

部分相干双曲正弦-Gauss 涡旋光束叠加形成的合成相干涡旋在非 Kolmogorov 大气湍流中的动态演化*

何雪梅 吕百达†

(四川大学激光物理与化学研究所, 成都 610064)

(2011年4月13日收到; 2011年5月20日收到修改稿)

一些实验表明, 实际大气会偏离理想 Kolmogorov 模型. 本文基于广义 Huygens-Fresnel 原理和 Toselli 等提出的非 Kolmogorov 湍流模型, 推导出部分相干双曲正弦-Gauss (HSG) 涡旋光束通过非 Kolmogorov 大气湍流的解析传输公式, 并用以对两束部分相干 HSG 涡旋光束相干叠加和非相干叠加形成的合成相干涡旋在非 Kolmogorov 大气湍流中的动态演化进行了研究. 结果表明, 合成光束平均光强的演化过程与非 Kolmogorov 湍流的广义指数 α , 源平面上叠加涡旋光束拓扑电荷的符号, 以及叠加方式有关. 合成相干涡旋在非 Kolmogorov 大气湍流中传输时会出现移动、产生和湮灭. 广义指数 α , 拓扑电荷符号, 以及叠加方式都会影响其演化行为. 最后, 将本文所得结果与相关文献做了比较.

关键词: 非 Kolmogorov 大气湍流, 合成相干涡旋, 部分相干双曲 - 正弦 Gauss 涡旋光束

PACS: 42.68.Ay, 42.68.Bz, 42.25.Dd, 42.25.Fx

1 引言

奇点光学的研究对象已经从完全相干光拓展到部分相干光^[1-8]. 对部分相干光而言, 一般不存在光强为零的光涡旋, 但却存在光谱相干度为零的相干涡旋^[4,5], 或称为相关涡旋^[7,8]. 另一方面, 激光在大气湍流中的传输有重要实际应用意义. 长期以来, 人们都使用理想大气, 例如 Kolmogorov 模型来分析大气湍流对激光传输的影响. 文献中对离轴的两束或多束部分空间相干光叠加形成的合成相干涡旋在自由空间和理想大气湍流中的演化已进行了研究^[9,10], 然而, 一些实验结果表明, 实际大气会偏离 Kolmogorov 模型, 非理想大气湍流在实际工作中会经常遇到^[11-13]. 一个值得研究的问题是: 合成相干涡旋在非 Kolmogorov 大气湍流中是如何演化的? 本文以部分相干双曲正弦-Gauss(HSG) 涡旋光束叠加形成的合成相干涡旋为例, 研究了合成光束的平均光强和合成相干涡旋在非 Kolmogorov 大气湍流中的动态演化行为, 并与文献中的相关结

果做了比较.

2 非 Kolmogorov 大气湍流中的传输方程

在直角坐标系下, 源 $z = 0$ 面上部分相干 HSG 涡旋光束的交叉谱密度函数为^[14-16]

$$\begin{aligned}
 & W_0(\boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}_2, 0) \\
 &= [\rho_{1x}\rho_{2x} + \rho_{1y}\rho_{2y} \pm i(\rho_{1x}\rho_{2y} - \rho_{2x}\rho_{1y})] \\
 &\quad \times \exp\left(-\frac{\rho_1^2 + \rho_2^2}{w_0^2}\right) \sinh[\Omega_0(\rho_{1x} + \rho_{1y})] \\
 &\quad \times \sinh[\Omega_0(\rho_{2x} + \rho_{2y})] \\
 &\quad \times \exp\left[-\frac{(\rho_1 - \rho_2)^2}{2\sigma_0^2}\right], \quad (1)
 \end{aligned}$$

式中, w_0 为 Gauss 部分的束腰宽度, Ω_0 为双曲正弦部分参数, σ_0 为空间相关长度, (ρ_{ix}, ρ_{iy}) 为二维平面矢量 $\boldsymbol{\rho}_i$ ($i = 1, 2$) 在 x, y 方向的分量, $\boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}_2$ 分别为 $z = 0$ 面上二点坐标矢量. 本文取拓扑电

* 国家自然科学基金 (批准号: 10874125) 资助的课题.

† E-mail: baidalu0@tom.com

荷 $m = \pm 1$, 对应于 (1) 式中“±”。

由广义 Huygens-Fresnel 原理 [17], 部分相干光通过大气湍流传输的交叉谱密度函数可表示为

$$W(\rho'_1, \rho'_2, z) = \left(\frac{k}{2\pi z}\right)^2 \iint d^2\rho_1 \iint d^2\rho_2 W_0(\rho_1, \rho_2, 0) \times \exp\left\{-\frac{ik}{2z}[(\rho'_1 - \rho_1)^2 - (\rho'_2 - \rho_2)^2]\right\} \times \langle \exp[\psi^*(\rho'_1, \rho_1) + \psi(\rho'_2, \rho_2)] \rangle, \quad (2)$$

式中 ρ'_1 和 ρ'_2 分别为传输距离 z 处二点坐标矢量, k 是波数, 与波长 λ 关系为 $k = 2\pi/\lambda$, $\psi(\rho'_i, \rho_i)$ 代表球面波由于湍流而引起的复相位. (2) 式右边最后一项为 [17,18]

$$\langle \exp[\psi^*(\rho'_1, \rho_1) + \psi(\rho'_2, \rho_2)] \rangle = \exp\{-T(\alpha, z)[(\rho'_1 - \rho'_2)^2 + (\rho'_1 - \rho'_2)(\rho_1 - \rho_2) + (\rho_1 - \rho_2)^2]\}, \quad (3)$$

其中

$$T(\alpha, z) = \frac{\pi^2 k^2 z}{3} \int_0^\infty \kappa^3 \Phi_n(\kappa, \alpha) d\kappa, \quad (4)$$

$\Phi_n(\kappa, \alpha)$ 为大气湍流介质的折射率起伏空间谱密度函数, 本文用 Toselli 等人引入的非 Kolmogorov 谱来模拟大气湍流 [19]:

$$\Phi_n(\kappa, \alpha) = A(\alpha) \tilde{C}_n^2 \frac{\exp(-\kappa^2/\kappa_m^2)}{(\kappa^2 + \kappa_0^2)^{\alpha/2}}, \quad (0 \leq k < \infty, \quad 3 < \alpha < 4), \quad (5)$$

其中

$$A(\alpha) = \frac{1}{4\pi^2} \Gamma(\alpha - 1) \cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right), \quad (\Gamma(x) \text{ 为 Gamma 函数}) \quad (6)$$

$$\kappa_0 = \frac{2\pi}{L_0}, \quad (L_0 \text{ 为大气湍流的外尺度}) \quad (7)$$

$$\kappa_m = \frac{c(\alpha)}{l_0}, \quad (l_0 \text{ 为大气湍流的内尺度}) \quad (8)$$

$$c(\alpha) = \left[\Gamma\left(\frac{5-\alpha}{2}\right) A(\alpha) \frac{2\pi}{3} \right]^{\frac{1}{\alpha-5}}, \quad (9)$$

\tilde{C}_n^2 是广义结构常量, α 称为广义指数参量, 当 $\alpha = 11/3, L_0 = \infty, l_0 = 0$ 时, $A(11/3) = 0.033, \tilde{C}_n^2 = C_n^2$, 就退化为 Kolmogorov 折射率起伏的功率谱密度函数 $\Phi_n(\kappa) = 0.033 C_n^2 \kappa^{-11/3}$.

由 (4) 和 (5) 式, 得

$$T(\alpha, z) = \frac{\pi^2 k^2 z}{6(\alpha - 2)} A(\alpha) \tilde{C}_n^2 \left\{ -2\kappa_0^{(4-\alpha)} \right.$$

$$\left. + \exp\left(\frac{\kappa_0^2}{\kappa_m^2}\right) \kappa_m^{(2-\alpha)} [(\alpha - 2)\kappa_m^2 + 2\kappa_0^2] \Gamma\left(2 - \frac{\alpha}{2}, \frac{\kappa_0^2}{\kappa_m^2}\right) \right\}, \quad (10)$$

$T(\alpha, z)$ 为描述湍流强度的物理量, 与广义指数 α , 湍流的内外尺度 l_0, L_0 , 以及传输距离 z 有关. $T(\alpha, z)$ 越大表征湍流越强.

为了方便计算, 做坐标变换 $\mathbf{u} = \frac{\rho_1 + \rho_2}{2}, \mathbf{v} = \rho_1 - \rho_2$, 将 (1) 和 (3) 式代入 (2) 式并利用积分公式 [20]

$$\int x^n \exp(-px^2 + 2qx) dx = n! \exp\left(\frac{q^2}{p}\right) \sqrt{\frac{\pi}{p}} \left(\frac{q}{p}\right)^n \times \sum_{k=0}^{E[\frac{n}{2}]} \frac{1}{(n-2k)!k!} \left(\frac{p}{4q^2}\right)^k, \quad (11)$$

其中 $E[\frac{n}{2}]$ 代表取 $\frac{n}{2}$ 的整数部分, 经过直接而冗长的计算得

$$W(\rho'_1, \rho'_2, z) = \left(\frac{k}{4z}\right)^2 \frac{1}{A\varepsilon} \exp\left[-\frac{ik}{2z}(\rho'^2_1 - \rho'^2_2)\right] \times \exp[-T(\alpha, z)(\rho'_1 - \rho'_2)^2] \times (W_1 + W_2 - W_3 - W_4), \quad (12)$$

其中

$$W_1 = \exp\left(\frac{P_x^2 + P_y^2}{4\varepsilon} + \frac{B_x^2 + B_y^2}{A}\right) \times \left(\frac{B_x^2 + B_y^2}{A^2} + \frac{1}{A} - \frac{D_x^2 + D_y^2}{4C^2} - \frac{1}{4C} \pm i \frac{D_x B_y - B_x D_y}{AC}\right), \quad (13)$$

$$W_3 = \exp\left(\frac{R_x^2 + R_y^2}{4\varepsilon} + \frac{E_x^2 + E_y^2}{A}\right) \times \left(\frac{E_x^2 + E_y^2}{A^2} + \frac{1}{A} - \frac{F_x^2 + F_y^2}{4C^2} - \frac{1}{4C} \pm i \frac{F_x E_y - E_x F_y}{AC}\right), \quad (14)$$

$$\varepsilon = \frac{1}{2w_0^2} + \frac{1}{2\sigma_0^2} + T(\alpha, z), \quad (15)$$

$$P_x = \frac{ik}{2z} (\rho'_{1x} + \rho'_{2x}) - T(\alpha, z) (\rho'_{1x} - \rho'_{2x}), \quad (16)$$

$$A = \frac{2}{w_0^2} + \frac{k^2}{4\varepsilon z^2}, \quad (17)$$

$$Q_x = \frac{ik}{z} (\rho'_{1x} - \rho'_{2x}) + 2\Omega_0, \quad (18)$$

$$B_x = \frac{1}{2} \left(Q_x - \frac{ikP_x}{2\varepsilon z} \right), \quad (19)$$

$$C = \varepsilon + \frac{k^2 w_0^2}{8z^2}, \quad (20)$$

$$D_x = \frac{1}{2} \left(P_x - \frac{ikw_0^2}{4z} Q_x \right), \quad (21)$$

$$R_x = P_x + \Omega_0, \quad (22)$$

$$E_x = \frac{1}{2} \left[\frac{ik}{z} (\rho'_{1x} - \rho'_{2x}) - \frac{ikR_x}{2\varepsilon z} \right], \quad (23)$$

$$F_x = \frac{1}{2} \left[R_x + \frac{k^2 w_0^2}{4z^2} (\rho'_{1x} - \rho'_{2x}) \right]. \quad (24)$$

由对称性, 将 $P_x, Q_x, B_x, D_x, R_x, E_x, F_x$ 中的 ρ'_{1x} 和 ρ'_{2x} 换成 ρ'_{1y} 和 ρ'_{2y} 就分别得到 $P_y, Q_y, B_y, D_y, R_y, E_y, F_y$. W_2 只是将 W_1 中 $Q_x, B_x, D_x, Q_y, B_y, D_y$ 的表达式 $2\Omega_0$ 换成 $-2\Omega_0$, W_4 只是将 W_3 中 $R_x, E_x, F_x, R_y, E_y, F_y$ 的表达式 Ω_0 置换成 $-\Omega_0$ 即可. (13) 和 (14) 式中的“ \pm ”对应于 $z = 0$ 面上 $m = \pm 1$ 的结果. 由 (12)—(24) 式知, $W(\rho'_1, \rho'_2, z)$ 与传输距离 z , 湍流 (\tilde{C}_n^2, L_0, l_0 和 α) 以及光束控制参数 ($\lambda, \sigma_0, w_0, \Omega_0, m$) 等有关.

1) 相干叠加

假设两平行非共线的部分相干 HSG 涡旋光束为相干叠加, 且两光束参数相同, 其中心都位于 x 轴上, 离轴矢量为 $\mathbf{d}(d_x, d_y)$, $d_x = d > 0, d_y = 0$, 相干叠加合成光束的交叉谱密度函数为 [9,21]

$$\begin{aligned} & W_{\text{coh}}(\rho'_1, \rho'_2, z) \\ &= \sum_{l_1=-1/2}^{1/2} \sum_{l_2=-1/2}^{1/2} W(\rho'_1 - 2l_1 \mathbf{d}, \rho'_2 - 2l_2 \mathbf{d}, z), \end{aligned} \quad (25)$$

令 $\rho'_1 = \rho'_2 = \rho'$, 由 (25) 式得相干叠加合成光束平均光强的表达式

$$\begin{aligned} & I_{\text{coh}}(\rho', z) \\ &= \sum_{l_1=-1/2}^{1/2} \sum_{l_2=-1/2}^{1/2} W(\rho' - 2l_1 \mathbf{d}, \rho' - 2l_2 \mathbf{d}, z). \end{aligned} \quad (26)$$

2) 非相干叠加

非相干叠加合成光束的交叉谱密度函数为 [9,21]

$$\begin{aligned} & W_{\text{incoh}}(\rho'_1, \rho'_2, z) \\ &= \sum_{l=-1/2}^{1/2} W(\rho'_1 - 2l \mathbf{d}, \rho'_2 - 2l \mathbf{d}, z), \end{aligned} \quad (27)$$

令 $\rho'_1 = \rho'_2 = \rho'$, 由 (27) 式得非相干叠加合成光束平均光强的表达式

$$\begin{aligned} & I_{\text{incoh}}(\rho', z) \\ &= \sum_{l=-1/2}^{1/2} W(\rho' - 2l \mathbf{d}, \rho' - 2l \mathbf{d}, z). \end{aligned} \quad (28)$$

光谱相干度为 [22]

$$\mu(\rho'_1, \rho'_2, z) = \frac{W(\rho'_1, \rho'_2, z)}{[I(\rho'_1, z)I(\rho'_2, z)]^{1/2}}, \quad (29)$$

其中, $I(\rho'_i, z) = W(\rho'_i, \rho'_i, z)$ ($i = 1, 2$) 表示点 (ρ'_i, z) 处的光强. 合成相干涡旋的位置由方程组 [4]

$$\text{Re}[\mu(\rho'_1, \rho'_2, z)] = 0, \quad (30a)$$

$$\text{Im}[\mu(\rho'_1, \rho'_2, z)] = 0 \quad (30b)$$

决定, 式中 **Re**, **Im** 分别表示取实部和虚部运算. 合成相干涡旋的拓扑电荷大小和符号由“符号法则”决定 [23].

3 合成光束平均光强的演化

图 1(a),(b) 给出了两平行非共线的部分相干 HSG 涡旋光束相干叠加和非相干叠加形成的合成光束在非 Kolmogorov 大气湍流中传输时, 归一化平均光强 $I(\rho', z)/I(\rho', z)_{\text{max}}$ ($I(\rho', z)_{\text{max}}$ 为平均光强的最大值) 沿斜轴 ρ'_r 的演化. 计算参数为 $\lambda = 1.06 \mu\text{m}$, $\sigma_0 = 4 \text{ cm}$, $w_0 = 3 \text{ cm}$, $\Omega_0 = 30 \text{ m}^{-1}$, $d = 1 \text{ cm}$, $\tilde{C}_n^2 = 10^{-14} \text{ m}^{3-\alpha}$, $L_0 = 1 \text{ m}$, $l_0 = 0.01 \text{ m}$, $\alpha = 3.80$, $m = -1$. 从图 1 可以看出, 无论是相干叠加还是非相干叠加, 合成光束的平均光强都经历几个阶段的演化. 在 $z = 0$ 源平面上平均光强出现一个中心接近于零但不等于零的凹陷分布, 随着传输距离的增加, 平均光强历经光强极小值等于最大值一半的中心凹陷 z_{dip} , 平顶 z_{flat} 和类 Gauss z_{Gau} 分布, 但演化进程的快慢与叠加方式有关, 图 1(a) 相干叠加, 图 1(b) 非相干叠加的演化距离分别为 $z_{\text{dip}} = 1.82 \text{ km}$, $z_{\text{flat}} = 3.56 \text{ km}$, $z_{\text{Gau}} = 3.90 \text{ km}$ 和 $z_{\text{dip}} = 1.42 \text{ km}$, $z_{\text{flat}} = 2.66 \text{ km}$, $z_{\text{Gau}} = 2.85 \text{ km}$. 由此可见非相干叠加平均光强的演化比相干叠加快, 这与文献 [10] 的结果一致.

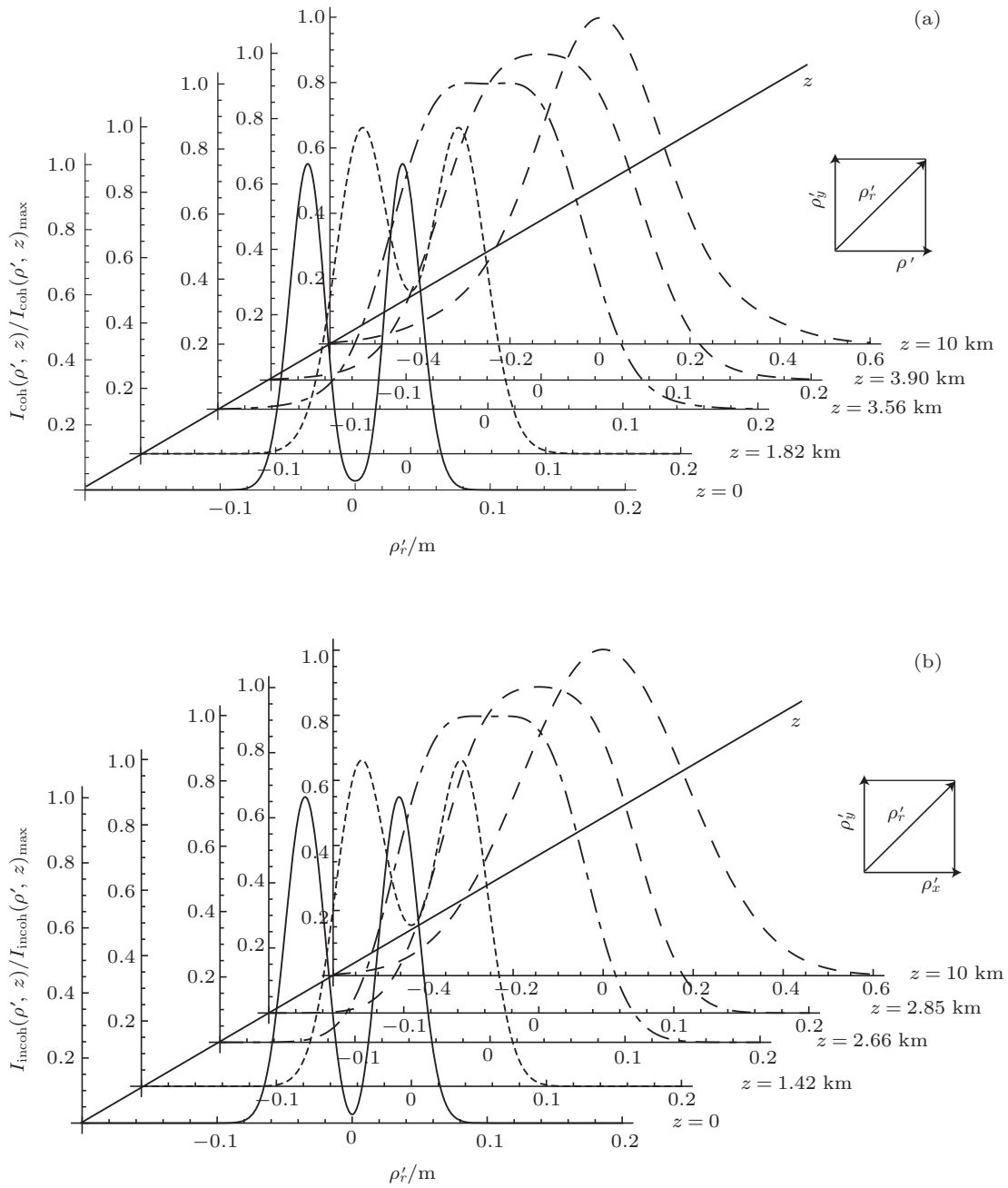


图 1 合成光束平均光强的演化 (a) 相干叠加; (b) 非相干叠加

表 1 $m = -1$ 时相干叠加和非相干叠加有关结果

α	相干叠加			非相干叠加		
	z_{dip}/km	$z_{\text{flat}}/\text{km}$	z_{Gau}/km	z_{dip}/km	$z_{\text{flat}}/\text{km}$	z_{Gau}/km
3.04	1.20	2.40	2.68	1.06	1.81	2.02
3.07	1.14	2.29	2.54	1.03	1.75	1.94
3.11	1.13	2.24	2.46	1.02	1.73	1.89
3.40	1.43	2.81	3.09	1.18	2.06	2.23
3.67	1.74	3.37	3.67	1.36	2.49	2.70
3.80	1.82	3.56	3.90	1.42	2.66	2.85

表 2 $m = +1$ 时相干叠加和非相干叠加有关结果

α	相干叠加			非相干叠加		
	z_{dip}/km	$z_{\text{flat}}/\text{km}$	z_{Gau}/km	z_{dip}/km	$z_{\text{flat}}/\text{km}$	z_{Gau}/km
3.04	1.26	2.19	2.44	1.15	1.86	2.04
3.07	1.21	2.09	2.31	1.12	1.79	1.96
3.11	1.19	2.05	2.29	1.10	1.76	1.90
3.40	1.47	2.52	2.76	1.30	2.10	2.27
3.67	1.83	3.03	3.27	1.57	2.60	2.81
3.80	1.97	3.20	3.44	1.69	2.80	3.03

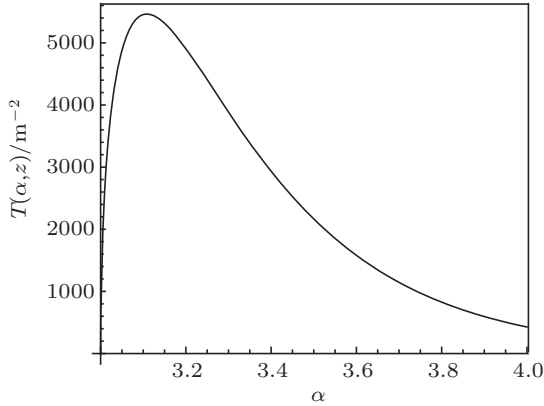


图 2 在传输距离 $z = 2 \text{ km}$ 处, $T(\alpha, z)$ 随 α 的变化关系

表 1 给出了 α 取不同值时相干叠加和非相干叠加 z_{dip} , z_{flat} 和 z_{Gau} 的数值计算例, 其余计算参数同图 1. 从表 1 可以看出, 无论是相干叠加还是非相干叠加, 合成光束平均光强的演化都与湍流的广义指数 α 有关. 在 $3 < \alpha < 3.11$ 的范围内, α 越大, 演化进程越短. 例如, 表 1 相干叠加方式中, $\alpha = 3.04$ 时 $z_{\text{dip}} = 1.20 \text{ km}$, $z_{\text{flat}} = 2.40 \text{ km}$, $z_{\text{Gau}} = 2.68 \text{ km}$; $\alpha = 3.07$ 时 $z_{\text{dip}} = 1.14 \text{ km}$, $z_{\text{flat}} = 2.29 \text{ km}$, $z_{\text{Gau}} = 2.54 \text{ km}$. 在 $\alpha = 3.11$ 时, 光强演化得最快, $z_{\text{dip}} = 1.13 \text{ km}$, $z_{\text{flat}} = 2.24 \text{ km}$, $z_{\text{Gau}} = 2.46 \text{ km}$. 相反, 在 $3.11 < \alpha < 4$ 的范围内, α 越大, 演化进程越长, 如 $\alpha = 3.40$ 时 $z_{\text{dip}} = 1.43 \text{ km}$, $z_{\text{flat}} = 2.81 \text{ km}$, $z_{\text{Gau}} = 3.09 \text{ km}$; $\alpha = 3.67$ 时 $z_{\text{dip}} = 1.74 \text{ km}$, $z_{\text{flat}} = 3.37 \text{ km}$, $z_{\text{Gau}} = 3.67 \text{ km}$. 其物理原因是湍流强弱与 α 有关, 见图 2. 由图 2 可知, 当 $3 < \alpha < 3.11$ 时, $T(\alpha, z)$ 是 α 的增函数, $\alpha = 3.11$ 时 $T(\alpha, z)$ 取最大值. 在 $3.11 < \alpha < 4$ 的范围内, $T(\alpha, z)$ 是 α 的减函数. 湍流越强, 光束演化越快^[24]. 同时, 从表 1 也可看出, 相干叠加平均光强的演化比非相干叠加慢.

表 2 给出了源涡旋光束所带的拓扑电荷 $m = +1$ 时, 相干叠加和非相干叠加 z_{dip} , z_{flat} 和 z_{Gau} 的

数值计算例, 其余计算参数同图 1. 对比表 1 和表 2 可知, 合成光束平均光强的演化不仅与叠加方式、湍流强弱有关, 还与源涡旋光束所带拓扑电荷的正负有关 (证明见附录 A), 这与文献 [10] 的结果不同.

4 合成相干涡旋的演化

从 (12)—(30) 式可以看出, 合成相干涡旋随传输距离 z 的演化与叠加方式 (相干叠加或非相干叠加), 传输距离 z , 湍流参数 ($\tilde{C}_n^2, L_0, l_0, \alpha$) 以及光束控制参数 ($\lambda, \sigma_0, w_0, \Omega_0, m$) 等有关. 以下重点分析合成相干涡旋的演化与叠加方式、拓扑电荷和广义指数的关系.

图 3 为 $m = -1$ 时, 两平行非共线的部分相干 HSG 涡旋光束相干叠加和非相干叠加形成的合成相干涡旋的位置随归一化传输距离 z/z_R ($z_R = \pi w_0^2/\lambda$ 为相应的 Gauss 光束的 Rayleigh 长度) 增加的变化. $\rho'_1 = (3 \text{ cm}, 6 \text{ cm})$, 黑点和白点分别代表拓扑电荷 $m = +1$ 和 -1 , 其余计算参数同图 1. 从图 3(a) 可以看到, 相干叠加形成的合成光束在源 $z = 0$ 处没有合成相干涡旋 (见附录 B), 传输距离 z 为 z_R 时有 3 个 $m = -1, \pm 1$; z 为 $2z_R$ 到 $3z_R$ 时有 6 个 $m = \pm 1, \pm 1, \pm 1$; z 为 $4z_R$ 到 $8z_R$ 时有 4 个 $m = \pm 1, \pm 1$; z 为 $9z_R$ 到 $10z_R$ 时有 2 个 $m = \pm 1$; 非相干叠加形成的合成相干涡旋 (图 3(b)) 在源 $z = 0$ 处有 1 个 $m = -1$, 传输距离 z 为 $z_R, 2z_R$ 和 $6z_R$ 时有 4 个 $m = \pm 1, \pm 1$; z 为 $3z_R$ 到 $4z_R$ 时有 10 个 $m = \pm 1, \pm 1, \pm 1, \pm 1, \pm 1$; z 为 $5z_R$ 时有 6 个 $m = \pm 1, \pm 1, \pm 1$; z 为 $7z_R$ 到 $10z_R$ 时有 2 个 $m = \pm 1$. 由此可见, 相干叠加和非相干叠加形成的合成光束在非 Kolmogorov 大气湍流中传输时, 随着传输距离的增加, 合成相干涡旋都出现移动、产生和湮灭, 且这种演化与叠加方式有关.

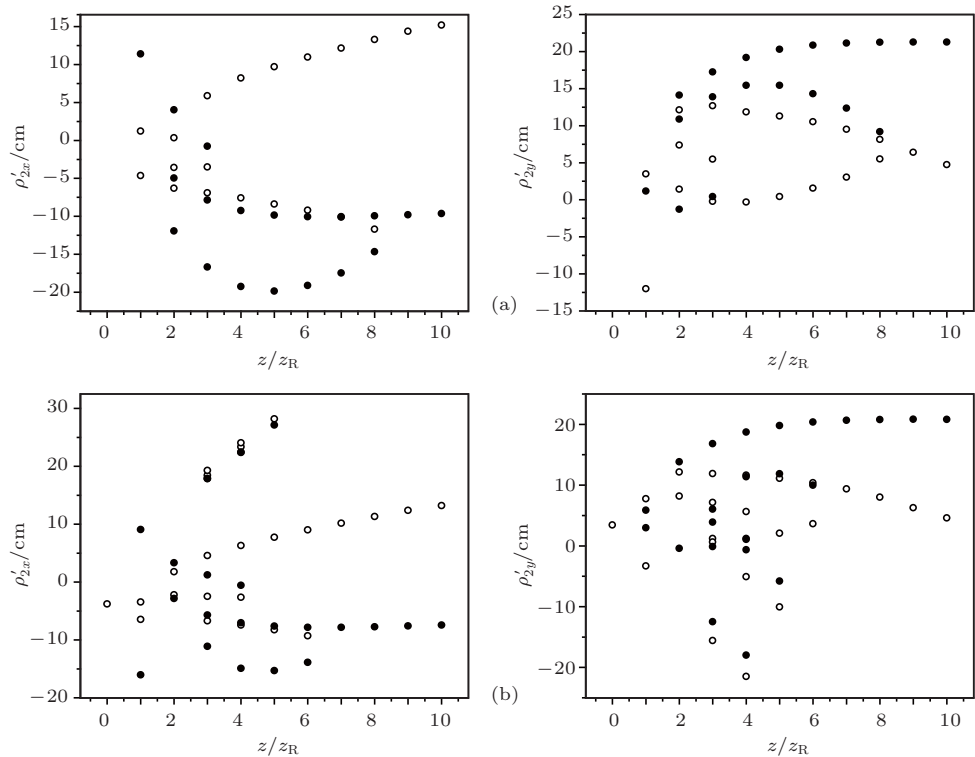


图3 $m = -1$ 时, 合成相干涡旋的演化 (a) 相干叠加; (b) 非相干叠加

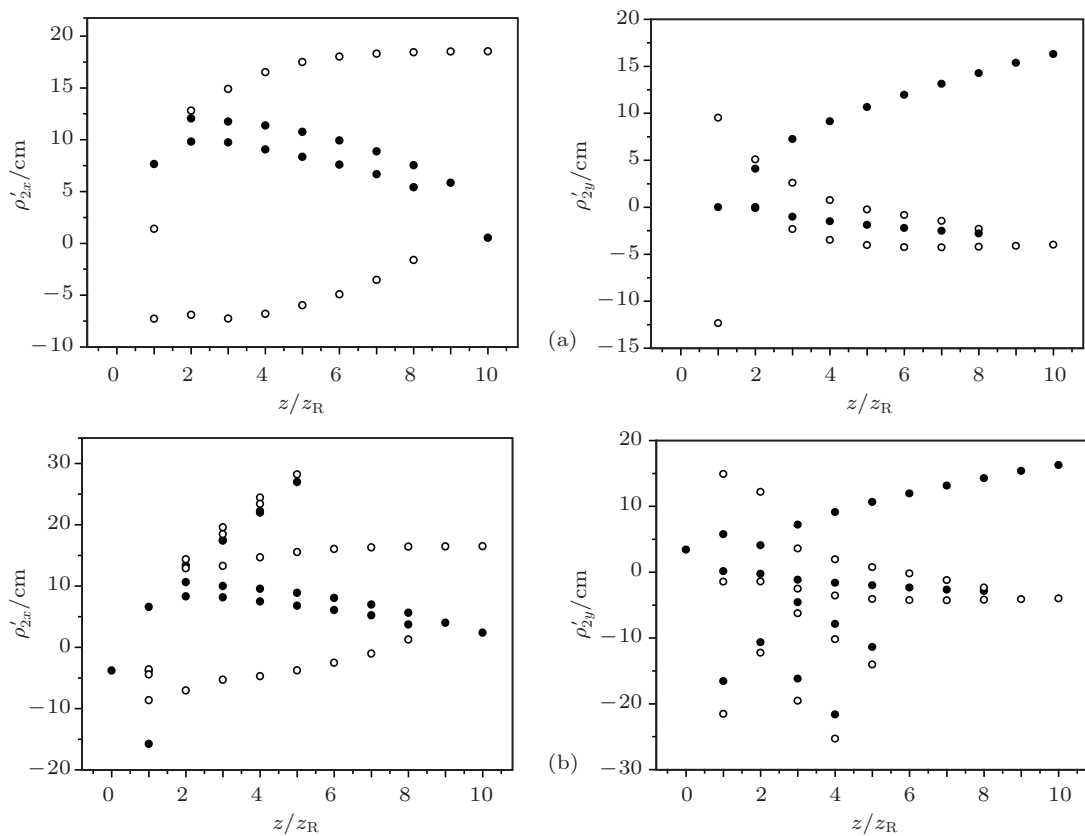


图4 $m = +1$ 时合成相干涡旋的演化 (a) 相干叠加; (b) 非相干叠加

图 4 为 $m = +1$ 时, 相干叠加和非相干叠加形成的合成相干涡旋的演化, 其余计算参数同图 3. 对比图 3 和图 4 可以看到, 合成相干涡旋的演化不仅与叠加方式有关, 还与源涡旋光束所带拓扑电荷的符号有关. 例如, $z = 2z_R$ 时, 相干叠加形成的合成相干涡旋图 3(a) 中有 6 个, $m = \pm 1, \pm 1, \pm 1$, 图 4(a) 中有 4 个, $m = \pm 1, \pm 1$.

图 5 给出了在传输距离 $z = z_R$ 处不同 α 值时合成相干涡旋的位置, 其余计算参数同图 3. 从图 5 可以看出, 相干叠加和非相干叠加形成的合成相干涡旋的数目都随 α 的增加而改变. 例如, 图 5(a) 相干叠加合成相干涡旋在 $\alpha = 3.1$ 和 3.2 时有 6 个, $\alpha = 3.3$ 时有 2 个, $\alpha = 3.4$ 时有 4 个, $\alpha = 3.5$ 时有 9 个, $\alpha = 3.6$ 时有 8 个, $\alpha = 3.7$ 时有 7 个, $\alpha = 3.8$ 时有 3 个, $\alpha = 3.9$ 时有 5 个. 因此, α 不同, 湍流强弱不同, 合成相干涡旋的数目和位置也不同.

5 结论

本文以部分相干 HSG 涡旋光束叠加形成的合

成相干涡旋为例, 对部分相干涡旋光束相干叠加和非相干叠加形成的合成相干涡旋在非 Kolmogorov 大气湍流中的动态演化做了详细研究. 结果表明, 合成光束平均光强的演化过程与非 Kolmogorov 湍流广义指数参数 α , 源涡旋光束拓扑电荷符号以及叠加方式有关. 合成相干涡旋在非 Kolmogorov 大气湍流中传输时出现移动、产生和湮灭. 并且湍流参数, 拓扑电荷符号, 以及叠加方式都会对合成相干涡旋的演化行为有影响. 与相关文献 [10] 比较, 本文研究了更为普遍的非 Kolmogorov 大气湍流中合成相干涡旋的演化. 当 $\alpha = 11/3, L_0 = \infty, l_0 = 0$ 时, 对应于理想 Kolmogorov 大气湍流中的结果. 此外, 我们证明了在非 Kolmogorov 大气湍流中, 部分相干 HSG 涡旋光束叠加形成的合成光束的平均光强的演化与拓扑电荷的符号有关. 并且, 其相干叠加形成的合成光束在 $z = 0$ 面上不存在合成相干涡旋, 这些都与文献 [10] 的相关结果不同. 在文献 [10] 中, 部分相干平顶涡旋光束合成光束的平均光强演化与拓扑电荷符号无关, 其相干叠加形成的合成光束在 $z = 0$ 面上存在合成相干涡旋. 但是合

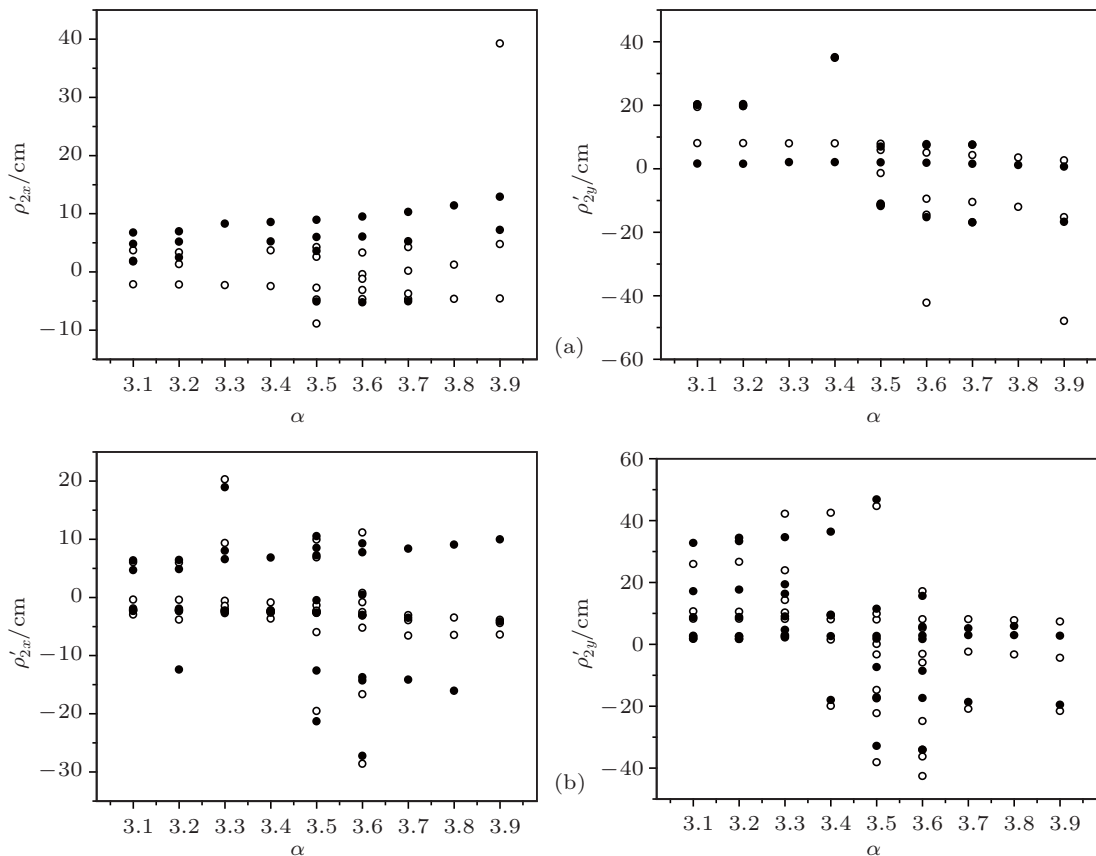


图 5 $z = z_R$ 处合成相干涡旋的位置随 α 的变化 (a) 相干叠加; (b) 非相干叠加

成相干涡旋在湍流中的演化都与湍流强弱、光束叠加方式和传输距离等有关. 合成相干涡旋在湍流大气中的动态演化, 即出现产生和湮灭等现象的物理机理是光波和湍流的相互作用^[25], 以及两束离轴涡旋光束间的相互作用^[9]. 在大气湍流中, 涡旋光束拓扑电荷可用于大气通信中的信息载体^[26], 而与拓扑电荷直接相关的轨道角动量可用于高密度信息存储, 信息编码与解码^[27-29]. 本文研究结果有助于比较在理想大气和非理想大气湍流中合成相干涡旋的动态演化行为, 并为其应用可行性提供理论支持.

附录 A

证明 在非 Kolmogorov 大气湍流中非共线部分相干 HSG 涡旋光束相干叠加和非相干叠加形成的合成光束的平均光强与 $z = 0$ 面上拓扑电荷 m 的符号有关.

1) 非相干叠加

将 (12)—(24) 式代入 (28) 式中, 当 $m = +1$ 时有

$$W_+(\boldsymbol{\rho}' - \mathbf{d}, \boldsymbol{\rho}' - \mathbf{d}, z) = \left(\frac{k}{4z}\right)^2 \frac{1}{A\varepsilon} (W_{11} + W_{12} - W_{13} - W_{14}), \quad (\text{A1})$$

其中,

$$W_{11} = a_1 (b_1 + c_1), \quad (\text{A2})$$

$$W_{12} = a_2 (b_2 + c_2), \quad (\text{A3})$$

$$W_{13} = (a_3 + ib_3) (c_3 + id_3), \quad (\text{A4})$$

$$W_{14} = (a_3 - ib_3) (c_3 - id_3), \quad (\text{A5})$$

$$a_1 = \exp \left\{ -\frac{k^2}{4\varepsilon z^2} [(\rho'_x - d)^2 + \rho'^2_y] \right\} \times \exp \left\{ \frac{1}{4A} \left[\left(2\Omega_0 + \frac{k^2}{2\varepsilon z^2} (\rho'_x - d) \right)^2 + \left(2\Omega_0 + \frac{k^2}{2\varepsilon z^2} \rho'_y \right)^2 \right] \right\}, \quad (\text{A6})$$

$$b_1 = \frac{1}{4A^2} \left[\left(2\Omega_0 + \frac{k^2}{2\varepsilon z^2} (\rho'_x - d) \right)^2 + \left(2\Omega_0 + \frac{k^2}{2\varepsilon z^2} \rho'_y \right)^2 \right] + \frac{1}{A} + \frac{k^2}{16C^2 z^2} \left[\left(\rho'_x - d - \frac{w_0^2 \Omega_0}{2} \right)^2 + \left(\rho'_y - \frac{w_0^2 \Omega_0}{2} \right)^2 \right] - \frac{1}{4C}, \quad (\text{A7})$$

$$c_1 = -\frac{k}{4ACz} \left[\left(\rho'_x - d - \frac{w_0^2 \Omega_0}{2} \right) \times \left(2\Omega_0 + \frac{k^2}{2\varepsilon z^2} \rho'_y \right) \right.$$

$$\left. - \left(2\Omega_0 + \frac{k^2}{2\varepsilon z^2} (\rho'_x - d) \right) \left(\rho'_y - \frac{w_0^2 \Omega_0}{2} \right) \right], \quad (\text{A8})$$

$$a_3 = \exp \left\{ \frac{1}{4\varepsilon} \left(1 - \frac{k^2}{4A\varepsilon z^2} \right) \times \left[-\frac{k^2}{z^2} \left((\rho'_x - d)^2 + \rho'^2_y \right) + 2\Omega_0^2 \right] \right\} \times \cos \left[\frac{2k\Omega_0}{z} (\rho'_x - d + \rho'_y) \right], \quad (\text{A9})$$

$$b_3 = \exp \left\{ \frac{1}{4\varepsilon} \left(1 - \frac{k^2}{4A\varepsilon z^2} \right) \times \left[-\frac{k^2}{z^2} \left((\rho'_x - d)^2 + \rho'^2_y \right) + 2\Omega_0^2 \right] \right\} \times \sin \left[\frac{2k\Omega_0}{z} (\rho'_x - d + \rho'_y) \right], \quad (\text{A10})$$

$$c_3 = \frac{1}{A} - \frac{1}{4C} - \frac{1}{16} \left(\frac{k^2}{A^2 \varepsilon^2 z^2} + \frac{1}{C^2} \right) \times \left[-\frac{k^2}{z^2} \left((\rho'_x - d)^2 + \rho'^2_y \right) + 2\Omega_0^2 \right], \quad (\text{A11})$$

$$d_3 = -\frac{k\Omega_0}{8z} \left(\frac{k^2}{A^2 \varepsilon^2 z^2} + \frac{1}{C^2} \right) (\rho'_x - d + \rho'_y), \quad (\text{A12})$$

a_2, b_2, c_2 只是将 a_1, b_1, c_1 中的 $2\Omega_0$ 换成 $-2\Omega_0$ 即可, $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2, a_3, b_3, c_3, d_3$ 都是实数.

于是

$$W_+(\boldsymbol{\rho}' - \mathbf{d}, \boldsymbol{\rho}' - \mathbf{d}, z) = \left(\frac{k}{4z}\right)^2 \frac{1}{A\varepsilon} [a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_1 c_1 + a_2 c_2 - 2(a_3 c_3 - b_3 d_3)], \quad (\text{A13})$$

同理

$$W_+(\boldsymbol{\rho}' + \mathbf{d}, \boldsymbol{\rho}' + \mathbf{d}, z) = \left(\frac{k}{4z}\right)^2 \frac{1}{A\varepsilon} [a'_1 b'_1 + a'_2 b'_2 + a'_1 c'_1 + a'_2 c'_2 - 2(a'_3 c'_3 - b'_3 d'_3)], \quad (\text{A14})$$

其中 $a'_1, b'_1, c'_1, a'_2, b'_2, c'_2, a'_3, b'_3, c'_3, d'_3$ 只是将 $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2, a_3, b_3, c_3, d_3$ 表达式中所含的 $-d$ 换成 d 即可.

因此

$$I_{+\text{incoh}}(\boldsymbol{\rho}', z) = \sum_{l=-1/2}^{1/2} W_+(\boldsymbol{\rho}' - 2l\mathbf{d}, \boldsymbol{\rho}' - 2l\mathbf{d}, z) = \left(\frac{k}{4z}\right)^2 \frac{1}{A\varepsilon} [(a_1 b_1 + a_2 b_2 + a'_1 b'_1 + a'_2 b'_2 + a_1 c_1 + a_2 c_2 + a'_1 c'_1 + a'_2 c'_2) - 2(a_3 c_3 - b_3 d_3 + a'_3 c'_3 - b'_3 d'_3)]. \quad (\text{A15})$$

当 $m = -1$ 时,

$$I_{-\text{incoh}}(\boldsymbol{\rho}', z) = \sum_{l=-1/2}^{1/2} W_-(\boldsymbol{\rho}' - 2l\mathbf{d}, \boldsymbol{\rho}' - 2l\mathbf{d}, z)$$

$$\begin{aligned}
 &= \left(\frac{k}{4z}\right)^2 \frac{1}{A\varepsilon} [(a_1b_1 + a_2b_2 + a'_1b'_1 + a'_2b'_2 \\
 &\quad - a_1c_1 - a_2c_2 - a'_1c'_1 - a'_2c'_2) \\
 &\quad - 2(a_3c_3 - b_3d_3 + a'_3c'_3 - b'_3d'_3)]. \quad (\text{A16})
 \end{aligned}$$

由于 $a_1c_1 + a_2c_2 + a'_1c'_1 + a'_2c'_2 \neq 0$, 故 $I_{+\text{incoh}}(\boldsymbol{\rho}', z) \neq I_{-\text{incoh}}(\boldsymbol{\rho}', z)$.

2) 相干叠加

$$\begin{aligned}
 &W_+(\boldsymbol{\rho}' + \mathbf{d}, \boldsymbol{\rho}' - \mathbf{d}, z) \\
 &= \left(\frac{k}{4z}\right)^2 \frac{1}{A\varepsilon} \exp\left[-\frac{i2kd}{z}\rho'_x - 4d^2T(\alpha, z)\right] \\
 &\quad \times (W_{31} + W_{32} - W_{33} - W_{34}), \quad (\text{A17})
 \end{aligned}$$

其中:

$$W_{31} = h_{11}(h_{12} + h_{13}), \quad (\text{A18})$$

$$W_{32} = h_{21}(h_{22} + h_{23}), \quad (\text{A19})$$

$$W_{33} = h_{31}(h_{32} + h_{33}), \quad (\text{A20})$$

$$W_{34} = h_{41}(h_{42} + h_{43}), \quad (\text{A21})$$

$$\begin{aligned}
 h_{11} &= \exp\left\{\frac{1}{4\varepsilon}\left[-\frac{k^2}{z^2}(\rho'_x + \rho'_y) + 4d^2T(\alpha, z)^2\right.\right. \\
 &\quad \left.- \frac{i4kdT(\alpha, z)}{z}\rho'_x\right\} \times \exp\left\{\frac{1}{4A}\left[-\frac{k^2d^2}{z^2}\right.\right. \\
 &\quad \left.\left.\times\left(2 + \frac{T(\alpha, z)}{\varepsilon}\right)^2 + \left(2\Omega_0 + \frac{k^2}{2\varepsilon z^2}\rho'_x\right)^2\right.\right. \\
 &\quad \left.\left.+ \left(2\Omega_0 + \frac{k^2}{2\varepsilon z^2}\rho'_y\right)^2 + \frac{i2kd}{z}\left(2 + \frac{T(\alpha, z)}{\varepsilon}\right)\right.\right. \\
 &\quad \left.\left.\times\left(2\Omega_0 + \frac{k^2}{2\varepsilon z^2}\rho'_x\right)\right]\right\}, \quad (\text{A22})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 h_{12} &= \frac{1}{4A^2}\left[-\frac{k^2d^2}{z^2}\left(2 + \frac{T(\alpha, z)}{\varepsilon}\right)^2\right. \\
 &\quad \left.+ \left(2\Omega_0 + \frac{k^2}{2\varepsilon z^2}\rho'_x\right)^2 + \left(2\Omega_0 + \frac{k^2}{2\varepsilon z^2}\rho'_y\right)^2\right. \\
 &\quad \left.+ \frac{i2kd}{z}\left(2 + \frac{T(\alpha, z)}{\varepsilon}\right)\left(2\Omega_0 + \frac{k^2}{2\varepsilon z^2}\rho'_x\right)\right] \\
 &\quad \left.+ \frac{1}{A} - \frac{1}{16C^2}\left[-\frac{k^2}{z^2}\left(\rho'_x - \frac{w_0^2\Omega_0}{2}\right)^2\right.\right. \\
 &\quad \left.\left.+ \left(\frac{k^2w_0^2d}{2z^2} - 2dT(\alpha, z)\right)^2 - \frac{k^2}{z^2}\left(\rho'_y - \frac{w_0^2\Omega_0}{2}\right)^2\right.\right. \\
 &\quad \left.\left.+ \frac{i2k}{z}\left(\rho'_x - \frac{w_0^2\Omega_0}{2}\right)\left(\frac{k^2w_0^2d}{2z^2} - 2dT(\alpha, z)\right)\right]\right. \\
 &\quad \left.- \frac{1}{4C}, \quad (\text{A23})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 h_{13} &= \frac{1}{4AC}\left(\frac{k^2w_0^2}{4\varepsilon z^2} + 2\right)\left[-\frac{k\Omega_0}{z}(\rho'_x - \rho'_y)\right. \\
 &\quad \left.+ id\left(\frac{k^2}{z^2}\rho'_y - 2\Omega_0T(\alpha, z)\right)\right], \quad (\text{A24})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 h_{31} &= \exp\left\{\frac{1}{4\varepsilon}\left[-\frac{k^2}{z^2}(\rho'^2_x + \rho'^2_y)\right.\right. \\
 &\quad \left.\left.+ \Omega_0^2 + (\Omega_0 - 2dT(\alpha, z))\right.\right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\left. + \frac{i2k}{z}(\Omega_0 - 2dT(\alpha, z))\rho'_x + \frac{i2k\Omega_0}{z}\rho'_y\right\} \\
 &\quad \times \exp\left\{\frac{1}{4A}\left[-\frac{k^2}{z^2}\left(2d - \frac{\Omega_0}{2\varepsilon} + \frac{dT(\alpha, z)}{\varepsilon}\right)^2\right.\right. \\
 &\quad \left.\left.+ \frac{k^4}{4\varepsilon^2z^4}(\rho'^2_x + \rho'^2_y) - \frac{k^2\Omega_0^2}{4\varepsilon^2z^2}\right.\right. \\
 &\quad \left.\left.+ \frac{ik^3d}{\varepsilon z^3}\left(2 + \frac{T(\alpha, z)}{\varepsilon}\right)\rho'_x\right.\right. \\
 &\quad \left.\left.- \frac{ik^3\Omega_0}{2\varepsilon^2z^3}(\rho'_x + \rho'_y)\right]\right\}, \quad (\text{A25})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 h_{32} &= \frac{1}{4A^2}\left[-\frac{k^2}{z^2}\left(2d - \frac{\Omega_0}{2\varepsilon} + \frac{dT(\alpha, z)}{\varepsilon}\right)^2\right. \\
 &\quad \left.+ \frac{k^4}{4\varepsilon^2z^4}(\rho'^2_x + \rho'^2_y) - \frac{k^2\Omega_0^2}{4\varepsilon^2z^2}\right. \\
 &\quad \left.+ \frac{ik^3d}{\varepsilon z^3}\left(2 + \frac{T(\alpha, z)}{\varepsilon}\right)\rho'_x\right. \\
 &\quad \left.- \frac{ik^3\Omega_0}{2\varepsilon^2z^3}(\rho'_x + \rho'_y)\right] + \frac{1}{A} \\
 &\quad - \frac{1}{16C^2}\left[-\frac{k^2}{z^2}(\rho'^2_x + \rho'^2_y)\right. \\
 &\quad \left.+ \left(\Omega_0 - 2dT(\alpha, z) + \frac{k^2w_0^2d}{2z^2}\right)^2 + \Omega_0^2\right. \\
 &\quad \left.+ \frac{ikd}{z}\left(\frac{k^2w_0^2}{z^2} - 4T(\alpha, z)\right)\rho'_x\right. \\
 &\quad \left.+ \frac{i2k\Omega_0}{z}(\rho'_x + \rho'_y)\right] - \frac{1}{4C}, \quad (\text{A26})
 \end{aligned}$$

$$h_{33} = \frac{kd}{4ACz}\left(\frac{k^2w_0^2}{4\varepsilon z^2} + 2\right)\left(\Omega_0 + \frac{ik}{z}\rho'_y\right), \quad (\text{A27})$$

h_{21}, h_{22}, h_{23} 只是将 h_{11}, h_{12}, h_{13} 中的 $2\Omega_0$ 换成 $-2\Omega_0$, h_{41}, h_{42}, h_{43} 只是将 h_{31}, h_{32}, h_{33} 中的 Ω_0 换成 $-\Omega_0$ 即可.

因

$$\begin{aligned}
 W_+(\boldsymbol{\rho}' + \mathbf{d}, \boldsymbol{\rho}' - \mathbf{d}, z) &= W_+(\boldsymbol{\rho}' - \mathbf{d}, \boldsymbol{\rho}' + \mathbf{d}, z)^*, \\
 &\quad (* \text{ 为复共轭}) \quad (\text{A28})
 \end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned}
 &W_+(\boldsymbol{\rho}' + \mathbf{d}, \boldsymbol{\rho}' - \mathbf{d}, z) + W_+(\boldsymbol{\rho}' - \mathbf{d}, \boldsymbol{\rho}' + \mathbf{d}, z) \\
 &= \left(\frac{k}{4z}\right)^2 \frac{2}{A\varepsilon} \text{Re}\left\{\exp\left[-2d\left(\frac{ik\rho'_x}{z} - 2dT(\alpha, z)\right)\right]\right. \\
 &\quad \times (h_{11}h_{12} + h_{21}h_{22} - h_{31}h_{32} - h_{41}h_{42} \\
 &\quad \left.+ h_{11}h_{13} + h_{21}h_{23} - h_{31}h_{33} - h_{41}h_{43})\right\}. \quad (\text{A29})
 \end{aligned}$$

当 $m = -1$ 时,

$$\begin{aligned}
 &W_-(\boldsymbol{\rho}' + \mathbf{d}, \boldsymbol{\rho}' - \mathbf{d}, z) + W_-(\boldsymbol{\rho}' - \mathbf{d}, \boldsymbol{\rho}' + \mathbf{d}, z) \\
 &= \left(\frac{k}{4z}\right)^2 \frac{2}{A\varepsilon} \text{Re}\left\{\exp\left[-2d\left(\frac{ik\rho'_x}{z} - 2dT(\alpha, z)\right)\right]\right. \\
 &\quad \times [h_{11}h_{12} + h_{21}h_{22} - h_{31}h_{32} - h_{41}h_{42} \\
 &\quad \left.- (h_{11}h_{13} + h_{21}h_{23} - h_{31}h_{33} - h_{41}h_{43})\right]\}, \quad (\text{A30})
 \end{aligned}$$

由 (26) 和 (28) 式知

$$I_{\text{coh}}(\boldsymbol{\rho}', z) = I_{\text{incoh}}(\boldsymbol{\rho}', z) + W(\boldsymbol{\rho}' + \mathbf{d}, \boldsymbol{\rho}' - \mathbf{d}, z) + W(\boldsymbol{\rho}' - \mathbf{d}, \boldsymbol{\rho}' + \mathbf{d}, z), \quad (\text{A31})$$

因 $h_{11}h_{13} + h_{21}h_{23} - h_{31}h_{33} - h_{41}h_{43} \neq 0$, 故 $I_{+\text{coh}}(\boldsymbol{\rho}', z) \neq I_{-\text{coh}}(\boldsymbol{\rho}', z)$.

于是, 我们证明了在非 Kolmogorov 大气湍流中部分相干 HSG 涡旋光束相干叠加和非相干叠加形成的合成光束的平均光强与 $z = 0$ 面上拓扑电荷 m 的符号有关.

附录 B

证明 非共线部分相干 HSG 涡旋光束相干叠加形成的合成光束在 $z = 0$ 面上不存在合成相干涡旋.

对 $m = +1$ ($m = -1$ 可作类似讨论) 情况, 将 (1), (25) 和 (26) 式代入 (30a) 和 (30b) 式, 经繁冗的代数运算, 最后结果可整理为

$$\begin{aligned} & \exp[\Omega_0(\rho_{2x} + \rho_{2y})] \times [R_1 M_1 \exp(\beta_1 \rho_{2x}) \\ & + R_2 M_2 \exp(-\beta_1 \rho_{2x}) + R_3 M_3 \exp(\beta_2 \rho_{2x}) \\ & + R_4 M_4 \exp(-\beta_2 \rho_{2x})] \\ = & \exp[-\Omega_0(\rho_{2x} + \rho_{2y})] \times [R_1 N_1 \exp(\beta_1 \rho_{2x}) \\ & + R_2 N_2 \exp(-\beta_1 \rho_{2x}) + R_3 N_3 \exp(\beta_2 \rho_{2x}) \\ & + R_4 N_4 \exp(-\beta_2 \rho_{2x})], \quad (\text{B1}) \\ & \times \exp[\Omega_0(\rho_{2x} + \rho_{2y})] \times [J_1 M_1 \exp(\beta_1 \rho_{2x}) \\ & + J_2 M_2 \exp(-\beta_1 \rho_{2x}) + J_3 M_3 \exp(\beta_2 \rho_{2x}) \\ & + J_4 M_4 \exp(-\beta_2 \rho_{2x})] \\ = & \exp[-\Omega_0(\rho_{2x} + \rho_{2y})] \times [J_1 N_1 \exp(\beta_1 \rho_{2x}) \\ & + J_2 N_2 \exp(-\beta_1 \rho_{2x}) + J_3 N_3 \exp(\beta_2 \rho_{2x}) \\ & + J_4 N_4 \exp(-\beta_2 \rho_{2x})], \quad (\text{B2}) \end{aligned}$$

即合成相干涡旋的位置由方程组 (B1) 和 (B2) 式决定, 其中

$$M_1 = \exp(\beta_1 \rho_{1x}) \{ \exp[\Omega_0(\rho_{1x} + \rho_{1y} - 2d)] - \exp[-\Omega_0(\rho_{1x} + \rho_{1y})] \}, \quad (\text{B3})$$

$$M_2 = \exp(-\beta_1 \rho_{1x}) \{ \exp[\Omega_0(\rho_{1x} + \rho_{1y} + 2d)] - \exp[-\Omega_0(\rho_{1x} + \rho_{1y})] \}, \quad (\text{B4})$$

$$M_3 = \exp\left(-\beta_2 \rho_{1x} - \frac{2d^2}{\sigma_0^2}\right) \{ \exp[\Omega_0(\rho_{1x} + \rho_{1y})] - \exp[-\Omega_0(\rho_{1x} + \rho_{1y} + 2d)] \}, \quad (\text{B5})$$

$$M_4 = \exp\left(\beta_2 \rho_{1x} - \frac{2d^2}{\sigma_0^2}\right) \{ \exp[\Omega_0(\rho_{1x} + \rho_{1y})] - \exp[-\Omega_0(\rho_{1x} + \rho_{1y} - 2d)] \}, \quad (\text{B6})$$

$$N_1 = -\exp(\beta_1 \rho_{1x}) \{ \exp[-\Omega_0(\rho_{1x} + \rho_{1y} + 2d)] - \exp[\Omega_0(\rho_{1x} + \rho_{1y})] \}, \quad (\text{B7})$$

$$N_2 = -\exp(-\beta_1 \rho_{1x}) \{ \exp[-\Omega_0(\rho_{1x} + \rho_{1y} + 2d)] - \exp[\Omega_0(\rho_{1x} + \rho_{1y})] \}, \quad (\text{B8})$$

$$N_3 = -\exp\left(-\beta_2 \rho_{1x} - \frac{2d^2}{\sigma_0^2}\right) \{ \exp[-\Omega_0(\rho_{1x} + \rho_{1y})] - \exp[\Omega_0(\rho_{1x} + \rho_{1y} + 2d)] \}, \quad (\text{B9})$$

$$N_4 = -\exp\left(\beta_2 \rho_{1x} - \frac{2d^2}{\sigma_0^2}\right) \{ \exp[-\Omega_0(\rho_{1x} + \rho_{1y})] - \exp[\Omega_0(\rho_{1x} + \rho_{1y} - 2d)] \}, \quad (\text{B10})$$

$$\beta_1 = \frac{2d}{w_0^2}, \quad (\text{B11})$$

$$\beta_2 = \left(\frac{1}{w_0^2} + \frac{1}{\sigma_0^2}\right) 2d, \quad (\text{B12})$$

$$R_1 = (\rho_{1x} - d)(\rho_{2x} - d) + \rho_{1y}\rho_{2y}, \quad (\text{B13})$$

$$R_2 = (\rho_{1x} + d)(\rho_{2x} + d) + \rho_{1y}\rho_{2y}, \quad (\text{B14})$$

$$R_3 = (\rho_{1x} + d)(\rho_{2x} - d) + \rho_{1y}\rho_{2y}, \quad (\text{B15})$$

$$R_4 = (\rho_{1x} - d)(\rho_{2x} + d) + \rho_{1y}\rho_{2y}, \quad (\text{B16})$$

$$J_1 = (\rho_{1x} - d)\rho_{2y} - \rho_{1y}(\rho_{2x} - d), \quad (\text{B17})$$

$$J_2 = (\rho_{1x} + d)\rho_{2y} - \rho_{1y}(\rho_{2x} + d), \quad (\text{B18})$$

$$J_3 = (\rho_{1x} + d)\rho_{2y} - \rho_{1y}(\rho_{2x} - d), \quad (\text{B19})$$

$$J_4 = (\rho_{1x} - d)\rho_{2y} - \rho_{1y}(\rho_{2x} - d). \quad (\text{B20})$$

由 (B1) 和 (B2) 式得

$$\begin{aligned} & \frac{\rho_{1x} + d}{\rho_{1x} - d} \\ = & \frac{\{ \exp[-\Omega_0(\rho_{2x} + \rho_{2y})] N_4 - \exp[\Omega_0(\rho_{2x} + \rho_{2y})] M_4 \}}{\{ \exp[\Omega_0(\rho_{2x} + \rho_{2y})] M_2 - \exp[-\Omega_0(\rho_{2x} + \rho_{2y})] N_2 \}} \\ & \times \frac{\exp(-\beta_2 \rho_{2x})}{\exp(-\beta_1 \rho_{2x})}, \quad (\text{B21}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\{ \exp[-\Omega_0(\rho_{2x} + \rho_{2y})] N_4 - \exp[\Omega_0(\rho_{2x} + \rho_{2y})] M_4 \}}{\{ \exp[\Omega_0(\rho_{2x} + \rho_{2y})] M_2 - \exp[-\Omega_0(\rho_{2x} + \rho_{2y})] N_2 \}} \\ & \times \frac{\exp(-\beta_2 \rho_{2x})}{\exp(-\beta_1 \rho_{2x})} = 1. \quad (\text{B22}) \end{aligned}$$

由于 $d \neq 0$, 故 (B21) 与 (B22) 式矛盾, 即 (30a) 和 (30b) 式不能同时满足, 因此, 两束平行非共线的部分相干 HSG 涡旋光束相干叠加形成的合成光束在 $z = 0$ 面上不存在合成相干涡旋.

- [1] Gbur G, Visser T D, Wolf E 2001 *Phys. Rev. Lett.* **88** 013901
- [2] Ponomarenko S A 2001 *J. Opt. Soc. Am. A* **18** 150
- [3] Schouten H F, Gbur G, Visser T D, Wolf E 2003 *Opt. Lett.* **28** 968
- [4] Gbur G, Visser T D 2003 *Opt. Commun.* **222** 117
- [5] Gbur G, Visser T D, Wolf E 2004 *J. Opt. A: Pure Appl. Opt.* **6** S239
- [6] Fischer D G, Visser T D 2004 *J. Opt. Soc. Am. A* **21** 2097
- [7] Palacios D M, Maleev I D, Marathay A S, Swartzlander Jr G A 2004 *Phys. Rev. Lett.* **92** 143905
- [8] Maleev I D, Palacios D M, Marathay A S, Swartzlander Jr G A 2004 *J. Opt. Soc. Am. B* **21** 1895
- [9] Cheng K, Lü B 2008 *J. Mod. Opt.* **55** 2751
- [10] Li J, Lü B 2009 *J. Opt. A* **11** 075401
- [11] Stribling B E, Welsh B M, Roggemann M C 1995 *Proc. SPIE* **2471** 181
- [12] Belenkii M S, Karis S J, Brown II J M, Fugate R Q 2010 *Proc. SPIE* **3126** 113
- [13] Beland R R 2010 *Proc. SPIE* **2375** 6
- [14] Flossmann F, Schwarz U T, Maier M 2005 *Opt. Commun.* **250** 218
- [15] Eyyuboglu H T, Baykal Y 2005 *J. Opt. Soc. Am. A* **22** 2709
- [16] Zahid M, Zubairy M S 1989 *Opt. Commun* **70** 361
- [17] Andrews L C, Phillips R L 1998 *Laser Beam Propagation through Random Media* (Bellingham: SPIE)
- [18] Gbur G, Wolf E 2002 *J. Opt. Soc. Am. A* **19** 1592
- [19] Toselli I, Andrews L C, Phillips R L, Ferrero V 2007 *Proc. SPIE* **6551** 65510E-1
- [20] Gradshteyn I S, Ryzhik I M 2007 *Table of Integrals, Series and Products* (New York: Academic Press)
- [21] Ji X, Zhang E, Lü B 2008 *J. Opt. Soc. Am. B* **25** 825
- [22] Mandel L, Wolf E 1995 *Optical Coherence and Quantum Optics* (Cambridge, UK: Cambridge U. Press)
- [23] Freund I, Shvartsman N 1994 *Phys. Rev. A* **50** 5164
- [24] Eyyuboglu H T, Baykal Y 2005 *Appl. Opt.* **44** 976
- [25] Maleev I D, Swartzlander Jr G A 2003 *J. Opt. Soc. Am. B* **20** 1169
- [26] Gbur G, Tyson R K 2008 *J. Opt. Soc. Am. A* **25** 225
- [27] Lü H, Ke X Z 2009 *Acta Opt. Sin.* **29** 331 (in Chinese) [吕宏, 柯熙政, 2009 光学学报 **29** 331]
- [28] Liu Y D, Gao C Q, Gao W M, Li F 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 854 (in Chinese) [刘义东, 高春清, 高伟明, 李丰 2007 物理学报 **56** 854]
- [29] Wu J Z, Li Y J 2007 *Chin. Phys.* **16** 1334

Dynamic evolution of composite coherence vortices by superimpositions of partially coherent hyperbolic-sine-Gaussian vortex beams in non-Kolmogorov atmospheric turbulence*

He Xue-Mei Lü Bai-Da[†]

(*Institute of Laser Physics and Chemistry, Sichuan University, Chengdu 610064, China*)

(Received 13 April 2011; revised manuscript received 20 May 2011)

Abstract

Some experiments show that the practical atmosphere deviates from ideal Kolmogorov model. In this paper, based on the extended Huygens-Fresnel principle and the non-Kolmogorov turbulence model proposed by Toselli et al., the analytical expression for the propagation of partially coherent hyperbolic-sine-Gaussian vortex beams through non-Kolmogorov atmospheric turbulence is derived and used to study the dynamic evolutions of composite coherence vortices formed by coherent and incoherent superpositions of two partially coherent hyperbolic-sine-Gaussian vortex beams in non-Kolmogorov atmospheric turbulence. It is shown that the evolution process of the average intensity of the superimposed beam depends on the general exponent α of the non-Kolmogorov turbulence, the sign of the topological charge of the superimposed vortex beam in the source plane, and superposition scheme. The motion, the creation and the annihilation of composite coherence vortices may take place upon propagation through non-Kolmogorov turbulence, and the general exponent α , sign of the topological charge and superposition scheme affect the evolution behavior. Finally, the results are compared with those of the previous work.

Keywords: non-Kolmogorov atmospheric turbulence, composite coherence vortex, partially coherent hyperbolic-sine-Gaussian vortex beam

PACS: 42.68.Ay, 42.68.Bz, 42.25.Dd, 42.25.Fx

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 10874125).

[†] E-mail: baidalu0@tom.com