从乌龟坐标在动态 Vaidya 黑洞上的推广谈起*

鹿鹏举 赵峥 刘文彪†

(北京师范大学物理学系, 100875 北京)

(2011 年 5 月 7 日收到; 2011 年 6 月 27 日收到修改稿)

从一类参数未定的一般形式的乌龟坐标变换出发, 找出了在动态 Vaidya 黑洞背景下能将波动方程化为标准形式且无发散的乌龟坐标所满足的条件. 结果表明, 以乌龟坐标变换为主要特征的 Damour-Ruffini 方法, 用来计算动态黑洞的 Hawking 辐射时, 只适用于事件视界, 无法应用于表观视界.

关键词: 动态黑洞, 乌龟坐标, Hawking 辐射, 表观视界

PACS: 04.70.Dy, 04.70.Bw, 97.60.Lf

1 引 言

1976 年, Damour 和 Ruffini 提出了一种证明 Hawking 辐射的方法 [1], 通过在乌龟坐标下将波动方程在视界附近化作标准形式, 并借助解析延拓等手段求解出出射波解和辐射谱. 1988 年, Sannan 用量子场论和量子统计的思想对此方法做了改进 [2]. 之后, 赵峥和戴宪新等将该方法进一步推广应用到动态黑洞 [3−7], 发现利用该方法可以快捷地计算出各种黑洞的温度和辐射谱. 由于该方法是对黑洞表面各点的辐射逐点进行研究, 因此它原则上可以讨论表面各点温度不同的黑洞, 以及动态黑洞的热辐射.

另一方面, 黑洞热力学向动态黑洞的推广遇到了问题. 由于动态黑洞的事件视界和表观视界并不重合, 需要探讨黑洞热力学到底应该建立在哪个特征曲面上, 或者说动态黑洞的 Hawking 效应来自哪个特征曲面. Balbinot[8], 赵峥等 [9] 和 Elias[10] 在动态黑洞事件视界处研究了黑洞熵和 Hawking 效应, 并指出动态黑洞事件视界处的 Hawking 温度表达式与稳态或静态黑洞不同. Fodor 等 [11] 给出了动态黑洞表面引力的一般表达式, 黑洞热力学能够建立在事件视界处. 同时, Hajicek[12], Hiscock[13], Collins[14] 等人则认为黑洞热力学应建立在表观视界处. 刘显明和刘文彪利用 Robinson-Wilczek 引力反常方法研究了 Vaidya 黑洞的 Hawking 效应 [15], 在表观视界处构建了热力学第一定律. 同时, 他们通过在表观视界处加一个含时微扰, 构成一个新的超曲面, 并在新的超曲面处得到了事件视界处的 Hawking 温度.

用乌龟坐标方法能否计算出表观视界附近的辐射谱, 是一个引人注意的问题. 对乌龟坐标方法向表观视界的简单推广可以发现, 这种尝试总会引起波动方程系数的发散. 因此, 探讨波动方程系数不发散的条件将会是有意义的. 本文将找出合理的乌龟坐标必须满足的一系列条件, 从而解决该问题.

2 传统乌龟坐标方法在 Vaidya 黑洞上的应用

对于 Vaidya 黑洞

$$\mathrm{d}s^2=-\left(1-\frac{2m(v)}{r}\right)\mathrm{d}v^2+2\mathrm{d}v\mathrm{d}r+r^2\mathrm{d}\Omega^2, \quad (1)$$

事件视界

$$r_{\mathrm{H}}=\frac{2m}{1-2\dot{r}_{\mathrm{H}}},$$

表观视界

$$r_{\mathrm{A}}=2m.$$

在 Vaidya 时空背景下, Klein-Gordon 方程的径向波动方程为

$$\left(1-\frac{2m}{r}\right)\frac{\partial^2\rho}{\partial r^2}+2\frac{\partial^2\rho}{\partial r\partial v}+\frac{2m}{r^2}\frac{\partial\rho}{\partial r}$$

* 国家自然科学基金 (批准号: 10773002,10875012) 和中央高校基本科研业务费专项资金 (批准号: 105116) 资助的课题.

† E-mail: wbliu@bnu.edu.cn

$$-\Big[\frac{2m}{r^3}+\mu^2+\frac{l(l+1)}{r^2}\Big]\rho=0. \tag{2}$$

在文献 [3] 中, 尝试了以下乌龟坐标变换

$$r_* = r+\frac{1}{2\kappa}\ln\Big[\frac{r-r_{\rm H}(v)}{r_{\rm H}(v_0)}\Big], \tag{3}$$

$$v_* = v-v_0, \tag{4}$$

其中 v_0 为常数, κ 是不含 v 的常数, $r_{\rm H}(v)$ 和 κ 物理意义待定. 此时, 波动方程为

$$\begin{aligned}&\frac{(r-2m)[2\kappa(r-r_{\rm H})+1]-2r\dot r_{\rm H}}{2\kappa r(r-r_{\rm H})}\frac{\partial^2\rho}{\partial r_*^2}\\&+2\frac{\partial^2\rho}{\partial v_*\partial r_*}+2\Big\{\frac{2r\dot r_{\rm H}-(r-2m)}{r(r-r_{\rm H})[2\kappa(r-r_{\rm H})+1]}\\&+\frac{2m}{r^2}\Big\}\frac{\partial\rho}{\partial r_*}-\frac{2\kappa(r-r_{\rm H})}{2\kappa(r-r_{\rm H})+1}\\&\Big[\frac{2m}{r^3}+\mu^2+\frac{l(l+1)}{r^2}\Big]\rho=0.\end{aligned} \tag{5}$$

然后要求该波动方程在 $r\to r_{\rm H}, v\to v_0$ 时化作标准波动方程的形式. 第一项系数的分母显然为零, 因此必须要求分子也趋于零

$$\begin{aligned}&\lim_{r\to r_{\rm H}}\{(r-2m)[2\kappa(r-r_{\rm H})+1]-2r\dot r_{\rm H}\}\\&=0\Rightarrow r_{\rm H}=\frac{2m}{1-2\dot r_{\rm H}},\end{aligned} \tag{6}$$

这正是零曲面方程. 可见该方法自动给出了 $r_{\rm H}$ 的物理意义, 即事件视界的位置. 同时, 第一项系数整体趋于 1 的条件给出 κ 的值

$$\begin{aligned}&\lim_{r\to r_{\rm H},v\to v_0}\frac{(r-2m)[2\kappa(r-r_{\rm H})+1]-2r\dot r_{\rm H}}{2\kappa r(r-r_{\rm H})}\\&=1\Rightarrow\kappa=\frac{1-2\dot r_{\rm H}}{4m},\end{aligned} \tag{7}$$

由于取了 $v\to v_0$ 的极限, 这里的 κ 是 v_0 的函数而非 v 的函数. v_0 可以取任何时刻, 可见不同于稳态情形, 这里的 κ 是随时间变化的. 可以验证, 该方程已经化作标准波动形式

$$\frac{\partial^2\rho}{\partial r_*^2}+2\frac{\partial^2\rho}{\partial r_*\partial v_*}=0, \tag{8}$$

κ 的意义可以通过计算辐射谱给出. 上述标准波动方程的解为

$$\begin{aligned}\rho_{\rm in} &= {\rm e}^{-{\rm i}\omega v_*},\\ \rho_{\rm out}(r>r_{\rm H}) &= {\rm e}^{-{\rm i}\omega v_*+2{\rm i}\omega r}(r-r_{\rm H})^{\frac{{\rm i}\omega}{\kappa}},\\ \rho_{\rm in}(r<r_{\rm H}) &= {\rm e}^{-{\rm i}\omega v_*+2{\rm i}\omega r}(r_{\rm H}-r)^{\frac{{\rm i}\omega}{\kappa}}\,{\rm e}^{\frac{\pi\omega}{\kappa}},\end{aligned}$$

可见 v_0 物理意义为辐射离开黑洞的时刻. 视界内外总的出射波

$$\begin{aligned}\rho_\omega &= N_\omega[Y(r-r_{\rm H})\rho_{\rm out}(r>r_{\rm H})\\&\quad+Y(r_{\rm H}-r)\rho_{\rm out}(r<r_{\rm H})],\end{aligned}$$

由归一化条件可得出辐射谱

$$\begin{aligned}-1&=(\rho_\omega,\rho_\omega)=N_\omega^2(1-{\rm e}^{\frac{2\pi\omega}{\kappa}})\\&\Rightarrow N_\omega^2=\frac{1}{{\rm e}^{\beta\omega}-1},\end{aligned} \tag{9}$$

其中 $\beta=\dfrac{1}{k_{\rm B}T}, T=\dfrac{\kappa}{2\pi k_{\rm B}}$. 综上所述, κ 正是 $r\to r_{\rm H}, v\to v_0$ 时辐射的温度, 任意 v_0 时刻发出的辐射之温度都可以由此确定, 因此 κ 是 v_0 的函数.

至此利用该方法已经求出了动态 Vaidya 黑洞的辐射谱和辐射温度, 而且给出了发出辐射的位置, 正是事件视界. 该方法与稳态 Domour-Ruffini 方法的关键区别在于, κ 是随时间 v_0 变化的.

3 乌龟坐标方法向表观视界的应用及其困难

在将乌龟坐标方法向表观视界应用的尝试中, 出现了发散困难. 仍以 Vaidya 黑洞为例进行分析, 期望在表观视界 $2m(v)$ 附近得到热辐射, 不妨先尝试如下乌龟坐标

$$r_* = r+2m(v_0)\ln\Big(\frac{r-2m(v)}{2m(v_0)}\Big), \tag{10}$$

$$v_* = v-v_0, \tag{11}$$

波动方程在此坐标下化为

$$\begin{aligned}&\frac{(r-2m+2m(v_0))[4m^2-4m(r+m(v_0))+r(r+m(v_0)(2-8\dot m))]}{r(r-2m)^2\Big(1+\dfrac{2m(v_0)}{r-2m}\Big)}\frac{\partial^2\rho}{\partial r_*^2}\\&+\frac{8m^3-8m^2(r+m(v_0))+2rm(r+4m(v_0))+2r^2m_0(-1+4\dot m)}{r^2(r-2m)^2\Big(1+\dfrac{2m(v_0)}{r-2m}\Big)}\frac{\partial\rho}{\partial r_*}\\&+2\frac{\partial^2\rho}{\partial r_*\partial v_*}+-\frac{r(l+l^2+\mu^2r^2)+2m}{r^3\Big(1+\dfrac{2m(v_0)}{r-2m}\Big)}=0.\end{aligned} \tag{12}$$

要求该方程在表观视界附近化为标准波动方程形式, 取 $r \to 2m$ 的极限, 第一项分母显然为零, 这要求分子亦为零, 且二者之比趋于 1. 但是, 我们有

$$\begin{aligned}\lim_{r\to 2m, v\to v_0} &\{(r-2m+2m_0)[4m^2-4m(r+m_0)\\&+r(r+m_0(2-8\dot{m}))]\} = -32m^3\dot{m}|_{v=v_0}, \quad (13)\end{aligned}$$

可见分子是不趋于零的, 该项系数发散. 这个发散的性质可以总结如下:

1) m 不含时的情况下发散消失, 也即稳态情形;

2) 由于 $\dot{m}$ 与 r 无关, 因此不能期望有一个特殊形式的 $\dot{m}$, 在 r 趋于表观视界时和分母同步减小从而避免发散.

将这种乌龟坐标同事件视界附近时类似的计算相比对是有意义的. 我们知道, 在事件视界附近采用如下乌龟坐标可以将波动方程化为标准形式而没有任何发散困难:

$$r_* = r + \frac{1}{2\kappa(v_0)}\ln\Big[\frac{r-r_{\rm H}(v)}{r_{\rm H}(v_0)}\Big], \quad (14)$$

$$v_* = v - v_0. \quad (15)$$

二者对比可以发现, 上文表观视界附近所采用的乌龟坐标, 仅仅是将 $r_{\rm H}$ 和 κ 换用 m 表示, 自变量含 v 或含 v_0 的情况并未改变. 仅仅记号的区别显然不会引起这样迥异的结果, 二者的不同在于 $r_{\rm H}$ 和 κ 是额外引入的未定记号, m 却是波动方程里已有的特殊量, 它的两倍正是表观视界的位置.

事实上, 波动方程化作标准形式要求 $r_{\rm H}$ 需满足零曲面方程, 并且 $\kappa = \dfrac{1-2\dot{r}_{\rm H}}{4m}$ 是方程 (7) 的唯一解. 这意味着不满足上述条件的 $r_{\rm H}$ 和 κ 必然无法将波动方程化为标准形式, 而将两个待定参数用一个取值确定的参数 m 来表示, 显然不会满足方程, 因而出现发散.

遵循这样的思路, 在下一节中用待定参数标记出一大类乌龟坐标, 并计算说明其中仅有对应事件视界的一小类乌龟坐标是满足标准波动方程条件的.

4 能够得出标准波动方程的乌龟坐标

考虑一个包含 3 个未定参数的乌龟坐标, 通过将波动方程化为标准形式, 找出参数应该满足的条件. 结果表明, 波动方程化作标准形式的限制自动要求 r 趋于事件视界, 因而在其他位置寻求构造乌龟坐标的尝试是无解的.

为了强调变换中的待定参数最初并没有任何物理意义, 我们用 α, β, γ 标记参数, 仅当参数固定下来之后, 它们才可能具有具体的物理意义

$$r_* = r + \frac{1}{2\gamma(v)}\ln\Big[\frac{r-\alpha(v)}{\beta(v)}\Big], \quad v_* = v - v_0. \quad (16)$$

微分算子的变换关系为

$$\frac{\partial\rho}{\partial r} = \Big(1+\frac{1}{2\gamma(r-\alpha)}\Big)\frac{\partial\rho}{\partial r_*}, \quad (17)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2\rho}{\partial r\partial v} =& \Big(-\frac{\dot{\gamma}}{2\gamma^2(r-\alpha)}+\frac{\dot{\alpha}}{2\gamma(r-\alpha)^2}\Big)\frac{\partial\rho}{\partial r_*}\\&+\Big(1+\frac{1}{2\gamma(r-\alpha)}\Big)\frac{\partial^2\rho}{\partial r_*\partial v_*}\\&-\Big(1+\frac{1}{2\gamma(r-\alpha)}\Big)\left(\frac{\ln\Big(\dfrac{r-\alpha}{\beta}\Big)\dot{\gamma}}{2\gamma^2}\right.\\&\left.+\frac{\dot{\alpha}\beta+(r-\alpha)\dot{\beta}}{2\beta\gamma(r-\alpha)}\right)\frac{\partial^2\rho}{\partial r_*^2}, \quad (18)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2\rho}{\partial r^2} =& -\frac{1}{2\gamma(r-\alpha)^2}\frac{\partial\rho}{\partial r_*}\\&+\Big[1+\frac{1}{2\gamma(r-\alpha)}\Big]^2\frac{\partial^2\rho}{\partial r_*^2}, \quad (19)\end{aligned}$$

变换后波动方程 $\dfrac{\partial^2\rho}{\partial r_*^2}$ 项的系数为

$$\frac{(1+2\gamma(r-\alpha))\Big[-2(2m-r)\gamma^2\beta-2r\ln\Big(\dfrac{r-\alpha}{\beta}\Big)\beta\dot{\gamma}+\dfrac{\gamma\beta(-2m+r-2r\dot{\alpha})}{r-\alpha}-2\gamma r\dot{\beta}\Big]}{2r\gamma^3\Big[2(r-\alpha)+\frac{1}{\gamma}\Big]\beta}, \quad (20)$$

令 $r\to\alpha$, $v\to v_0$, 如果不对 β 和 γ 做一些限制, 该系数将会发散. 分母有限, 分子上两个发散项中, 由于 β 在乌龟变换的分母上, 不可以为零, 因此能够使得 $-2r\ln\Big(\dfrac{r-\alpha}{\beta}\Big)\beta\dot{\gamma}$ 有限的唯一选择是令

$$\dot{\gamma}|_{v=v_0} = 0. \quad (21)$$

$\dfrac{\gamma\beta(-2m+r-2r\dot{\alpha})}{r-\alpha}$ 中分子分母都是 r 的一次函数, 因此需令参数满足

$$\alpha - 2\alpha\dot{\alpha} - 2m|_{v=v_0} = 0 \quad (22)$$

才能避免发散, 这里 α 满足的正是零曲面方程, 可见只有在零曲面上波动方程才能化作标准形式, 其

他位置包括表观视界在内, 都不满足要求. 这样, $\dfrac{\partial^2\rho}{\partial r_*^2}$ 项系数 $C_{r_*r_*}$ 在取极限后化为

$$\begin{aligned}\lim_{r\to\alpha,v\to v_0} C_{r_*r_*} &= \frac{-2(2m-\alpha)\gamma^2\beta-2\gamma\alpha\dot{\beta}}{2\alpha\gamma^2\beta} \\ &\quad+\lim_{r\to\alpha}\frac{\gamma\beta(-2m+r-2r\dot{\alpha})}{2\gamma^2\beta r(r-\alpha)} \\ &= \frac{\alpha-2m}{\alpha}-\frac{\dot{\beta}}{\gamma\beta} \\ &\quad+\lim_{r\to\alpha}\frac{r-2m-2r\dot{\alpha}}{2\gamma r(r-\alpha)} \\ &= 1-\frac{2m}{\alpha}-\frac{\dot{\beta}}{\gamma\beta}+\frac{1-2\dot{\alpha}}{2\alpha\gamma},\end{aligned}$$

令上式趋于 1, 则得出

$$\gamma|_{v=v_0}=\frac{m\beta-\alpha^2\dot{\beta}}{2m\alpha\beta}|_{v=v_0}. \tag{23}$$

波动方程其余几项的系数

$$\begin{aligned}C_{r_*} &= \frac{m\gamma(r-\alpha)+2m\gamma^2\alpha(-r+\alpha)}{r^2\gamma\Big[\gamma(\alpha-r)-\dfrac{1}{2}\Big]\alpha} \quad \xrightarrow{r\to\alpha} 0, \\ C_{r_*v_*} &= 2, \\ C &= -\frac{4m+2r(l+l^2+\mu^2r^2)}{r^3\Big[2+\dfrac{1}{\gamma(r-\alpha)}\Big]} \quad \xrightarrow{r\to\alpha} 0,\end{aligned}$$

其中 $C_{r_*}, C_{r_*v_*}, C$ 分别为 $\dfrac{\partial\rho}{\partial r_*}, \dfrac{\partial^2\rho}{\partial r_*\partial v_*}$ 以及零阶导数项的系数. 至此, 波动方程已被化为标准形式.

由以上计算可以看到, 我们用一类由 3 个参数 α, β, γ 所标识的乌龟坐标对波动方程进行了变换, 结果仅有满足 (21), (22) 和 (23) 式才能将波动方程化作标准形式:

$$\dot{\gamma}|_{v=v_0}=0, \quad \alpha-2\alpha\dot{\alpha}-2m|_{v=v_0}=0,$$

$$\gamma=\frac{m\beta-\alpha^2\dot{\beta}}{2m\alpha\beta}|_{v=v_0},$$

这 3 个条件分别对应于第 1 节中的 κ 不含 v, 零曲面方程以及 κ 随 v_0 取值的表达式.

初始假定里并没有指定让 r 趋于时空里任何特殊位置, 仅仅是趋于一个待定参数 α; 但是最终结果却表明, 波动方程系数的有限性要求 α 必须是零曲面. 因此, 至少在我们所考虑的这类范围广泛的乌龟坐标里, 计算出来的辐射都是来自于零曲面的. 这说明, 类似

$$\begin{aligned}r_* &= r+2m(v)\ln\Big(\frac{r-2m(v)}{2m(v)}\Big), \\ v_* &= v-v_0\end{aligned}$$

这样的乌龟坐标中必然会出现发散. 将参数 α, β, γ 写作 m 的函数以考察表观视界附近辐射的尝试不可行.

另一方面, 该方法在表观视界处的失效, 是否意味着无法在表观视界处建立热力学定律？这也是值得商榷的. 这个结果只是在技术上对乌龟坐标的形式和应用范围做了限定, 因此这个结果尚不能排除在表观视界处建立黑洞热力学的可能.

5 结　论

通过分析乌龟坐标方法应用到表观视界时所遇到的困难, 提出了一组合理乌龟坐标所必须满足的条件. 通过这一组条件可以看出, 乌龟坐标方法只能在事件视界上给出辐射, 因为波动方程只有在此处才能化作标准波动形式.

[1] Damour T, Ruffini R 1976 *Phys. Rev.* D **14** 332

[2] Sannan S 1988 *Gen. Rel. Grav.* **20** 239

[3] Zhao Z, Dai X X 1991 *Chin. Phys. Lett.* **8** 548 (in Chinese) [赵峥, 戴宪新 1991 中国物理快报 **8** 548]

[4] Dai X X, Zhao Z 1992 *Acta Phys. Sin.* **41** 869 (in Chinese) [戴宪新, 赵峥 1992 物理学报 **41** 869]

[5] Li Z H, Zhao Z 1997 *Acta Phys. Sin.* **46** 1273 (in Chinese) [黎忠恒, 赵峥 1997 物理学报 **46** 1273]

[6] Qiang L E, Gao X Q, Zhao Z 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 3619 (in Chinese) [强丽娥, 高新芹, 赵峥 2004 物理学报 **53** 3619]

[7] Zhang J Y, Zhao Z 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 2096 (in Chinese) [张靖仪, 赵峥 2003 物理学报 **52** 2096]

[8] Balbinot R 1986 *Phys. Rev.* D **33** 1611

[9] Ren J, Zhang J Y, Zhao Z 2006 *Chin. Phys. Lett.* **23** 2019

[10] Elias C V, Das S 2006 *J. High Energy Phys.* **25** 0610

[11] Fodor G, Nakamura K, Oshiro Y, Tomimatsu A 1996 *Phys. Rev.* D **54** 3882

[12] Hajicek P 1987 *Phys. Rev.* D **36** 1065

[13] Hiscock W A 1989 *Phys. Rev.* D **40** 1336

[14] Collins W 1992 *Phys. Rev.* D **45** 495

[15] Liu X M, Liu W B 2010 *Int. J. Theor. Phys.* **49** 1088

物 理 学 报 Acta Phys. Sin. Vol. 61, No. 5 (2012) 050401

Discussion on applying tortoise coordinates to a dynamical Vaidya black hole*

Lu Peng-Ju Zhao Zheng Liu Wen-Biao†

(*Department of Physics, Beijing Normal University, Beijing* 100875, *China*)

(Received 7 May 2011; revised manuscript received 27 June 2011)

Abstract

Applying generalized tortoise coordinates with undetermined parameters to a dynamical Vaidya black hole, we find the interesting condition for reducing the wave function into its standard form without divergence. It is shown that the Damour-Ruffini method with tortoise coordinate can be applied only to the event horizon rather than the apparent horizon in a dynamical space time.

Keywords: dynamical black hole, tortoise coordinates, Hawking radiation, apparent horizon

PACS: 04.70.Dy, 04.70.Bw, 97.60.Lf

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 10773002 and 10875012) and the Fundamental Research Funds for the Central Universities of Ministry of Education of China (Grant No. 105116).

† E-mail: wbliu@bnu.edu.cn