

基于 Duffing 振子的变尺度微弱特征 信号检测方法研究*

赖志慧 冷永刚[†] 孙建桥 范胜波

(天津大学机械工程学院, 天津 300072)

(2011 年 6 月 8 日收到; 2011 年 7 月 13 日收到修改稿)

研究了 Holmes 型 Duffing 方程的混沌特性用于信号检测的方法, 针对该方法只适用检测特定频率成分信号、方程参数选择不便以及噪声影响检测结果等情况, 提出基于 Duffing 振子的变尺度微弱特征信号检测方法. 数值分析表明, 该方法可以仅用一组确定的参数条件, 检测任意频率、任意相位的特征信号.

关键词: Duffing 振子, 微弱特征信号, Gauss 白噪声, 变尺度

PACS: 05.45.-a, 05.40.-a, 02.60.Cb

1 引言

信号检测技术在工程领域中有着广泛的应用, 如果被测信号非常微弱, 那么它很容易被噪声干扰而淹没, 对其检测往往变得十分困难. 传统上微弱信号检测方法主要是滤除抑制噪声^[1-3], 但这种方法可能会损害有用信号. 基于混沌的微弱信号检测方法^[4-6]可以有较好的改善, 其检测性能可达到较低的信噪比. 目前, Duffing 系统是产生混沌现象的一类常用非线性系统, 利用它对噪声的免疫特性和对微弱信号的敏感性, 可以对特定频率成分的微弱信号进行检测. 然而, 基于 Duffing 振子的检测方法存在的问题是, 不仅系统受到小频率参数的限制, 只能检测低频信号; 而且对于不同的待测信号, 难以确定检测方程中合适的临界参数取值; 另外, 该方法也不能完全排除噪声对信号检测产生的影响.

针对 Duffing 振子的微弱信号检测方法存在的问题, 本文提出基于 Duffing 振子的变尺度检测方法, 该方法能够仅利用一组确定的参数条件, 对任意频率、任意相位的微弱特征信号进行检测. 这种方法是一种值得探索的微弱信号检测新方法.

2 Duffing 系统的混沌检测特性

考虑一个具有对称性弹性势能的非线性弹性系统, 其势函数为

$$U(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^4, \quad (1)$$

它有两个极小值 ($x = \pm 1$), 中间夹一极大值 ($x = 0$), 从而形成被中部势垒分隔开的两势阱, 如图 1 所示. 中间 $x = 0$ 是不稳定平衡点, 两侧 $x = \pm 1$ 是两个稳定平衡点, 故此系统又称为双稳 (态) 系统. 图 1 的曲线可理解为势场的轨道, 一个粒子在左右两个势阱中运动, 其轨迹为 $x(t)$. 考虑单位质量 $m = 1$ 的粒子受到外场作用力 $F(t)$ 和阻尼力 $k\dot{x}$ 的作用以及势场对粒子的作用力 $dU(x)/dx$, 其轨迹运动方程为

$$\ddot{x} + k\dot{x} + dU(x)/dx = F(t). \quad (2)$$

当外场作用力 $F(t)$ 是圆频率 $\omega = 1$ rad/s, 幅值为 A 的周期驱动力 $A\cos t$ 时, 方程 (2) 变为方程 (3) 的形式, 称为 Holmes 型 Duffing 系统方程^[7]:

$$\ddot{x} + k\dot{x} - x + x^3 = A\cos t \quad (3)$$

其中 k 是阻尼比, $-x + x^3$ 是非线性恢复力. 由于

* 国家自然科学基金 (批准号: 50975202) 资助的课题.

[†] E-mail: leng_yg@tju.edu.cn

方程中非线性项的存在, Duffing 方程 (3) 具有丰富的非线性动力学特性 [8], 是研究混沌的常用模型之一.

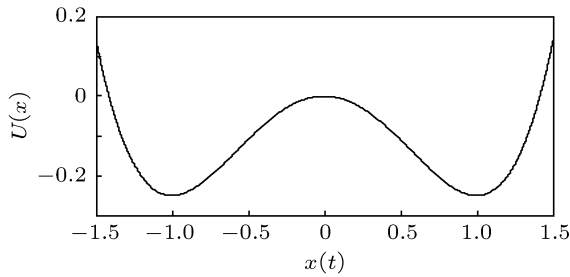


图1 双稳系统的势函数

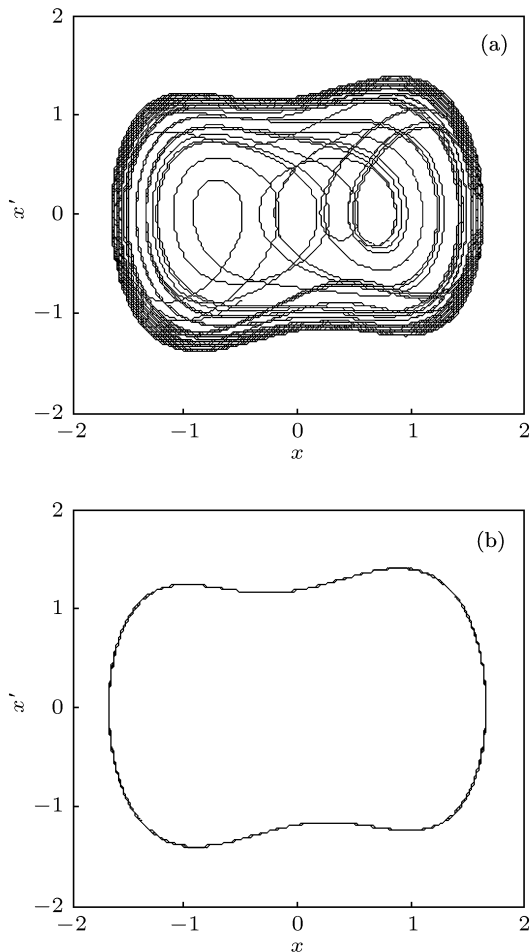


图2 混沌状态向大尺度周期状态的转化 (a) $k = 0.5$, $A = 0.825$, 混沌状态; (b) $k = 0.5$, $A = 0.826$, 大尺度周期状态

混沌系统所特有的性质之一是系统对初始条件的敏感性, 即系统初始条件的微小改变会导致系统状态的显著变化. 对 Duffing 系统而言, 这一初始条件的敏感性等价于对系统参数 A 的敏感性 [9]. 例如, 在方程 (3) 中取参数 $k = 0.5$, 初始

值 $x(0) = x'(0) = 0$, 采用四阶 Runge-Kutta 法进行求解, 计算步长为 0.01 s , 计算点数为 $N = 100000$, 并由后 50000 个点绘出系统的相轨迹. 当系统受到幅度 $A = 0.825$ 的周期力驱动时, 系统处于混沌状态, 如图 2(a) 所示; 而当系统受到幅度 $A = 0.826$ 的周期力驱动时, 系统则处于大尺度周期状态, 如图 2(b) 所示. 可以看出, 系统参数 A 的微小改变能够引起系统状态的显著变化. 因此驱动幅度 $A = 0.825$ 可认为是略小于系统由混沌状态向大尺度周期状态转化的临界幅值 A_d .

保持其他参数条件不变, 在方程 (3) 中取 $A = A_d$, 将含有噪声强度为 D 的 Gauss 白噪声 $n(t)$ 的待测信号 $s(t)$ 作为周期驱动力的摄动输入到系统中, 方程 (3) 变为

$$\ddot{x} + k\dot{x} - x + x^3 = A_d \cos t + s(t) + n(t). \quad (4)$$

在方程 (4) 中, 为叙述方便, 我们称 $A_d \cos t$ 为驱动信号, $s(t)$ 为待测信号或有用信号, $n(t)$ 为噪声信号. 取 $A_d = 0.825$, $D = 0.05$, $s(t) = 0.01 \cos t$, 则上述参数下待测信号 $s(t)$ 对噪声信号 $n(t)$ 的信噪比 SNR 约等于 -33.01 dB , 这里信噪比定义为 $SNR = 10 \log(\psi_s^2 / \psi_n^2)$, 其中 ψ_s^2 表示待测信号 $s(t)$ 的均方值, ψ_n^2 表示噪声信号 $n(t)$ 的均方值. 显然, 对 $s(t) + n(t)$ 信号直接做频谱分析很难从噪声中辨别出待测信号, 此时的待测信号 $s(t)$ 是一微弱谐波信号. 但是, 当 $s(t) + n(t)$ 信号输入到处于从混沌向大尺度周期转化临界状态的 Duffing 系统中时, 即可由方程 (4) 解得的相轨迹中识别出待测信号 $s(t)$, 如图 3 所示. 从图 2(a) 到图 3 的变化可知, 一方面, 由于待测信号的圆频率与系统设置的外加驱动力圆频率 $\omega = 1 \text{ rad/s}$ 相同, 因此待测信号的输入可使驱动信号幅值增大, 并大于临界幅值 A_d , 使系统从混沌状态转化为大尺度周期运动状态; 另一方面也可以看出, 虽然待测信号中含有一定量的 Gauss 白噪声, 但并不影响该待测信号对系统状态的改变, 即 Duffing 系统对 Gauss 白噪声具有免疫特性 [10]. 这就是利用 Duffing 振子对微弱信号 $s(t)$ 进行检测的基本原理.

虽然基于 Duffing 振子的检测方法可以检测含有噪声的微弱信号, 但是要将这一方法应用于实际工程中还存在如下问题.

第一, 系统临界幅值与驱动信号频率的取值关系. 临界幅值 A_d 的取值依赖于 Duffing 系统的各

参数条件, 它由系统参数 k , 初始值 $(x(0), \dot{x}(0))$, 驱动信号频率 ω , Runge-Kutta 法的计算步长等因素

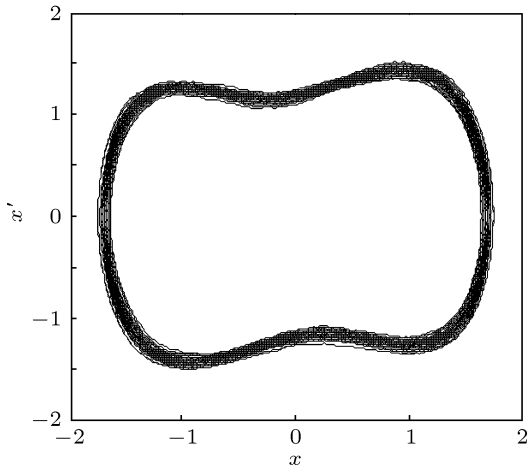


图3 强度为 $D = 0.05$ 的噪声信号 $n(t)$ 与待测信号 $s(t) = 0.01 \cos t$ 输入系统后的相轨迹, $k = 0.5, A_d = 0.825$

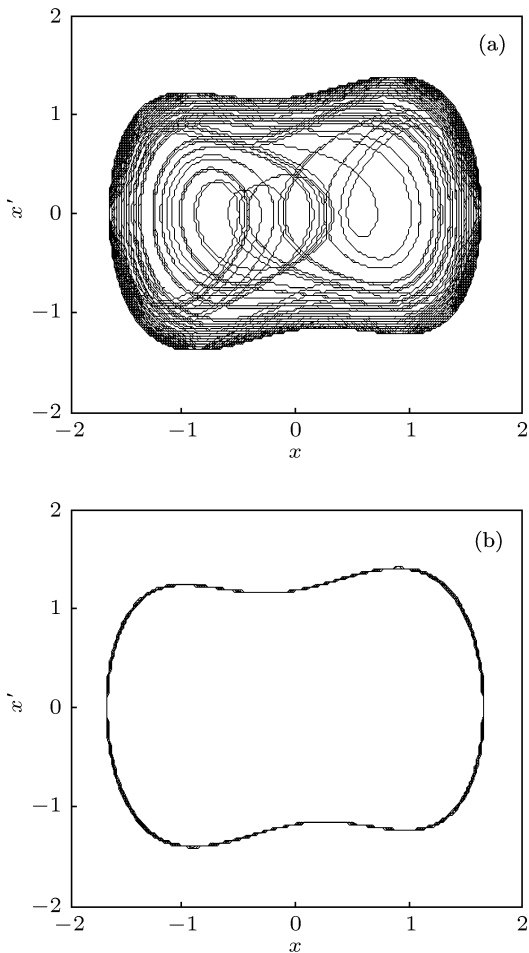


图4 噪声诱导的系统状态转化 (a) $k = 0.5, A_d = 0.826, D = 0$ 混沌状态; (b) $k = 0.5, A_d = 0.826, D = 0.0001$, 大尺度周期状态

共同决定. 特别地, 在保持其他参数条件不变的情

况下, 如果系统的驱动信号频率不同, 那么系统临界幅值 A_d 的取值也不相同. 对于实际工程信号而言, 要想将某一频率成分的信号检测出来, 就要将方程 (4) 的驱动信号频率设置为该待测信号的频率值, 然而这个待测信号的频率值往往是很难确定的. 另一方面, 即使我们事先知道该待测信号的频率值, 并将方程 (4) 中的驱动信号频率值设为与之相等, 那么也要经过大量仿真重新求取这一频率参数条件下的系统临界幅值 A_d . 如果每一次都重复这个过程, 显然是不经济的. 所以, 在实际工程中该方法用于检测某一频率的信号成分时, A_d 取值的不灵活性和对驱动信号频率的依赖性对这一方法的应用造成很大的不方便.

第二, Duffing 系统的小频率参数限制^[11]. 前面例子中, 驱动信号频率设置为 $\omega = 1 \text{ rad/s}$, 这一方面是为了计算方便, 另一方面, 数值仿真研究表明, 如果驱动信号频率设置太大, 系统的动态响应特性将变得很差, 不能出现前述的混沌状态和大尺度周期状态. 因此, Duffing 系统只有在小频率参数条件下有较好的动态特性和检测效果. 然而实际工程中并不一定总能满足小频率成分的条件, 实际信号圆频率可能会比 1 rad/s 大得多. 因此, 如果实际信号中需要检测的信号圆频率远远大于 1 rad/s , 那么在这个参数条件下, 系统的动态响应特性恶化, 给检测带来很大的困难和误差.

第三, 含噪信号检测结果的真实性. 前文已经提到, Duffing 系统对 Gauss 白噪声具有免疫特性, 但是, 这一免疫特性并不是绝对的. 例如, 方程 (4) 在 $k = 0.5$, 初始值 $x(0) = x'(0) = 0$ 的条件下, 采用四阶 Runge-Kutta 法进行求解, 取计算步长 0.02 s , 此时系统临界幅值 $A_d = 0.826$, 在不输入待测信号和噪声时, 系统处于混沌状态, 如图 4(a) 所示. 此时, 若只输入强度为 $D = 0.0001$ 的随机 Gauss 白噪声信号 $n(t)$, 即待测信号 $s(t) = 0$ 时, 系统将有可能发生状态变化, 从混沌状态转化为大尺度周期状态, 如图 4(b) 所示. 这一现象说明, 当系统处于由混沌状态向大尺度周期状态转化的临界状态时, 即使没有同频或近频信号的输入, 也可能由于 Gauss 白噪声诱导驱动信号而使系统状态发生转化. 因此, 假设前两个问题都能够解决, 当含噪信号 $s(t) + n(t)$ 作为摄动项输入到 Duffing 系统 (4) 中, 使系统从混沌状态转变为大尺度周期状态, 那么这种混沌到大尺度周期的变化是噪声诱导的还是同频信号的加

强所致,也不能完全确定.因此也就不能判断确定输入信号中是否含有待测频率的信号成分.

3 基于 Duffing 振子的变尺度微弱特征信号检测

3.1 检测原理

针对上述 Duffing 系统检测微弱信号存在的问题,引入变尺度思想^[12-14],提出基于 Duffing 振子的变尺度微弱信号检测方法.所谓变尺度,就是指改变信号的时间(或频率)尺度,即对于待测信号,在不改变其离散数值的情况下,将其在时间尺度上进行压缩或放大.这种时间尺度变换并不改变参与计算数据的数值,只是在时间(或频率)轴上对数值进行了重新排序^[15].

3.1.1 不含噪情况

在不考虑噪声的情况下,假设待测信号 $s(t)$ 为 $h \cos(\omega t)$, 其中 h 是其幅值, $\omega \neq 1 \text{ rad/s}$ 是其圆频率.显然,由于待测信号的频率值不等于驱动信号的频率值,方程(4)所描述的 Duffing 系统并不能将待测信号的频率值检测出来.保持方程(4)各参数条件不变,仅引入一个变尺度系

数 R , 使待测信号 $s(t)$ 在其时间轴上放大 R 倍, 即 $t' = Rt$. 此时, 数值上若能使 $R = \omega$, 则待测信号变为 $s(t') = h \cos(\omega t) = h \cos \omega \cdot t'/R = h \cos t'$, 就相当于将待测信号的圆频率在频率轴上从 ω 压缩为 1 rad/s . 当该信号输入 Duffing 系统之后, 在 Duffing 振子的作用下就可以将 $s(t')$ 检验出来. 然后根据 $R = \omega$ 的关系确定被检测出来的待测信号含有圆频率 ω 成分.

在具体处理实际信号时, 由于无法通过 $s(t') = h \cos(\omega t) = h \cos \omega \cdot t'/R = h \cos t'$ 这样的线性变换来直接对采集信号进行重构, 因此利用该变尺度方法对实际微弱信号进行检测时, 我们是通过数值计算的步长进行尺度变换来实现的. 一般来说, 若信号的采样频率为 f_s , 则数值计算的步长 $dt = 1/f_s$. 当引入变尺度系数 R 时, 数值计算步长变为 $dt' = Rdt = R/f_s$, 也就是人为地将信号的时间间隔增大了 R 倍, 相应的信号的圆频率则被压缩了 R 倍. 这一变换的本质在于, 一个采样频率为 f_s 圆频率为 ω 的采集信号, 通过变尺度系数 R 进行尺度变换之后, 变成了一个采样频率为 f_s/R 圆频率为 ω/R 的信号. 当 $R = \omega$ 时, 将该信号输入到 Duffing 系统方程(4)中, 并令计算步长 $dt' = Rdt = R/f_s$, 即可识别出该微弱信号.

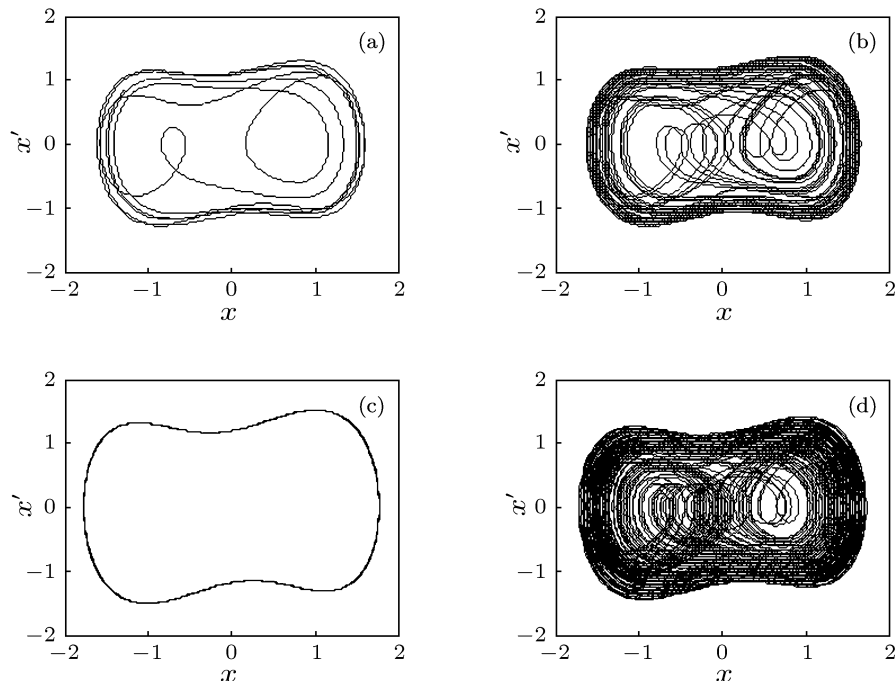


图5 变尺度方法检测待测微弱信号 $s(t) = 0.1 \cos(20t)$, $k = 0.5, A = 0.8$ (a) 没有引入变尺度系数 R 时系统的混沌状态; (b) 变尺度系数 $R = 10$ 时系统的混沌状态; (c) 变尺度系数 $R = 20$ 时系统的大尺度周期状态; (d) 变尺度系数 $R = 30$ 时系统的混沌状态

下面给出一个仿真实例. 在方程 (4) 中, 取阻尼比 $k = 0.5$, 系统初始条件为 $(x(0), \dot{x}(0)) = (0, 0)$, 计算点数为 $N = 100000$. 将驱动信号的圆频率设为 $\omega = 1 \text{ rad/s}$, 幅值 A 设为略小于临界幅值 A_d , 令 $A = 0.8$. 将这组参数条件下的方程 (4) 写成如下方程 (5):

$$\ddot{x} + 0.5\dot{x} - x + x^3 = 0.8 \cos t + s(t) + n(t). \quad (5)$$

在方程 (5) 中, 假设待测信号采样频率为 $f_s = 1000 \text{ Hz}$, 且 $s(t) = 0.1 \cos(20t)$, 噪声信号 $n(t) = 0$, 即不含噪情况. 用后 50000 个点绘出系统的相轨迹图, 得到图 5 变尺度检测结果.

观察图 5, 由于待测信号圆频率与驱动信号圆频率 $\omega = 1 \text{ rad/s}$ 不相等, 不能引起系统的状态变化, 系统仍然是图 5(a) 所示的混沌状态. 引入变尺度系数 R , 当 $R = 10, 30$ 时, 由于系数 R 不等于待测信号的圆频率 ω , 均不能使系统状态发生改变, 如图 5(b) 和 5(d) 所示. 只有当变尺度系数 $R = 20$ 时, 系统才从混沌状态变化到大尺度周期状态, 如图 5(c). 因此可以判断输入信号中含有圆频率 $\omega = 20 \text{ rad/s}$ 的信号成分.

3.1.2 含噪情况

在噪声存在的情况下, 即 $n(t) \neq 0$, 当驱动信号幅值接近系统由混沌向大尺度周期转化的临界幅值时, 噪声有可能会诱导系统发生从混沌向大尺度周期的转化, 导致无法准确判断被检测信号是否存在. 为了避免噪声的诱导作用, 可以设置系统状态远离由混沌向大尺度周期转化的敏感临界状态, 即将方程驱动信号的幅值 A 取为小于临界幅值 A_d 多一些, 如方程 (5) 中驱动信号的幅值 $A = 0.8$, 此时系统对噪声的诱导作用有了一定的裕度. 对于实际采集信号具体应用时可以这样处理, 先估计噪声强度, 并将采集信号压缩到其强度不能诱导系统由混沌状态向大尺度周期状态转化的大小, 然后再用变尺度方法分析采集信号, 举例如下.

在方程 (5) 的参数条件下, 令噪声强度 $D = 0.05$, 即 $n(t) = \sqrt{2 \times 0.05}g(t)$, 其中 $g(t)$ 是均值为 0, 方差为 1 的 Gauss 白噪声. 在此噪声强度下, 设方程 (5) 的驱动信号幅值为 0.8, 它小于该组参数条件下的临界幅值 0.825, 而且噪声不会诱导系统发生状态变化. 假设输入信号由该噪声与待测信号 $s(t) = 0.1 \cos(10t)$ 构成, 此时信噪比约为 -13.01 dB . 对于这样一个待测信号 $s(t) + n(t)$,

由于信噪比较小, 直接做频谱分析很难识别有用信号 $s(t)$, 因此尝试用基于 Duffing 振子的变尺度方法对微弱信号 $s(t)$ 进行检测. 当变尺度系数 $R = 10$ 时, 系统可从混沌状态转变为大尺度周期状态, 于是判断出输入待测信号中含有圆频率 $\omega = R = 10 \text{ rad/s}$ 的信号成分, 如图 6(c) 所示. 作为比较, 图 6(a), 6(b) 和 6(d) 分别给出当没有引入变尺度系数 R 以及变尺度系数 $R = 5, 20$ 时系统的混沌状态. 此外, 比较图 6(c) 与图 5(c) 再次说明 Duffing 系统对噪声的免疫能力.

由以上检测方法的原理分析可以看出, 由于信号检测过程始终采用一组固定的系统参数, 因此系统临界幅值的确定就与待测信号的频率无关, 这解决了第 2 节中提出的第一个问题. 大频率的待测信号可以通过变尺度系数 R 的处理来符合小频率参数条件, 这解决了第 2 节中提出的第二个问题. 当排除了 Gauss 白噪声诱导系统从混沌到大尺度周期变化时, 待测信号仍然可以通过变尺度系数 R 的处理而被提取到, 这解决了第 2 节中提出的第三个问题.

3.2 待测信号初始相位对检测的影响

在上述的讨论中, 总是认为待测信号 $s(t)$ 与驱动信号同相位且都等于 0. 而对于实测工程信号, 初始相位恰好 0 的情况几乎不存在, 因此有必要研究待测信号的相位对检测的影响.

在方程 (5) 中, 设待测信号有初始相位 ϕ , 驱动信号有初始相位 α , 其中 $\alpha, \phi \in [-\pi, \pi]$. 由于我们总是要将待测信号圆频率尺度变换为 1, 因此为简化分析, 不失一般性, 设待测信号圆频率 $\omega = 1$, 则方程 (5) 改写为以下方程的形式:

$$\ddot{x} + 0.5\dot{x} - x + x^3 = 0.8 \cos(t + \alpha) + [h \cos(t + \phi) + n(t)]. \quad (6)$$

为分析待测信号初始相位 ϕ 对检测的影响, 令 $\alpha = 0$, 并对方程 (6) 等号右端前两项进行化简得:

$$\begin{aligned} 0.8 \cos t + h \cos(t + \phi) &= 0.8 \cos t + (h \cos t \cos \phi \\ &\quad - h \sin t \sin \phi) \\ &= 0.8 \cos t + h \cos \phi \cos t \\ &\quad - h \sin \phi \sin t \\ &= (0.8 + h \cos \phi) \cos t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -h \sin \varphi \sin t \\
 & = \sqrt{0.8^2 + 1.6h \cos \varphi + h^2} \\
 & \quad \times \cos(t + \theta),
 \end{aligned}$$

其中 $\theta = \arctan[h \sin \varphi / (0.8 + h \cos \varphi)]$.

上式的化简使得待测信号项与驱动项合并为一个三角函数项, θ 的取值几乎不影响 Duffing 系统的临界幅值, 因为 θ 只影响轨迹解的初始位置, 因此可不予考虑. 影响检测效果的只有三角函数的幅值项, 即根号下面的式子. 理论上, 只要满足下列关系式

$$\sqrt{0.8^2 + 1.6h \cos \varphi + h^2} > A_d, \quad (7)$$

系统就可以越过临界值, 发生从混沌向大尺度周期的状态变化, 从而将待测信号检测出来. 反之, 系统不会发生从混沌到大尺度周期的转变, 待测信号也就不能检测出来. 若已知待测信号的幅值 h , 则可通过 (7) 式求出待测信号 φ 的范围. 下面以 $h = 0.06$ 为例进行分析说明.

取临界值 $A_d = 0.825$, 由 (7) 式可求得 $h = 0.06$ 时满足 (7) 式的 φ 的取值范围是 $-67.314^\circ < \varphi < 67.314^\circ$. 仿真分析也证明, 在方程 (5) 的参数

条件下, 幅值 $h = 0.06$ 的待测信号能够使 Duffing 系统从混沌向大尺度周期状态转化的 φ 的取值范围是 $-64^\circ < \varphi < 64^\circ$, 与理论计算基本吻合. 为了精确检测, 放宽待测信号的初始相位取值范围, 令 $-60^\circ \leq \varphi \leq 60^\circ$, 则可认为幅值 $h = 0.06$ 的待测信号与驱动信号相位差在此范围内时待测信号可被检测出来. 从 (7) 式容易知道, 当待测信号的幅值 $h > 0.06$ 时, φ 的取值范围也要增大. 显然, $-60^\circ \leq \varphi \leq 60^\circ$ 的取值范围同样满足 $h > 0.06$ 的所有幅值情况.

由于 $\varphi \in [-\pi, \pi]$, 而对于幅值 $h \geq 0.06$ 的待测信号, 只有当 $\varphi \in [-\pi/3, \pi/3]$, 即 $-60^\circ \leq \varphi \leq 60^\circ$ 时待测信号才能被检测出来, 换言之, 对于满足这一幅值条件的待测信号, 其可检测概率只有 33.3%, 而有 66.7% 的概率不能被检测, 显然检测误差太大. 为了消除这一影响, 可以考虑将方程 (6) 等号右端第二项前 “+” 号改写为 “-” 号, 即方程 (6) 改写为

$$\begin{aligned}
 \ddot{x} + 0.5\dot{x} - x + x^3 & = 0.8 \cos(t + \alpha) \\
 & - [h \cos(t + \varphi) + n(t)], \quad (8)
 \end{aligned}$$

方程 (8) 能够检测待测信号的相位差范围为 $\varphi \in [-\pi, -2\pi/3] \cup [2\pi/3, \pi]$.

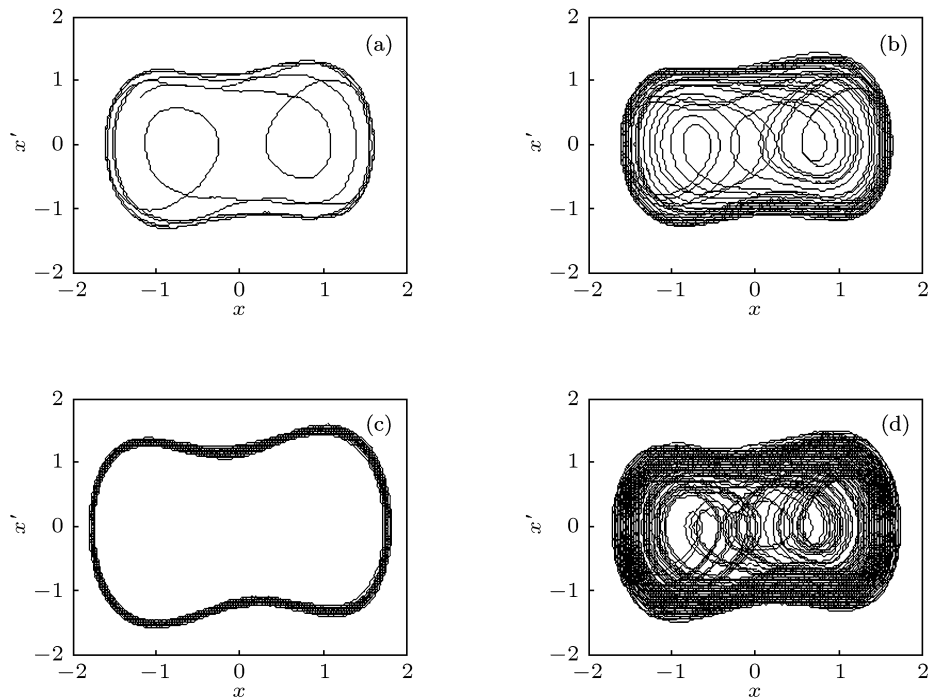


图 6 变尺度方法检测噪声中的微弱信号, $s(t) = 0.1 \cos(10t)$, $n(t) = \sqrt{2 \times 0.05}g(t)$, 其他参数同图 5 (a) 没有引入变尺度系数 R 时系统的混沌状态; (b) 变尺度系数 $R = 5$ 时系统的混沌状态; (c) 变尺度系数 $R = 10$ 时系统的大尺度周期状态; (d) 变尺度系数 $R = 20$ 时系统的混沌状态

通过方程 (6)($\alpha = 0$) 和 (8)($\alpha = 0$) 对待测信号进行 + 和 - 的两次运算, 可以得到有效检测的概率为 66.7%. 对于剩余 33.3% 不可检测概率, 即 φ 落在不可检测范围 $\varphi \in [-2\pi/3, -\pi/3]$ 和 $\varphi \in [\pi/3, 2\pi/3]$ 时, 为使其可检测, 可以通过引入驱动信号相位 α 来进行补偿达到有效检测目的. 为了方便计算, 在方程 (6) 中取 $\alpha = \pi/2$, 则待测信号与驱动信号的相位差取值范围 $\varphi - \alpha \in [-\pi/3, \pi/3]$, 即 $\varphi \in [\pi/6, 5\pi/6]$. 同样在方程 (8) 中取 $\alpha = \pi/2$, 则待测信号与驱动信号的相位差取值范围 $\varphi - \alpha \in [-\pi, -2\pi/3] \cup [2\pi/3, \pi]$, 即 $\varphi \in [-5\pi/6, -\pi/6]$.

从上面的分析可知, 对于幅值 $h \geq 0.06$ 的待测信号的检测, 可以采取这样的步骤进行处理, 首先分别令 $\alpha = 0$ 和 $\alpha = \pi/2$, 然后再分别代入方程 (6) 和方程 (8) 中得到四个方程, 由于这四个方程可检测的待测信号初始相位 φ 的取值范围覆盖了从 $[-\pi, \pi]$ 的整个区间, 因此对这四个方程进行 Duffing 振子的变尺度计算, 最后只要其中一个

方程能够发生状态变化, 就可认为待测信号含有频率 $\omega = R$ 的信号成分.

下面给出一个仿真实例, 假设方程 (5) 待测信号 $s(t) = 0.08 \cos(10t + 100^\circ)$, 噪声信号 $n(t) = \sqrt{0.1}g(t)$, 其他条件同图 (6). 将该待测信号和噪声输入到方程 (6) 和方程 (8) 中并依次令 $\alpha = 0$ 和 $\alpha = \pi/2$ 得到四个检测方程, 分别解这四个方程得到系统的相轨迹如图 7 所示.

由图 7 结果知, 当满足一定幅值条件 (如 $h \geq 0.06$) 的待测信号中含有不为 0 的初始相位 φ 时, 即使变尺度系数 $R = \omega$, 由于方程 (5) 没有考虑初始相位不为 0 的情况, 也不一定能够将该待测信号检测出来, 如图 7(a). 只有考虑相位因素并将 Duffing 方程变形为四个检测方程, 通过计算四个方程的相轨迹才可能发现系统状态的变化, 如图 7(b), 将含有频率 $\omega = R = 10 \text{ rad/s}$ 的待测信号提取出来. 图 7(c) 和 (d) 是系统不发生状态变化的另外两个方程的相轨迹解.

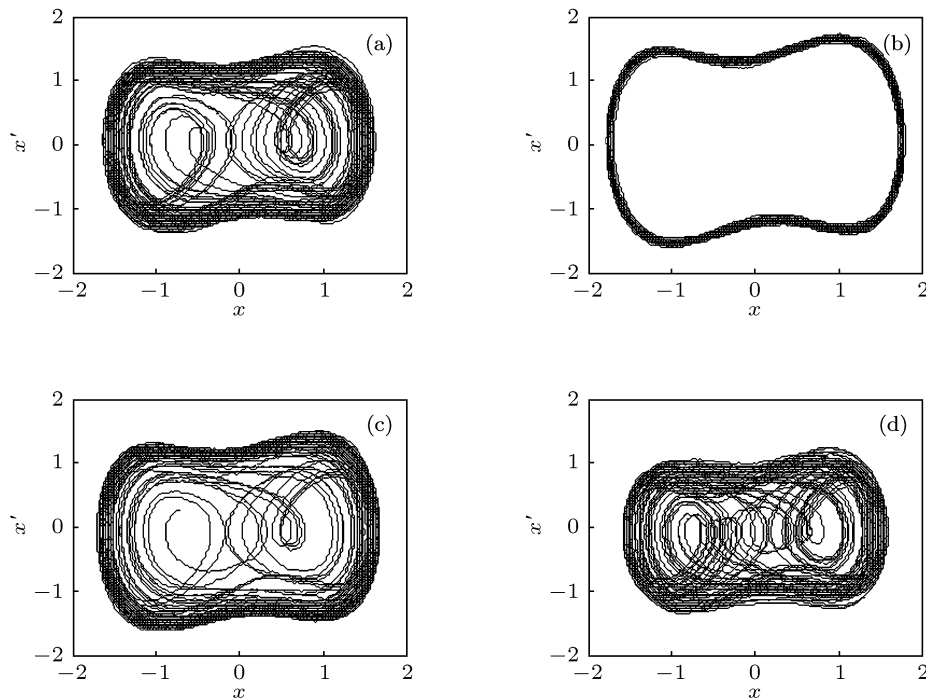


图 7 变尺度方法检测噪声中的微弱信号, $s(t) = 0.08 \cos(10t + 100^\circ)$, $n(t) = \sqrt{0.1}g(t)$, 其他参数同图 6 (a) 方程 (6) 的 $\alpha = 0$, 变尺度系数 $R = 10$ 时系统处于混沌状态; (b) 方程 (6) 的 $\alpha = \pi/2$, 变尺度系数 $R = 10$ 时系统处于大尺度周期状态; (c) 方程 (8) 的 $\alpha = 0$, 变尺度系数 $R = 10$ 时系统处于混沌状态; (d) 方程 (8) 的 $\alpha = \pi/2$, 变尺度系数 $R = 10$ 时系统处于混沌状态

3.3 工程应用检测步骤

上述各仿真实例表明,应用基于 Duffing 振子的变尺度方法对微弱特征成分的检测是可行的,在处理实际工程信号时,其检测步骤为:首先对待检测的工程信号进行噪声强度的估计,并对信号进行归一化处理,即将信号的大小进行线性压缩,使信号的强度降低至一定范围(如 $D = 0.05$ 左右);其次确定系统方程的参数.如在方程(6)和(8)中,取 $k = 0.5$,驱动力幅值 $A = 0.8$,驱动力频率 $\omega = 1 \text{ rad/s}$,初始值 $(x(0), \dot{x}(0)) = (0, 0)$,计算点数 $N = 100000$;然后将归一化的待测信号输入到 Duffing 方程(6)和(8)中并依次取 $\alpha = 0$ 和 $\alpha = \pi/2$ (假设幅值 $h \geq 0.06$),得到四个检测方程;随后引入变尺度系数 R ,将以采样频率 f_s 采集的频率为 ω 的待测信号,变成一个采样频率为 f_s/R 的频率为 ω/R 的信号,并采用四阶 Runge-

Kutta 法进行计算,取计算步长 $dt' = R/f_s$ 求解四个方程,得到系统的 4 幅相轨迹图;最后调整变尺度系数 R 的取值,观察系统的相轨迹,只要有一幅相轨迹图表示系统从混沌状态转变为大尺度周期状态,此时的 R 值即为待测信号的频率值.

4 结论

本文提出基于 Duffing 振子的变尺度微弱特征信号的检测方法,该方法突破传统 Duffing 检测方法参数选取的不便,克服了传统方法对大频率信号的限制和噪声诱导对检测结果的不利影响.所提出的方法可以仅仅利用一组特定条件下的参数取值,完成对任意频率成分信号的检测.数值分析表明,本方法对微弱信号的检测具有潜在的应用价值,拓宽了 Duffing 振子在信号检测领域的应用范围.

- [1] Gao J Z 2005 *Detection of Weak Signals* (Beijing: Tsinghua University Press) pp19–24 (in Chinese) [高晋占 2005 微弱信号检测 (北京:清华大学出版社) 第 19—24 页]
- [2] Zhou K B, Dou C Q, Chen T 2007 *J. Wuhan Univ. Technol.* **4** 53 (in Chinese) [周凯波, 豆成权, 陈涛 2007 武汉理工大学学报 **4** 53]
- [3] Nie C Y 2009 *Chaotic Systems and Weak Signal Detection* (Beijing: Tsinghua University Press) pp5–6 (in Chinese) [聂春燕 2009 混沌系统与弱信号检测 (北京:清华大学出版社) 第 5—6 页]
- [4] Belhaq M, Houssni M 2000 *Chaos, Solitons and Fractals* **11** 1237
- [5] Zhai D Q, Liu C X, Liu Y 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 816 (in Chinese) [翟笃庆, 刘崇新, 刘尧 2010 物理学报 **59** 816]
- [6] Zhang G J, Xu J X, Yao H 2006 *Acta Mech. Sin.* **38** 283 (in Chinese) [张广军, 徐健学, 姚宏 2006 力学学报 **38** 283]
- [7] Li Y, Yang B J 2007 *Chaotic Oscillator Systems (L-Y) and Detection* (Beijing: Science Press) p20 (in Chinese) [李月, 杨宝俊 2007 混沌振荡器系统 (L-Y) 与检测 (北京:科学出版社) 第 20 页]
- [8] Liu B Z, Peng J H 2004 *Nonlinear Dynamics* (Beijing: High Education Press) pp132–135 (in Chinese) [刘秉正, 彭建华 2004 非线性动力学 (北京:高等教育出版社) 第 132—135 页]
- [9] Jiang W L, Zhang S Q, Wang Y Q 2005 *Chaos and Wavelet Based Fault Information Diagnosis* (Beijing: National Defence Industry Press) pp84–85 (in Chinese) [姜万录, 张淑清, 王益群 2005 基于混沌和小波的故障信息诊断 (北京:国防工业出版社) 第 84—85 页]
- [10] Liu Z R, He B L 1994 *Perturbation Criteria of Chaos* (Shanghai: Shanghai Science and Technology Press) p10 (in Chinese) [刘曾荣, 赫伯林 1994 混沌的微扰判据 (上海:上海科技教育出版社) 第 10 页]
- [11] Yi W S, Shi Y W, Nie C Y 2006 *Acta Metrologica Sin.* **27** 156 (in Chinese) [衣文索, 石要武, 聂春燕 2006 计量学报 **27** 156]
- [12] Leng Y G, Leng Y S, Guo Y 2006 *J. Sound Vibrat.* **292** 788
- [13] Leng Y G, Wang T Y, Qin X D 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 717 (in Chinese) [冷永刚, 王太勇, 秦旭达 2004 物理学报 **53** 717]
- [14] Leng Y G, Wang T Y 2007 *Mech. Syst. Sign. Proces.* **21** 138
- [15] Leng Y G 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 5196 (in Chinese) [冷永刚 2009 物理学报 **58** 5196]

Weak characteristic signal detection based on scale transformation of Duffing oscillator*

Lai Zhi-Hui Leng Yong-Gang[†] Sun Jian-Qiao Fan Sheng-Bo

(School of Mechanical Engineering, Tianjin University, Tianjin 200072, China)

(Received 8 June 2011; revised manuscript received 13 July 2011)

Abstract

The chaos detection method based on Holmes Duffing equation is studied. Since this method is suitable only for the detection of a single signal frequency, the selection of the equation parameters is inconvenient, and the noise may affect the detection results, we propose a new method of detecting weak characteristic signals based on the scale transformation of Duffing oscillator. The numerical simulation shows that the proposed method can be used to detect harmonic signal with any frequency and phase by only a set of determined parameters.

Keywords: Duffing oscillator, weak characteristic signal, Gaussian white noise, scale transformation

PACS: 05.45.-a, 05.40.-a, 02.60.Cb

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 50975202).

[†] E-mail: leng_yg@tju.edu.cn