method, FPM)<sup>[9,10]</sup>、点插值法 (point interpolation method, PIM)<sup>[11]</sup>、复变量无网格法<sup>[12]</sup> 以及基于边界积分方程的无网格法<sup>[13-16]</sup> 等.

无网格局部 Petrov-Galerkin 法是基于移动最小二乘法 (moving least-squares, MLS)<sup>[17-19]</sup> 和非 Galerkin 的局部弱形式形成的, 其试函数和加权函数取自不同的函数空间, 数值积分在基于节点的

局部子域上进行, 无论是构造近似函数, 还是数值积分都不需要划分任何单元或网格, 是一种真正的无网格法, 该方法在很多领域得到了广泛应用<sup>[20]</sup>. 但是这一方法采用移动最小二乘法构造近似函数, 数值实施过程中要涉及大量的矩阵相乘和求逆, 存在配点多、计算量大等缺点, 而且边界条件施加比较麻烦, 从而影响了该方法的计算效率.

程玉民等<sup>[21]</sup> 将复变量引入移动最小二乘法提出复变量移动最小二乘法, 将二维问题的两个未知量归结为一个未知量来建立形函数, 其优点是基函数较为简单, 所形成的无网格方法可取较少节点. 程玉民等<sup>[22,23]</sup> 研究弹性力学和断裂力学的复变量无网格法, 陈丽等<sup>[24-26]</sup> 讨论复变量重构核离子法, Liew 等<sup>[27,28]</sup> 建立了复变量边界无单元法. 本文将复变量移动最小二乘法引入局部 Petrov-Galerkin 法, 采用罚函数法施加边界条件, 建立复变量无网格局部 Petrov-Galerkin 法. 该方法不仅保持了传统无网格局部 Petrov-Galerkin 法的优势, 而且在形函数的构造中采用一维基函数建立二维问题的试函数, 使得试函数中所含的待定系数减少, 进而提高了计算效率.

本文以二维弹性力学问题为例, 采用加权残量法推导复变量无网格局部 Petrov-Galerkin 法的离散方程, 并通过数值算例验证该方法的有效性.

\* 国家自然科学基金 (批准号: 51078250) 资助的课题.

† E-mail: Dai.baodong@126.com

## 2 复变量移动最小二乘法

提出复变量移动最小二乘法主要是针对目前移动最小二乘法形成的无网格方法存在易形成病态或奇异方程组、配点过多、计算量大等缺点. 移动最小二乘法是对标量函数而言的, 而复变量移动最小二乘法则是对向量函数的逼近. 取试函数

$$\begin{aligned} \bar{u}^h(z) &= u_1^h(z) + i \cdot u_2^h(z) \\ &= \sum_{j=1}^m p_j(z) a_j(z) = \mathbf{p}^T(z) \mathbf{a}(z), \\ z &= x_1 + ix_2 \in \Omega, \end{aligned} \quad (1)$$

其中  $\bar{u}^h(z)$  为  $\tilde{u}(z)$  的逼近函数,  $p_j(z)$  是基函数,  $a_j(z)$  是相对应的系数,  $m$  为基函数的个数.

对于 (1) 式的整体逼近, 在点  $z$  的邻域内的局部逼近定义为

$$\bar{u}^h(z, \bar{z}) = \sum_{j=1}^m p_j(\bar{z}) a_j(z) = \mathbf{p}^T(\bar{z}) \mathbf{a}(z), \quad (2)$$

定义加权离散的模为

$$\begin{aligned} J &= \sum_{I=1}^n W(z - z_I) [\bar{u}^h(z, z_I) - \tilde{u}(z_I)]^2 \\ &= \sum_{I=1}^n W(z - z_I) \\ &\quad \times \left[ \sum_{j=1}^m p_j(z_I) a_j(z) - \tilde{u}(z_I) \right]^2, \end{aligned} \quad (3)$$

其中  $z_I$  为点  $z$  的紧支域内的节点.

$$\tilde{u}(z_I) = u_1(z_I) + i \cdot u_2(z_I). \quad (4)$$

(3) 式可用矩阵表示为

$$J = (\mathbf{P}\mathbf{a} - \tilde{\mathbf{u}})^T \mathbf{W}(z) (\mathbf{P}\mathbf{a} - \tilde{\mathbf{u}}), \quad (5)$$

其中

$$\tilde{\mathbf{u}} = [\tilde{u}(z_1), \tilde{u}(z_2) \cdots \tilde{u}(z_n)]^T = \mathbf{Q}\mathbf{u}, \quad (6)$$

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 1 & i & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & i & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & i & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & i \end{pmatrix}_{(n \times 2n)}, \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= [u_1(z_1), u_2(z_1), u_1(z_2), \\ & u_2(z_2), \cdots, u_1(z_n), u_2(z_n)]^T, \end{aligned} \quad (8)$$

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} p_1(z_1) & p_2(z_1) & \cdots & p_m(z_1) \\ p_1(z_2) & p_2(z_2) & \cdots & p_m(z_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_1(z_n) & p_2(z_n) & \cdots & p_m(z_n) \end{pmatrix}_{(n \times m)}, \quad (9)$$

$$\mathbf{W}(z) = \begin{pmatrix} w(z - z_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & w(z - z_1) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & w(z - z_n) \end{pmatrix}. \quad (10)$$

为了得到  $\mathbf{a}(z)$ , 对  $J$  取极值, 得

$$\frac{\partial J}{\partial \mathbf{a}} = \mathbf{A}(z) \mathbf{a}(z) - \mathbf{B}(z) \tilde{\mathbf{u}} = 0, \quad (11)$$

$$\mathbf{A}(z) \mathbf{a}(z) = \mathbf{B}(z) \tilde{\mathbf{u}}, \quad (12)$$

由此可得

$$\mathbf{a}(z) = \mathbf{A}^{-1}(z) \mathbf{B}(z) \tilde{\mathbf{u}}. \quad (13)$$

这样, 逼近函数的表达式为

$$\begin{aligned} \bar{u}^h(z) &= \Phi(z) \tilde{\mathbf{u}} = \sum_{I=1}^n \Phi_I(z) \tilde{u}(z_I) \\ &= u_1^h(z) + i \cdot u_2^h(z), \end{aligned} \quad (14)$$

其中

$$\begin{aligned} u_1^h(z) &= \text{Re}[\Phi(z) \tilde{\mathbf{u}}] \\ &= \text{Re} \left[ \sum_{I=1}^n \Phi_I(z) \tilde{u}(z_I) \right], \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} u_2^h(z) &= \text{Im}[\Phi(z) \tilde{\mathbf{u}}] \\ &= \text{Im} \left[ \sum_{I=1}^n \Phi_I(z) \tilde{u}(z_I) \right]. \end{aligned} \quad (16)$$

复变量移动最小二乘法的优点是其形成的二维问题无网格方法可取较少节点, 在形函数的构造中采用一维基函数建立二维问题的试函数, 使得试函数中所含的待定系数减少. 对线性基, 原来的基函数为  $\mathbf{p}^T = (1, x_1, x_2)$ , 待定常数为 3 个, 现在的基函数为  $\mathbf{p}^T = (1, z)$ , 待定常数为 2 个; 对二次基, 原来的基函数为  $\mathbf{p}^T = (1, x_1, x_2, x_1^2, x_1 x_2, x_2^2)$ , 待定常数为 6 个, 现在的基函数为  $\mathbf{p}^T = (1, z, z^2)$ , 待定常数为 3 个. 这样, 对于任一场节点来说, 其紧支域中所含的节点数大大减少, 进而在整个求解域中所需选取的节点数目也可大大减少. 因此, 在同等精度下, 减少了计算量; 在同等节点分布下, 提高了计算精度.

### 3 弹性力学的复变量无网格局部 Petrov-Galerkin 法

考虑平面弹性力学问题, 设问题域为  $\Omega$ , 边界为  $\Gamma$ , 其对应的控制方程和边界条件为

$$\sigma_{ij,j} + b_i = 0, \quad \text{在 } \Omega \text{ 内} \quad (17)$$

$$u_i = \bar{u}_i, \quad \text{在 } \Gamma_u \text{ 内} \quad (18)$$

$$\sigma_{ij}n_j = \bar{t}_i, \quad \text{在 } \Gamma_t \text{ 上} \quad (19)$$

其中  $i, j = 1, 2$ ,  $b_i$  是体力分量,  $\bar{u}_i$  是  $\Gamma_u$  上的已知位移分量,  $\bar{t}_i$  是  $\Gamma_t$  上的已知面力分量, 且  $\Gamma = \Gamma_u \cup \Gamma_t$ ,  $n_j$  是边界  $\Gamma$  的外法线方向余弦.

现考虑点  $z$  的邻域 (子域)  $\Omega_s$ , 由子域  $\Omega_s$  上的加权残数法, 并利用罚因子将本质边界条件 (18) 加入到残值方程中, 可得

$$\int_{\Omega_s} W_I \cdot (\sigma_{ij,j} + b_i) d\Omega - \alpha \int_{\Gamma_{su}} W_I \cdot (u_i - \bar{u}_i) d\Gamma = 0, \quad (20)$$

式中  $W_I$  为加权函数,  $\Omega_s$  为子域,  $\Gamma_{su}$  是子域  $\Omega_s$  的边界  $\partial\Omega_s$  上给定位移边界条件的部分. 对方程 (20) 中的第一个积分的第一项进行分部积分, 并利用散度定理, 可得

$$\int_{\Omega_s} (-\sigma_{ij}W_{I,j} + W_I b_i) d\Omega + \int_{\partial\Omega_s} W_I \sigma_{ij}n_j d\Gamma - \alpha \int_{\Gamma_{su}} W_I (u_i - \bar{u}_i) d\Gamma = 0. \quad (21)$$

一般把子域分为三部分, 即局部边界位于整体边界上给定面力边界条件的部分  $\Gamma_{st}$  和给定位移边界条件的部分  $\Gamma_{su}$ , 以及没有边界条件的其余部分  $L_s$ , 因此有  $\partial\Omega_s = L_s \cup \Gamma_{su} \cup \Gamma_{st}$ . 这样, (21) 式可表示为

$$\int_{\Omega_s} (-\sigma_{ij}W_{I,j} + W_I b_i) d\Omega + \int_{L_s} W_I t_i d\Gamma + \int_{\Gamma_{su}} W_I t_i d\Gamma + \int_{\Gamma_{st}} W_I \bar{t}_i d\Gamma - \alpha \int_{\Gamma_{su}} W_I (u_i - \bar{u}_i) d\Gamma = 0. \quad (22)$$

在 MLPG 加权残值法中, 试函数和加权函数取自不同的函数空间, 为了简化 (22) 式, 选择加权函数  $W_I$  在局部子域边界  $L_s$  上的值为零. 而移动最小二乘法中的权函数恰能满足以上要求. 因为在权函数的支持域半径  $r$  上, 权函数为零. 这样, 只需选择局部域  $\Omega_s$  的半径  $r'$  与权函数的支持域半径  $r$  相等即可. 利用这个性质, (22) 式表示为

$$\int_{\Omega_s} W_{I,j} \sigma_{ij} d\Omega - \int_{\Gamma_{su}} W_I t_i d\Gamma + \alpha \int_{\Gamma_{su}} W_I u_i d\Gamma$$

$$= \int_{\Gamma_{st}} W_I \bar{t}_i d\Gamma + \int_{\Omega_s} W_I b_i d\Omega + \alpha \int_{\Gamma_{su}} W_I \bar{u}_i d\Gamma. \quad (23)$$

进一步将 (23) 式改写为矩阵形式

$$\int_{\Omega_s} \mathbf{G}_I^T \boldsymbol{\sigma} d\Omega - \int_{\Gamma_{su}} \mathbf{W}_I^T \mathbf{t} d\Gamma + \alpha \int_{\Gamma_{su}} \mathbf{W}_I^T \bar{\mathbf{u}}^h d\Gamma = \int_{\Gamma_{st}} \mathbf{W}_I^T \bar{\mathbf{t}} d\Gamma + \int_{\Omega_s} \mathbf{W}_I^T \mathbf{b} d\Omega + \alpha \int_{\Gamma_{su}} \mathbf{W}_I^T \bar{\mathbf{u}} d\Gamma, \quad (24)$$

其中  $\mathbf{W}_I$  为权函数矩阵:

$$\mathbf{W}_I = \mathbf{W}(z, z_I) = \begin{pmatrix} W(z, z_I) & 0 \\ 0 & W(z, z_I) \end{pmatrix}, \quad (25)$$

$\mathbf{G}_I$  为权函数导数矩阵

$$\mathbf{G}_I = \mathbf{G}(z, z_I) = \begin{pmatrix} W_{,1}(z, z_I) & 0 \\ 0 & W_{,2}(z, z_I) \\ W_{,2}(z, z_I) & W_{,1}(z, z_I) \end{pmatrix}, \quad (26)$$

$$\mathbf{t} = \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix} = \mathbf{n}\boldsymbol{\sigma}, \quad (27)$$

$$\bar{\mathbf{u}}^h = \begin{pmatrix} u_1^h \\ u_2^h \end{pmatrix}, \quad (28)$$

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}, \quad (29)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix}. \quad (30)$$

由复变量移动最小二乘法的试函数表达式 (14), 子域  $\Omega_s$  内任意场节点  $z$  的位移可表示为

$$\bar{\mathbf{u}}^h(z) = u_1^h(z) + i \cdot u_2^h(z) = \boldsymbol{\Phi}(z)\bar{\mathbf{u}} = \sum_{I=1}^n \Phi_I(z)\tilde{u}(z_I), \quad \forall z \in \Omega_s, \quad (31)$$

其中  $n$  是场点  $z$  影响域内的节点总数.

$$\bar{\mathbf{u}} = [\tilde{u}(z_1), \tilde{u}(z_2), \dots, \tilde{u}(z_n)]^T = \mathbf{Q}\mathbf{u}, \quad (32)$$

这样有

$$u_1^h(z) = \text{Re}[\boldsymbol{\Phi}(z)\bar{\mathbf{u}}]$$

$$= \operatorname{Re} \left[ \sum_{I=1}^n \Phi_I(z) \tilde{u}(z_I) \right], \quad (33) \qquad = \operatorname{Im} \left[ \sum_{I=1}^n \Phi_I(z) \tilde{u}(z_I) \right]. \quad (34)$$

$u_2^h(z) = \operatorname{Im}[\Phi(z)\tilde{u}]$  子域内任一点的应变为

$$\boldsymbol{\varepsilon}(z) = \mathbf{L}\tilde{\mathbf{u}}^h(z) = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11}(z) \\ \varepsilon_{22}(z) \\ \varepsilon_{12}(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left\{ \operatorname{Re} \left[ \sum_{I=1}^n \Phi_I(z) \tilde{u}(z_I) \right] \right\}_{,1} \\ \left\{ \operatorname{Im} \left[ \sum_{I=1}^n \Phi_I(z) \tilde{u}(z_I) \right] \right\}_{,2} \\ \left\{ \operatorname{Re} \left[ \sum_{I=1}^n \Phi_I(z) \tilde{u}(z_I) \right] \right\}_{,2} + \left\{ \operatorname{Im} \left[ \sum_{I=1}^n \Phi_I(z) \tilde{u}(z_I) \right] \right\}_{,1} \end{pmatrix}, \quad (35)$$

其中

$$\mathbf{L}(\cdot) = \begin{pmatrix} (\operatorname{Re}[\cdot])_{,1} \\ (\operatorname{Im}[\cdot])_{,2} \\ (\operatorname{Im}[\cdot])_{,1} + (\operatorname{Re}[\cdot])_{,2} \end{pmatrix}, \quad (36)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{u}}(z_I) &= u_1(z_I) + i \cdot u_2(z_I) \\ &= (1 \quad i) \begin{pmatrix} u_1(z_I) \\ u_2(z_I) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (37)$$

根据弹性力学平面问题的位移与应变的关系, 可得应变向量

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon}(z) &= \begin{pmatrix} \varepsilon_{11}(z) \\ \varepsilon_{22}(z) \\ \varepsilon_{12}(z) \end{pmatrix} = \mathbf{L}(\Phi(z)\tilde{\mathbf{u}}) \\ &= \mathbf{L}(\Phi(z)\mathbf{Q}\mathbf{u}) = \mathbf{B}(z)\mathbf{u} = \sum_{I=1}^n \mathbf{B}_I \mathbf{u}_I, \end{aligned} \quad (38)$$

其中

$$\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{Q}\mathbf{u}, \quad (39)$$

$$\mathbf{u} = [u_1(z_1), u_2(z_1), u_1(z_2), u_2(z_2), \dots, u_1(z_n), u_2(z_n)], \quad (40)$$

$$\mathbf{B}(z) = [\mathbf{B}_1(z), \mathbf{B}_2(z), \dots, \mathbf{B}_n(z)], \quad (41)$$

$$\mathbf{B}_I(z) = \begin{pmatrix} \operatorname{Re}[\Phi_{I,1}(z)] & -\operatorname{Im}[\Phi_{I,1}(z)] \\ \operatorname{Im}[\Phi_{I,2}(z)] & \operatorname{Re}[\Phi_{I,2}(z)] \\ \operatorname{Re}[\Phi_{I,2}(z)] + \operatorname{Im}[\Phi_{I,1}(z)] & -\operatorname{Im}[\Phi_{I,2}(z)] + \operatorname{Re}[\Phi_{I,1}(z)] \end{pmatrix}. \quad (42)$$

再由弹性力学平面应力问题的应力 - 应变关系, 任意点的应力可表示为

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}(z) &= \mathbf{D} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(z) = \mathbf{D} \cdot \mathbf{B}(z) \cdot \mathbf{u} \\ &= \sum_{I=1}^n \mathbf{D}\mathbf{B}_I \mathbf{u}_I, \end{aligned} \quad (43)$$

其中  $\mathbf{D}$  为弹性矩阵. 对于平面应变问题,

$$\mathbf{D} = \frac{\mathbf{E}}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$

$$\times \begin{pmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{pmatrix}, \quad (44)$$

对于平面应力问题,

$$\mathbf{D} = \frac{\mathbf{E}}{1-\nu^2} \begin{pmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{pmatrix}, \quad (45)$$

其中  $\mathbf{E}$  为弹性模量,  $\nu$  为 Poisson 比.

将 (31) 和 (43) 式代入 (24) 式, 可得场节点  $I$  的离散系统方程

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_s} \mathbf{G}^T(z_I, z) \mathbf{D} \mathbf{B}_I \mathbf{u} d\Omega \\ & - \int_{\Gamma_{su}} \mathbf{W}^T(z_I, z) \mathbf{n} \mathbf{D} \mathbf{B}_I \mathbf{u} d\Gamma \\ & + \alpha \int_{\Gamma_{su}} \mathbf{W}^T(z_I, z) \Phi_I \mathbf{Q} \mathbf{u} d\Gamma \\ & = \int_{\Gamma_{st}} \mathbf{W}^T(z_I, z) \bar{\mathbf{t}}(z) d\Gamma \\ & + \int_{\Omega_s} \mathbf{W}^T(z_I, z) \mathbf{b}(z) d\Omega \\ & + \alpha \int_{\Gamma_{su}} \mathbf{W}^T(z_I, z) \bar{\mathbf{u}}(z) d\Gamma. \end{aligned} \quad (46)$$

(46) 式可写成矩阵形式

$$\begin{aligned} (\mathbf{K}_I)_{(2 \times 2n)} \mathbf{u}_{(2n \times 1)} &= (\mathbf{f}_I)_{(2 \times 1)}, \\ (I &= 1 \cdots n), \end{aligned} \quad (47)$$

其中

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_I &= \int_{\Omega_s} \mathbf{G}^T(z_I, z) \mathbf{D} \mathbf{B}_I d\Omega \\ & - \int_{\Gamma_{su}} \mathbf{W}^T(z_I, z) \mathbf{n} \mathbf{D} \mathbf{B}_I d\Gamma \\ & + \alpha \int_{\Gamma_{su}} \mathbf{W}^T(z_I, z) \Phi_I \mathbf{Q} d\Gamma, \quad (48) \\ \mathbf{f}_I &= \int_{\Gamma_{st}} \mathbf{W}^T(z_I, z) \bar{\mathbf{t}}(z) d\Gamma \\ & + \int_{\Omega_s} \mathbf{W}^T(z_I, z) \mathbf{b}(z) d\Omega \\ & + \alpha \int_{\Gamma_{su}} \mathbf{W}^T(z_I, z) \bar{\mathbf{u}}(z) d\Gamma. \quad (49) \end{aligned}$$

将所有节点对应的刚度矩阵组装进总体刚度矩阵, 可得

$$\mathbf{K}_{(2n \times 2n)} \mathbf{u}_{(2n \times 1)} = \mathbf{F}_{(2n \times 1)}. \quad (50)$$

以上就是本文基于复变量移动最小二乘法和无网格局部 Petrov-Galerkin 法建立的弹性力学的复变量无网格局部 Petrov-Galerkin 法. 该方法的优点是配点少、精度高、计算速度快, 有效解决了其他无网格方法配点过多、计算速度慢且容易形成病态方程组的缺点.

### 4 数值算例

采用本文建立的弹性力学的复变量无网格局部 Petrov-Galerkin 法, 分别对自由端受剪切荷载作用的悬臂梁和受单向拉伸的中心圆孔板进行数值计算.

#### 例 1 自由端部受剪切荷载作用的悬臂梁

如图 1 所示悬臂梁, 在末端受抛物线剪切向下荷载的作用, 梁的几何参数分别为长  $L = 48 \text{ m}$ , 高  $D = 12 \text{ m}$ , 厚  $t = 1 \text{ m}$ , 材料的弹性模量  $E = 3 \times 10^7 \text{ Pa}$ , Poisson 比  $\nu = 0.30$ , 载荷  $P = 1000 \text{ N}$ .

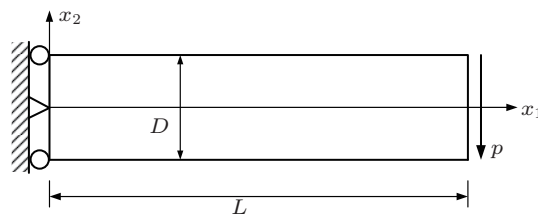


图 1 悬臂梁示意图

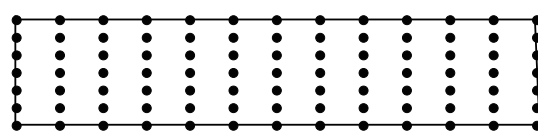


图 2 悬臂梁的节点分布示意图

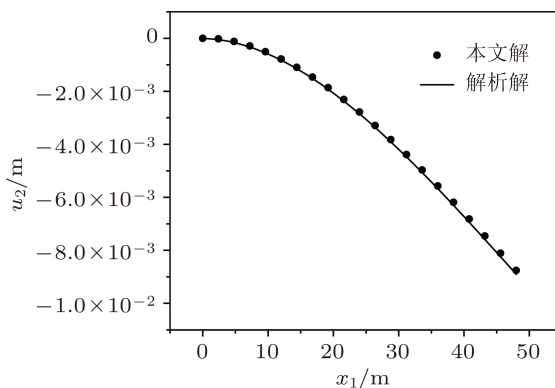


图 3 悬臂梁中轴线上各节点沿  $x_2$  方向的位移数值解与解析解对比图

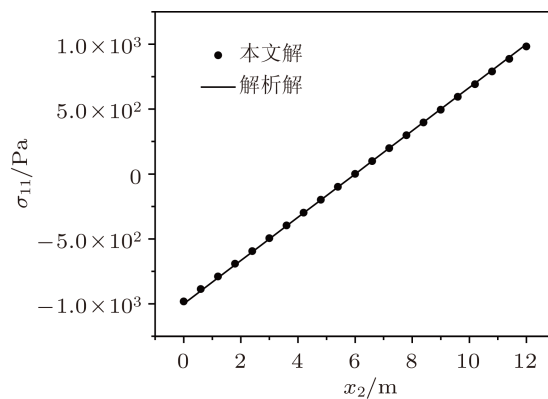


图 4  $x_1 = L/2$  横截面上的正应力  $\sigma_{11}$  对比图

在求解域内均匀布置  $13 \times 7$  个节点, 节点布置如图 2 所示. 图 3 给出了悬臂梁中轴线上各节点沿  $x_2$  方向的位移数值解与解析解对比. 图 4 和图 5 分别给出了  $x_1 = L/2$  横截面上点的正应力和剪应

力的数值解和解析解对比. 可以看出, 本文提出的弹性力学的复变量无网格局部 Petrov-Galerkin 法的计算结果和解析解符合得很好, 说明本文所提方法的正确性和有效性.

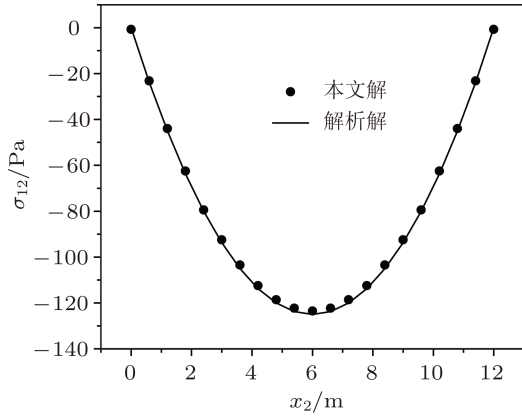


图5  $x_1 = L/2$  横截面上剪应力  $\sigma_{12}$  对比图

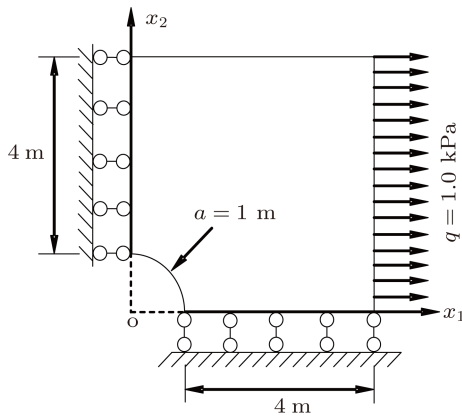


图6 单向拉伸的中心圆孔板的计算模型

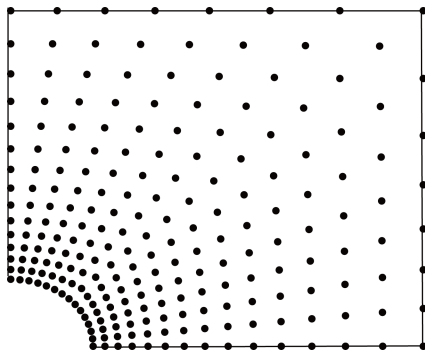


图7 受单向拉伸的中心圆孔板的节点分布图

### 例2 受单向拉伸作用下的中心圆孔板

考虑水平方向受单向拉伸的中心圆孔矩形板. 板的尺寸为  $10\text{ m} \times 10\text{ m}$ , 中心圆孔半径为  $a = 1\text{ m}$ .

材料的弹性模量  $E = 1.0 \times 10^3\text{ MPa}$ , Poisson 比  $\nu = 0.25$ , 单向拉伸均布荷载  $q = 1.0\text{ kPa}$ . 由于对称性, 可以只考虑四分之一板作为研究对象, 不计重力, 按平面应力计算, 如图6所示.

如图7所示, 中心圆孔板的求解域内共布置  $15 \times 15$  个节点. 图8和图9分别给出了  $x_1 = 0$  横截面上的径向位移和正应力的数值解和解析解对比. 可以看出, 数值解与解析解符合得较好.

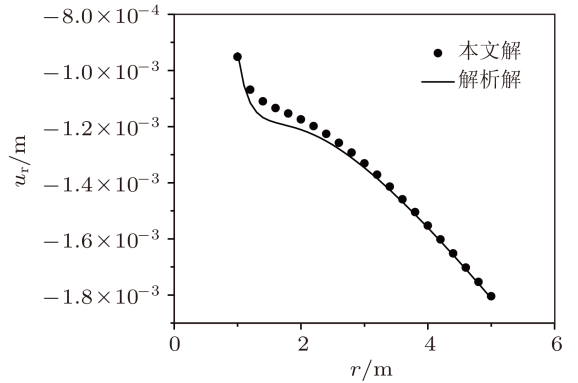


图8 沿  $x_1 = 0$  截面的径向位移对比图

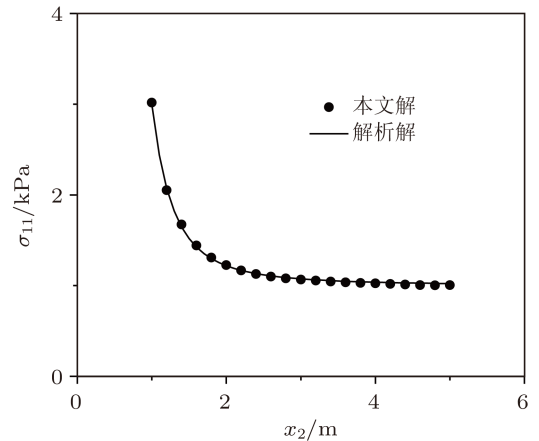


图9 沿  $x_1 = 0$  截面的正应力对比图

## 5 结论

本文基于复变量移动最小二乘法和无网格局部 Petrov-Galerkin 法, 建立复变量无网格局部 Petrov-Galerkin 法. 进一步将该方法应用于弹性力学问题, 提出弹性力学的复变量无网格局部 Petrov-Galerkin 法. 该方法的优点是采用一维基函数建立二维问题的试函数, 使得试函数中所含的待定系数减少, 从而有效提高计算效率. 数值算例表明, 与传统的无网格局部 Petrov-Galerkin 法相比, 该方法具有配点少、计算量小和精度高等优点.

- [1] Belytschko T, Krongauz Y, Organ D, Fleming M, Krysl P 1996 *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* **139** 3
- [2] Belytschko T, Lu Y Y, Gu L 1994 *Int. J. Numer. Meth. Eng.* **37** 229
- [3] Cheng R J, Ge H X 2009 *Chin. Phys. B* **18** 4059
- [4] Atluri S N, Zhu T L 1998 *Comput. Mech.* **22** 117
- [5] Zheng B J, Dai B D 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 5182 (in Chinese) [郑保敬, 戴保东 2010 物理学报 **59** 5182]
- [6] Chen L, Liew K M 2010 *Comput. Mech.* **47** 455
- [7] Liu W K, Jun S, Zhang Y F 1995 *Int. J. Numer. Meth. Fluids* **20** 1081
- [8] Cheng R J, Liew K M 2009 *Comput. Mech.* **45** 1
- [9] Onate E, Idelsohn S, Zienkiewicz O Z, Taylor R L 1996 *Inter. J. Num. Meth. Eng.* **39** 3839
- [10] Cheng R J, Cheng Y M 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 5569 (in Chinese) [程荣军, 程玉民 2007 物理学报 **56** 5569]
- [11] Liu G R, Gu Y T 2001 *Int. J. Numer. Meth. Eng.* **50** 937
- [12] Cheng Y M, Li J H 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 4463 (in Chinese) [程玉民, 李九红 2005 物理学报 **54** 4463]
- [13] Zhu T, Zhang J, Atluri S N 1999 *Eng. Anal. Bound. Elem.* **23** 375
- [14] Qin Y X, Cheng Y M 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 3215 (in Chinese) [秦义校, 程玉民 2006 物理学报 **55** 3215]
- [15] Dai B D, Cheng Y M 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 597 (in Chinese) [戴保东, 程玉民 2007 物理学报 **56** 597]
- [16] Li X G, Dai B D, Wang L H 2010 *Chin. Phys. B* **19** 120202
- [17] Lancaster P, Salkauskas K 1981 *Math. Comput.* **37** 141
- [18] Cheng R J, Cheng Y M 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 6037 (in Chinese) [程荣军, 程玉民 2008 物理学报 **57** 6037]
- [19] Wang J F, Bai F N, Cheng Y M 2011 *Chin. Phys. B* **20** 030206
- [20] Atluri S N 2004 *The Meshless Method for Domain & BIE Discretizations* (Irvine: University of California)
- [21] Cheng Y M, Peng M J, Li J H 2005 *Acta Mech. Sin.* **37** 719 (in Chinese) [程玉民, 彭妙娟, 李九红 2005 力学学报 **37** 719]
- [22] Cheng Y M, Li J H 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 4463 (in Chinese) [程玉民, 李九红 2005 物理学报 **54** 4463]
- [23] Cheng Y M, Li J H 2005 *Science in China Ser. G* **35** 548 (in Chinese) [程玉民, 李九红 2005 中国科学 (G 辑) **35** 548]
- [24] Chen L, Cheng Y M 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 6047 (in Chinese) [陈丽, 程玉民 2008 物理学报 **57** 6047]
- [25] Chen L, Cheng Y M 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 1 (in Chinese) [陈丽, 程玉民 2008 物理学报 **57** 1]
- [26] Chen L, Cheng Y M 2010 *Chin. Phys. B* **19** 090204
- [27] Liew K M, Cheng Y M 2009 *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.* **198** 3925
- [28] Cheng Y M, Liew K M, Kitipornchai S 2009 *Int. J. Numer. Meth. Eng.* **78** 1258

# Meshless local Petrov-Galerkin method with complex variables for elasticity\*

Yang Xiu-Li<sup>1)</sup> Dai Bao-Dong<sup>1)†</sup> Li Zhen-Feng<sup>2)</sup>

1) (*Department of Engineering Mechanics, Taiyuan University of Science and Technology, Taiyuan 030024, China*)

2) (*College of Transportation and Logistics, Taiyuan University of Science and Technology, Taiyuan 030024, China*)

(Received 5 May 2011; revised manuscript received 25 June 2011)

## Abstract

In this paper, the shape functions are obtained by the moving least-squares method with complex variable (MLSCV). The advantages of MLSCV are that the approximation function of a two-dimensional (2D) problem is formed with one-dimensional (1D) basis function, and the number of the undetermined coefficients is reduced, so it effectively improves the computational efficiency. Based on the MLSCV and meshless local Petrov-Galerkin method, the essential boundary conditions are imposed by the penalty method and the corresponding discrete equations are derived, then a meshless local Petrov-Galerkin method with complex variables is presented for 2D elasticity problems. Some examples given in this paper demonstrate the effectiveness of the present method.

**Keywords:** meshless method, moving least-squares method with complex variables, meshless local Petrov-Galerkin method, elasticity

**PACS:** 02.60.-x, 02.70.Pt, 02.70.-c, 46.25.-y

---

\* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 51078250).

† E-mail: Dai\_baodong@126.com