

随机基因选择模型中的延迟效应*

王参军[†]

(宝鸡文理学院非线性研究所, 宝鸡 721016)

(2011年6月21日收到; 2011年7月4日收到修改稿)

研究了噪声驱动的基因选择模型中的延迟效应. 据小延迟方法和随机等价法则得到相应的延迟 Fokker-Planck 方程, 给出稳态概率分布函数的近似表达式. 分析了在噪声驱动下, 延迟时间对系统稳态性质的影响. 结果表明: 延迟时间可以诱导系统从单稳态向双稳态转化, 发生相变; 在基因选择过程中, 延迟时间有利于从基因群体中选择出某一单倍体基因. 数值模拟结果与理论预测基本符合.

关键词: 时间延迟, 噪声, 基因选择模型, 相变

PACS: 05.40.-a, 02.50.Ey

1 引言

近些年来, 随机系统的延迟效应引起了广泛的关注, 新的理论和实验研究结果不断涌现. 时间延迟反映了通过系统输运有关的物质、能量、信息的传输时间. 在非线性随机动力学系统的时间延迟方面开展的大量的理论和实验研究工作表明: 系统在噪声和延迟的协同作用下, 会出现一些新的特性和更丰富的动力学行为. Ohira 和 Milton^[1] 研究了时间延迟对随机行走的影响, 发现跳跃的几率依赖于粒子在过去已给的跳跃数目的位置. 文献[2,3]的研究表明: 双稳系统在噪声和延迟的共同作用下, 其关联函数和功率谱在一定的频率时会出现峰, 该频率值与延迟存在一定的定量关系, 因此出现了共振现象. 这种共振现象与一般的随机共振有本质的区别, 随机共振是由于噪声和外界周期驱动力共同作用下出现的, 但是延迟和噪声产生的共振是系统内在的, 自发的, 不依赖于外界影响而产生的. Masoller^[4] 研究了有噪声驱动的双稳性时间延迟反馈的系统, 计算并分析了暂留时间的分布. Huber 和 Tsimzing^[5] 从理论和数值模拟上研究了在噪声影响下的具有全局时间延迟的双稳系统组成的集团的动力学, 结果表明: 整体性时间延迟和噪声作用使双稳反馈系统产生相干共振. Piwonski 等^[6] 还研究了在时间延迟反馈影响下的双稳态系统的

随机动力学性质; 林灵等研究了时间延迟对双稳系统逃逸率的影响, 发现时间延迟增强双稳系统的共振抑制^[7]. 尤其在生物系统中, 大量工作已经开展. 基于 SS-model 的细胞内钙振荡, Ying 和 Huang 研究了时间延迟对细胞内钙浓度的振荡的作用^[8], 发现当参数超过某一临界值时, 系统出现了快振荡和慢振荡两种不同的振荡形式. 时间延迟和噪声共同作用加强了耦合神经元响应的同步性^[9,10]; 时间延迟和噪声共同作用可以大大提高 Brown 马达的能量转换效率^[11]; 时间延迟和噪声的共同作用会抑制互利共生生态系统中的种群数目大爆炸^[12]. 对噪声驱动下集合种群的延迟效应的研究表明, 时间延迟增大将使集合种群在斑块中占有率减小, 使得集合种群的灭绝时间减小^[13]. 文献[14]考虑细胞进化过程中细胞衰减存在延迟及生化反应和环境波动产生的噪声, 研究了 Logistic 模型中的延迟效应, 发现时间延迟增强了系统亚稳态的稳定性, 即抑制肿瘤恶化. 文献[15]研究了随机基因转录调控系统中的延迟效应, 发现延迟时间可以诱导蛋白质浓度发生转化, 即开关现象. 这些研究都表明噪声和时间延迟实际上是非线性系统的一个不可分割的整体, 它们既能单独引起系统向有序转变, 同时又相互制约.

基因的选择性表达是指在细胞分化中, 基因在特定的时间和空间条件下有选择表达的现象, 其

* 国家自然科学基金 (批准号: 11047146)、陕西省自然科学基金 (批准号: 2010JQ1014)、陕西省教育厅自然科学基金 (批准号: 09JK331) 和宝鸡文理学院重点科研项目 (批准号: ZK11053) 资助的课题.

[†] E-mail: cjwangbj@126.com

结果是形成了形态结构和生理功能不同的细胞. 由于细胞分化发生于生物体的整个生命进程中, 所以基因的选择性表达在生命过程各阶段都在体现. 研究噪声和延迟时间对基因选择的影响具有重要的意义.

近来, 基因选择模型中的随机效应的研究引起了广泛的关注. 发现其中存在着相变现象, 噪声有助于基因的选择. 文献[16,17]考虑选择因子受到环境的影响, 引入外噪声, 研究了 Gauss 白噪声驱动的基因选择模型, 发现乘性噪声强度可以诱导系统出现丰富的相变现象, 乘性噪声强度存在一个临界值. 文献[18,19]研究了关联噪声对基因选择的影响, 发现噪声的关联强度也可以诱导相变, 有利于基因的选择. 文献[20—23]研究了乌伦贝克噪声 (色噪声) 对基因选择的影响, 发现自关联时间可以诱导重入现象等. 非 Gauss 色噪声对基因选择的影响也被研究 [24], 结果显示, 非广延参数可以诱导系统发生相变, 利于基因的选择. 以上的研究表明环境引起的波动对基因选择起着至关重要的作用, 充分显示出噪声的积极作用. 但是, 之前的研究只是关注基因选择中的噪声效应, 而忽略了延迟效应. 这些研究的模型都假设基因转换过程和再生过程瞬间完成, 即从非平衡态到平衡态瞬间完成. 然而, 在真实的基因转换过程和再生过程需要一定的时间, 延迟时间是客观存在的. 只有充分考虑延迟时间和噪声, 模型才可能逼近真实的基因选择过程. 因此, 研究噪声驱动的基因选择过程中的延迟效应是非常必要的, 这也是本文的基本出发点.

本文应用小时间延迟方法和随机等价法则, 得到相应的延迟 Fokker-Planck 方程, 给出稳态概率分布函数近似表达式. 分析了在噪声驱动下, 延迟时间对系统稳态性质的影响.

2 随机延迟基因选择模型

考虑某类单倍体, 每个个体可能取 A 和 B 两种不同基因, 取基因 A 和 B 的个体数分别为 N_A 和 N_B , 而单倍体总数 N 是个常数 (即 $N_A + N_B = N = \text{常数}$), 将 N_A 和 N_B 归一化为 x 和 $1 - x$:

$$x = \frac{N_A}{N}, \quad 1 - x = \frac{N_B}{N}, \quad (1)$$

x 将在 $[0,1]$ 区间内变化, 假定 Δt 为相邻代的单倍体的时间间隔, 基因 A, B 会在上下代的遗传中发生更替. 假设从 $A \rightarrow B$ 和 $B \rightarrow A$ 转变的比例分别为 $m_A \Delta t$ 和 $m_B \Delta t$, 则两代之间由变异引起的 $x(t)$

变化为

$$x(t + \Delta t) - x(t) = -m_A \Delta t x(t) + m_B \Delta t [1 - x(t)]. \quad (2)$$

另一方面, 由于环境的选择, 不同基因的单倍体有不同的再生率

$$\begin{aligned} N_A(t + \Delta t) &= \omega_A N_A(t), \\ N_B(t + \Delta t) &= \omega_B N_B(t), \end{aligned} \quad (3)$$

其中,

$$\omega_A = 1 + \frac{S_t}{2}, \quad \omega_B = 1 - \frac{S_t}{2}. \quad (4)$$

$S_t = \mu \Delta t$ 为选择因子. 这样, 自然选择导致的两代间 $x(t)$ 的变化为

$$\begin{aligned} x(t + \Delta t) - x(t) &= \frac{\left(1 + \frac{S_t}{2}\right)x(t)}{\left(1 + \frac{S_t}{2}\right)x(t) + \left(1 - \frac{S_t}{2}\right)(1 - x(t))} \\ &= \frac{S_t x(t)[1 - x(t)]}{1 - \frac{S_t}{2} + S_t x(t)}. \end{aligned} \quad (5)$$

同时考虑 (2) 和 (5) 式, 并令 $\Delta t \rightarrow 0$, 得到 $x(t)$ 的方程为

$$\frac{dx}{dt} = \beta - \alpha x + \mu x(1 - x), \quad (6)$$

其中, $\beta = m_B$, $\alpha = m_A + m_B$. 由于 m_A 和 m_B 仅有相对意义, 不妨令 $m_A + m_B = 1$. μ 是基因选择率, $\mu = 1$ 意味着个体完全选择基因 A, $\mu = -1$ 意味着个体完全选择基因 B, $\mu = 0$, 意味着个体选择基因 A 或者 B 的几率是对等的.

最后得到无量纲的双参数基因选择动力学方程

$$\frac{dx}{dt} = \beta - x + \mu x(1 - x), \quad (7)$$

这里 $0 \leq x \leq 1$.

有意思的是, 确定性方程 (7) 的最大特点是无论怎么变化 β 和 μ , 该方程在 $[0,1]$ 区间内只有唯一的稳定态解

$$\bar{x} = \frac{\mu - 1 + \sqrt{(\mu - 1)^2 + 4\beta\mu}}{2\mu}. \quad (8)$$

方程 (7) 的势函数

$$U(x) = -\beta x + \frac{1}{2}(1 - \mu)x^2 + \frac{\mu}{3}x^3, \quad (9)$$

也相应地仅在 \bar{x} 处有一极小值. 这说明在确定性模型中, 基因选择过程不存在任何相变机制.

在实际的基因单倍体上下代的遗传中, 系统会发生一些生化反应, 产生内部波动, 同时也会受到

某些外界环境的干扰, 会使选择因子 $S_t = \mu\Delta t$ 产生外部涨落, 即单倍体的外部环境直接影响参数 μ , 使得 $\mu \rightarrow \mu + \epsilon(t)$. 同时, 由于完成基因转换过程和再生过程需要一定的时间, 这个时间造成再生和转换的延迟, 因此时间延迟是客观存在的. 本文中考虑单倍体基因 A 的再生过程存在延迟, 即方程 (7) 的第二项变为 $x(t - \tau)$. 综合这两个因素, 对确定性模型 (7) 进行修正, 得到随机延迟基因选择模型:

$$\begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} = & \beta - x(t - \tau) + \mu x(t)(1 - x(t)) \\ & + x(t)(1 - x(t))\epsilon(t), \end{aligned} \quad (10)$$

其中, $\epsilon(t)$ 是 Gauss 白噪声, 其统计性质为 $\langle \epsilon(t) \rangle = 0$, $\langle \epsilon(t)\epsilon(t') \rangle = 2D\delta(t - t')$, D 是乘性 Gauss 白噪声强度, τ 是延迟时间.

3 稳态概率分布

用 x_τ 代替 $x(t - \tau)$, 方程 (10) 可以改写为

$$\begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} = & \beta - x_\tau + \mu x(t)(1 - x(t)) \\ & + x(t)(1 - x(t))\epsilon(t). \end{aligned} \quad (11)$$

应用随机等价算法^[25,26], 可以得到方程 (11) 的近似随机微分方程为

$$\frac{dx(t)}{dt} = h(x, x_\tau) + G(x)\Gamma(t), \quad (12)$$

其中 $\Gamma(t)$ 为 Gauss 白噪声, 其统计性质满足 $\langle \Gamma(t)\Gamma(t') \rangle = 2\delta(t - t')$.

$$h(x, x_\tau) = \beta - x_\tau + \mu x(1 - x), \quad (13)$$

$$G(x) = \sqrt{Dx^2(1 - x)^2}. \quad (14)$$

进一步应用小时间延迟方法^[27-29], 延迟随机微分方程 (12) 可以近似写为

$$\frac{dx(t)}{dt} = h_a(x, x_\tau) + G_a(x, x_\tau)\Gamma(t), \quad (15)$$

其中

$$h_a(x, x_\tau) = h(x, x)C(x, \tau), \quad (16)$$

$$G_a(x, x_\tau) = G(x)C(x, \tau), \quad (17)$$

$$h(x, x) = \beta - x + \mu x(1 - x), \quad (18)$$

$$C(x, \tau) = 1 - \frac{\partial}{\partial x_\tau} h(x, x_\tau)|_{x_\tau=x} = 1 + \tau. \quad (19)$$

最终得到对应方程 (10) 的近似延迟 Fokker-Planck 方程:

$$\frac{\partial P(x, t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} A(x)P(x, t) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} B(x)P(x, t), \quad (20)$$

$$A(x) = h_a(x, x_\tau) - G_a(x, x_\tau) \frac{dG_a(x, x_\tau)}{dx}, \quad (21)$$

$$B(x) = [G_a(x, x_\tau)]^2. \quad (22)$$

由于 x 为基因 A 占总个体数的比率, 在 $[0,1]$ 区间内变化, 因此在区间 $[0,1]$ 内, 在定态情况下求解方程 (20), 可以得到其定态概率分布函数为

$$P_{\text{st}}(x) = NB(x)^{-1} \exp \left[\int^x \frac{A(x')}{B(x')} dx' \right], \quad (23)$$

其中 N 为归一化常数. 在不失一般性的情况下, 选择 $\beta = 1/2$, 得到系统稳态概率分布的表达式为

$$\begin{aligned} P_{\text{st}}(x) = & NB(x)^{-\frac{1}{2}} \exp \left\{ -\frac{1}{D(1 + \tau)} \right. \\ & \left. \times \left[\frac{1}{2x(1 - x)} - \mu \ln \left(\frac{1 - x}{x} \right) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (24)$$

为了分析 $P_{\text{st}}(x)$ 的极值, 将方程 (23) 改写为

$$\begin{aligned} P_{\text{st}}(x) = & NB(x)^{-1} \exp \left[\int^x \frac{A(x')}{B(x')} dx' \right] \\ = & N \exp[-U_{\text{EF}}(x)], \end{aligned} \quad (25)$$

$U_{\text{EF}}(x)$ 是系统的随机势,

$$U_{\text{EF}}(x) = \ln B(x) - \int^x \frac{A(x')}{B(x')} dx', \quad (26)$$

为了分析 $U_{\text{EF}}(x)$ 的极值分布, 可求解方程:

$$\begin{aligned} \frac{dU_{\text{EF}}(x)}{dx} = & (1 + \tau) \left(\frac{1}{2} - x + \mu x(1 - x) \right) \\ & - (1 + \tau)^2 Dx(1 - x)(1 - 2x) \\ = & 0. \end{aligned} \quad (27)$$

应用方程 (27) 可以分析 $P_{\text{st}}(x)$ 的极值分布. 在 $\mu - D$ 或者 $\mu - \tau$ 相平面上的临界曲线由下式给出:

$$A(\mu^2)^2 + B(\mu^2) + C = 0, \quad (28)$$

其中系数 A, B, C 由方程 (27) 给出:

$$\begin{aligned} A = & -3(1 + \tau)^4, \\ B = & -3(1 + \tau)^4 + 6(1 + \tau)^6 D^2 + 30(1 + \tau)^5 D, \\ C = & -36(1 + \tau)^6 D^2 - 3(1 + \tau)^8 D^4 \\ & + 24(1 + \tau)^5 D + 18(1 + \tau)^7 D^3. \end{aligned} \quad (29)$$

相边界曲线 $\mu(D, \tau)$ 可以通过求解方程 (28) 得到:

$$\mu(D, \tau) = \pm \sqrt{\frac{-B + \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}}. \quad (30)$$

根据方程 (30), 在参数平台 (μ, τ) 和 (μ, D) 可以做出相边界曲线, 如图 1 和图 2 所示. 从图 1 和图 2 中可以看出, 每条边界曲线将相平面分为两个区域. 相边界曲线以上代表单稳态区域, 此时, $P_{\text{st}}(x)$ 曲线只有一个最大值; 相边界曲线以下代表

双稳态区域, 此时, $P_{st}(x)$ 曲线呈现两个最大值. 没有噪声和延迟时, 确定性方程 (10) 仅仅在 $x = 1/2$ 有一个稳定态. 然而, 当系统受到噪声的扰动时, 系统经历了从单稳态到双稳态的相变现象, 噪声强度存在一个临界值 $D = 2$. 当 $D < 2$ 时, 概率分布呈现出单峰结构, 相反, 当 $D > 2$ 时, 概率分布呈现双峰结构 [16].

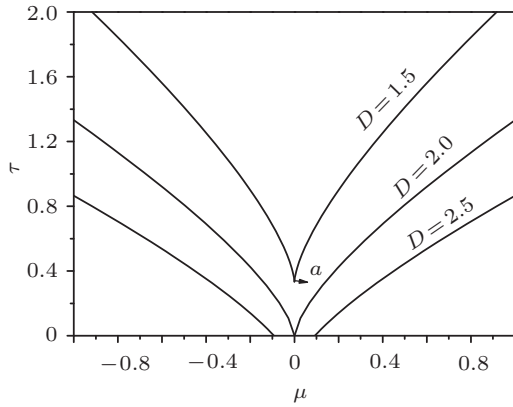


图 1 根据方程 (30) 在相平面 (μ, τ) 上做出的相图 分别画出了 $D = 1.5, D = 2.0, D = 2.5$ 三条相边界曲线. 每条边界曲线将相平面 (μ, τ) 分为两个区域, 相边界曲线以下代表单稳态区域, 此时, $P_{st}(x)$ 曲线只有一个最大值; 相边界曲线以上代表双稳态区域, 此时, $P_{st}(x)$ 曲线呈现两个最大值. 点 a 的位置为 $(\mu = 0, \tau = 0.34)$.

从图 1 中可以看出, 延迟时间 τ 也可以促使系统从单稳态到双稳态转变, 产生相变. 例如, 对应 $D = 1.5$ 的相边界曲线, 延迟时间对应的临界值为 $\tau = 0.34$ (图 1 a 点), 当 $\tau < 0.34$ 时, 概率分布呈现出单峰结构. 相反, 当 $\tau > 0.34$ 时, 概率分布呈现双峰结构. 但是当 $D = 2$ 时, 延迟时间对应的临界值为 $\tau = 0$. 这意味着, τ 的任意增加都会促使系统从单稳态向双稳态转化. $D = 2.5$ 时, 系统本身就处于双稳态, τ 的增加会进一步扩大双稳态区域, 双稳态更加显著. 随着 D 的增加, 单稳态区域减小, 双稳态区域变大. 由于相边界曲线随着 D 变化, 因此可以说, 不同相参数区域的大小可以通过调整 D 实现.

从图 2 中可以看出, 当无延迟 $\tau = 0$ 时, 系统返回为随机模型, 系统的相变仅仅由噪声决定. 当延迟被考虑后, 随着延迟时间的增加双稳区域增大, 系统发生相变变得更为容易. 图 2 中每一条 $\tau \neq 0$ 的曲线, 也将相平面分为两个区域, 相边界曲线以上代表单稳态区域, 相边界曲线以下代表双稳态区域. 然而, 随着 τ 的增加, 单稳态区域减小, 双稳态区域变大, 这与正关联情况一致 [19]. 由于相边界曲线随着 τ 变化, 定点 $b(\mu = 0, D = 2)$ 所在的区域也发生变化. 例如: 当 $\tau = 0$, 定点 $b(\mu = 0, D = 2)$ 的 $P_{st}(x)$ 只有一个最大值. 然而, 当 $\tau = 0.5$, 定

点 $b(\mu = 0, D = 2)$ 的 $P_{st}(x)$ 有两个最大值, 且关于 $x = 1/2$ 对称. 这个事实表明: 延迟诱导系统发生相变; 不同相参数区域的大小也可以通过调整 τ 实现.

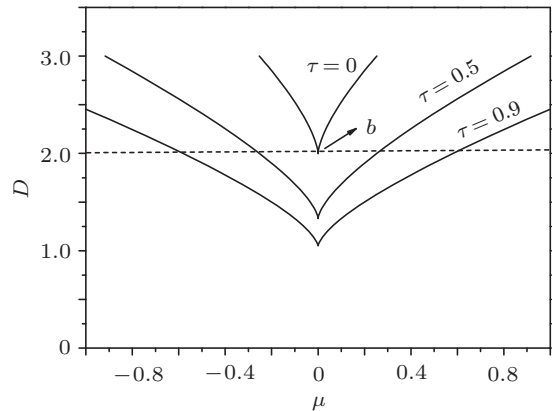


图 2 根据方程 (30) 在相平面 (μ, D) 上做出的相图 分别画出了 $\tau = 0, \tau = 0.5, \tau = 0.9$ 三条相边界曲线. 每条边界曲线将相平面 (μ, D) 分为两个区域, 相边界曲线以下代表单稳态区域, 此时, $P_{st}(x)$ 曲线只有一个最大值; 相边界曲线以上代表双稳态区域, 此时, $P_{st}(x)$ 曲线呈现两个最大值. 点 b 的位置为 $(\mu = 0, D = 2)$

最后要强调的是, 噪声和时间延迟在该系统中的作用是一致的, 均可以诱导系统从单稳态向双稳态转化.

为了验证上面的分析结果, 根据方程 (24) 做出当延迟时间 τ 取不同的值时, 稳态概率分布 $P_{st}(x)$ 作为 x 的函数, 如图 3(a) 所示. 图 3(b) 为直接模拟方程 (10) 做出的数值模拟结果. 从图 3 可看出, 随着延迟时间 τ 的增大, $P_{st}(x)$ 曲线的结构由单峰变为双峰, 这也说明延迟时间可以诱导相变, 图 3 对应图 1 $D = 1.5$ 的相边界曲线. 当 $\tau = 0.1$ 时, $P_{st}(x)$ 只有一个单峰, 对应相平面的单稳态区域. 当 τ 增加到 0.34 (临界值) 时, $P_{st}(x)$ 也呈现单峰结构. 然而 $\tau = 0.9$ 大于临界值 0.34, $P_{st}(x)$ 呈现双峰结构, 对应相平面的双稳态区域. 值得注意的是, 图 3 中, 我们选择的噪声强度 $D = 1.5$ 小于引起相变的临界值 $D = 2$, 也就是说, 在无延迟时, 此时系统仅仅呈现单峰结构. 然而, 随着延迟时间 τ 超过其临界值时, 出现双峰结构, 此时的相变完全是由延迟时间引起的.

通过上面的讨论我们可以得到噪声和延迟的联合可以使一个无相变现象的确定性系统出现相变现象. 除了单稳态, 系统出现了双稳态. 下面我们将阐述双稳态的生物意义. 当 $\tau = 0.1$ 时, $P_{st}(x)$ 只有一个单峰, 意味着单倍体个体选择基因 A 或者 B 的概率是对等的, 从群体中选择出某种单倍体基因是非常困难的. 随着延迟时间 τ 的增大, $P_{st}(x)$ 曲

线逐渐转化为双峰结构,且关于关于 $x = 1/2$ 对称. 峰的高度逐渐降低,双峰之间的距离变大,左峰接近 $x = 0$,右峰接近 $x = 1$. 这表明环境选择使得基因 A 或者基因 B 出现的概率最大. 延迟时间 τ 较大时,系统不再处于 $x = 1/2$ 的稳定态,AB 对称性

的状态被破坏,使某种基因被选择出来. 在这种情况下,从群体中选择出某一单倍体基因将变得容易. 此时,其他单倍体基因的数目相对被选择的单倍体数目可以被忽略. 也就是说,延迟时间 τ 有利于基因的选择.

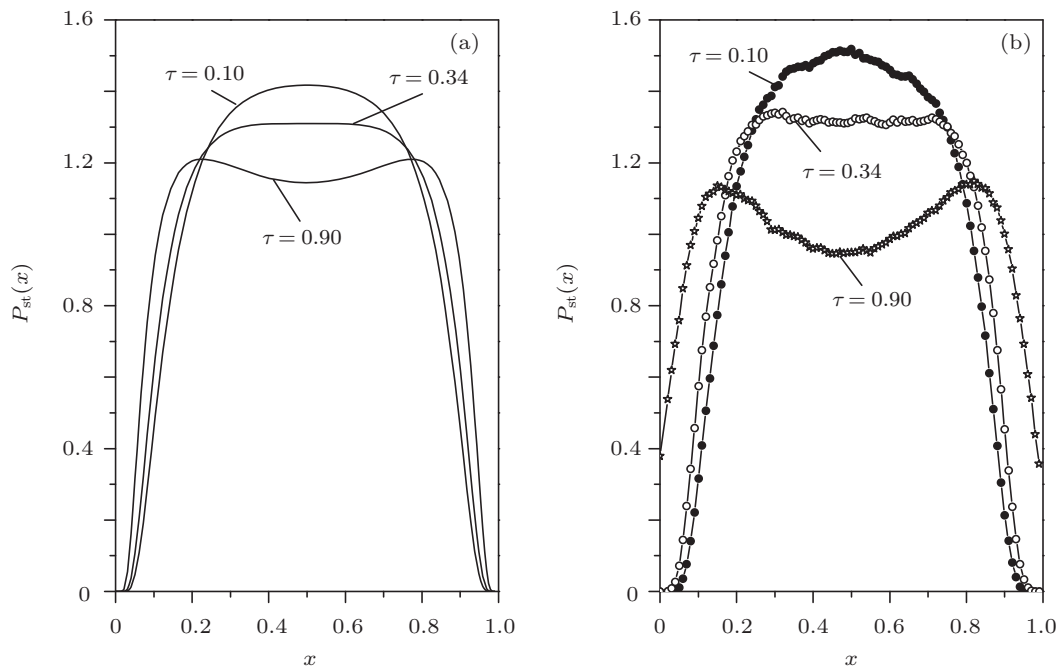


图3 稳态概率分布 $P_{st}(x)$ 作为 x 的函数,其中 $D = 1.5, \mu = 0, \tau = 0.1, 0.34, 0.9$ (a) 根据方程 (24) 做出的理论结果; (b) 直接模拟方程 (10) 做出的数值模拟结果

4 结论

研究了噪声驱动的基因选择模型中的时间延迟效应. 据小延迟方法和随机等价法则得到相应的延迟 Fokker-Planck 方程,给出稳态概率分布函数近似表达式. 利用相图分析了稳态概率分布的极值情况,发现相平面被划分为单峰和双峰区域. 发现延迟可以诱导系统出现相变,并可以扩大双稳态的区

域. 根据稳态概率分布的表达式,讨论了延迟效应. 结果表明:延迟时间可以诱导系统从单稳态向双稳态转化,发生相变;在基因选择过程中,延迟时间有利于从基因群体中选择出某一单倍体基因;数值模拟结果与理论预测基本符合. 延迟时间对基因选择模型对称性的破坏,是一种对称性破缺现象,这种对称性破缺和特定基因的选择直接联系着序的产生和生物的进化过程,是自组织过程中的重要一环.

[1] Ohira T, Milton J G 1995 *Phys. Rev. E* **52** 3277
 [2] Tsimring L, Pikovsky A 2001 *Phys. Rev. Lett.* **87** 250602
 [3] Houlihan J, Goulding D, Busch T, Masoller C, Huyet G 2004 *Phys. Rev. Lett.* **92** 050601
 [4] Masoller C 2003 *Phys. Rev. Lett.* **90** 020601
 [5] Huber D, Tsimring L 2003 *Phys. Rev. Lett.* **91** 260601
 [6] Piwonski T, Houlihan J, Busch T, Huyet G 2005 *Phys. Rev. Lett.* **95** 040601
 [7] Lin L, Yan Y, Mei D C 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 2240 (in Chinese) [林灵, 闫勇, 梅冬成 2010 物理学报 **59** 2240]
 [8] Ying Y J, Huang Z Q 2001 *Chin. Phys. Lett.* **18** 695
 [9] Dhamala M, Jirsa V K, Ding M 2004 *Phys. Rev. Lett.* **92** 028101
 [10] Dhamala M, Jirsa V K, Ding M 2004 *Phys. Rev. Lett.* **92** 074104
 [11] Wu D, Zhu S 2006 *Phys. Rev. E* **73** 051107
 [12] Nie L R, Mei D C 2007 *Eur. Phys. Lett.* **79** 20005
 [13] Li J C, Mei D C 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 6792 (in Chinese) [李江城, 梅冬成 2008 物理学报 **57** 6792]
 [14] Yang L J 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 050502 (in Chinese) [杨林静 2011 物理学报 **60** 050502]
 [15] Wang J Y, Zhu C L, Jia Y, Li J R 2006 *Chin. Phys. Lett.* **23** 1398
 [16] Hu G 1994 *Stochastic Forces and Nonlinear Systems* (Shanghai: Shanghai Science and Technological Education Publishing House) p163-168 (in Chinese) [胡岗 1994 随机力与非线性系统 (第1版) (上海: 上海科技教育出版社) 第163—168页]

- [17] Horsthemke W, Lefever R 1984 *Noise-Induced Transitions: Theory and Applications in Physics, Chemistry, and Biology* (Berlin: Springer-Verlag)
- [18] Ai B Q, Chen W, Wang X J, Liu G T, Wen D H, Liu L G 2003 *Commun. Theor. Phys.* **39** 765
- [19] Zhang L, Cao L 2010 *Chin. Phys. Lett.* **27** 060504
- [20] Wang C J, Mei D C 2008 *Chin. Phys. B* **17** 479
- [21] Castro F, Sánchez A D, Wio H S 1995 *Phys. Rev. Lett.* **75** 1691
- [22] Soldatov A V 1993 *Mod. Phys. Lett. B* **7** 1253
- [23] Zhang X M, Ai B Q 2010 *Eur. Phys. J. B* **73** 433
- [24] Wio H S, Toral R 2004 *Physica D* **193** 161
- [25] Wu D J, Cao L, Ke S Z 1994 *Phys. Rev. E* **50** 2496
- [26] Cao L, Wu D J, Ke S Z 1995 *Phys. Rev. E* **52** 3228
- [27] Guillouzac S, L'Heureux I, Longtin A 1999 *Phys. Rev. E* **59** 3970
- [28] Guillouzac S, L'Heureux I, Longtin A 2000 *Phys. Rev. E* **61** 4906
- [29] Wu D, Zhu S Q 2007 *Phys. Lett. A* **363** 202

Time-delay effect of a stochastic genotype selection model*

Wang Can-Jun[†]

(Nonlinear Research Institute, Baoji University of Arts and Sciences, Baoji 721016, China)

(Received 21 June 2011; revised manuscript received 4 July 2011)

Abstract

The time-delay effect of a genotype selection model driven by noise is investigated. The approximate delay Fokker-Planck equation is obtained based on the small time delay method and the stochastic equivalent rule. The explicit expression of the steady state probability distribution is derived, and the effect of the time delay on the steady state properties of the genotype selection model driven by noise is discussed. It is found that the time delay can induce the transition from monostable state to bistable state. The time delay is helpful to select one type of genes from another type of mixing genes. The theoretical predictions are found to be in basic agreement with numerical results.

Keywords: time delay, noise, genotype selection model, transition

PACS: 05.40.-a, 02.50.Ey

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 11047146), the Natural Science Foundation of Shaanxi Province of China (Grant No. 2010JQ1014), the Science Foundation of the Education Bureau of Shaanxi Province, China (Grant No. 09JK331) and the Science Foundation of Baoji University of Science and Arts of China (Grant No. ZK11053).

[†] E-mail: cjwangbj@126.com