第二类变系数 KdV 方程的新类型无穷序列精确解*

套格图桑[1)2)†] 白玉梅[1)]

1) (内蒙古民族大学数学学院, 通辽 028043)

2) (内蒙古师范大学数学科学学院, 呼和浩特 010022)

(2011 年 5 月 24 日收到; 2011 年 7 月 12 日收到修改稿)

为了构造变系数非线性发展方程的无穷序列新精确解, 发掘第一种椭圆辅助方程的构造性和机械化性特点, 获得了该方程的新类型解和相应的 Bäcklund 变换. 在符号计算系统 Mathematica 的帮助下, 以第二类变系数 KdV 方程为应用实例, 构造了三种类型的无穷序列新精确解. 这里包括无穷序列光滑类孤子解、无穷序列尖峰孤立子解和无穷序列紧孤立子解. 这种方法也可以获得其他变系数非线性发展方程的无穷序列新精确解.

关键词: 第一种椭圆辅助方程, Bäcklund 变换, 变系数非线性发展方程, 无穷序列新精确解

PACS: 02.30.Ik, 02.30.Jr

1 引 言

在构造非线性发展方程精确解领域, 获得变系数非线性发展方程的新精确解具有重要意义. 文献[1—4]用 Jacobi 椭圆函数展开法、截断展开法和辅助方程法, 构造了第二类变系数 KdV 方程和广义变系数 KdV 方程等非线性发展方程的有限多个光滑类孤子新精确解:

$$u_t + [\sigma(t) + \mu(t)x]u_x + \alpha(t)uu_x + \beta(t)u_{xxx} + \nu(t)u = 0, \tag{1}$$

$$u_t + 2\delta(t)u + [\lambda(t) + \delta(t)x]u_x - 3d\gamma(t)uu_x + \gamma(t)u_{xxx} = 0, \tag{2}$$

其中 $\alpha(t)$, $\beta(t)$, $\gamma(t)$, $\lambda(t)$, $\delta(t)$, $\mu(t)$, $\nu(t)$, $\sigma(t)$ 是 t 的任意函数, d 是任意常数.

广义变系数 KdV 方程 (2) 是第二类变系数 KdV 方程 (1) 的特殊情况. 当 $\nu(t) = 2\delta(t)$, $\alpha(t) = -3d\gamma(t)$, $\beta(t) = \gamma(t)$, $\sigma(t) = \lambda(t)$, $\mu(t) = \delta(t)$ 时, 方程 (1) 转化为方程 (2). 而且广义变系数 KdV 方程 (2) 也包括了下列非均匀谱 KdV 方程 [5−7]、柱 KdV 方程 [7] 和具有弛豫效应非均匀介质的 KdV 方程 [7]. 因此, 构造第二类变系数 KdV 方程的新精确解在理论和应用上具有重要意义.

$$u_t = K_0(t)[u_{xxx} + 6uu_x] + 4K_1(t)u_x - h(t)[2u + xu_x], \tag{3}$$

$$u_t + \frac{1}{2t}u + 6uu_x + u_{xxx} = 0, \tag{4}$$

$$u_t + \gamma(t)u + \big[[c_0 + \gamma(t)x]u\big]_x + 6uu_x + u_{xxx} = 0. \tag{5}$$

1993 年以前, 在构造非线性发展方程精确解领域一直研究光滑孤立子解的求解方法. 1993 年, CH 方程和 $K(m,n)$ 方程中发现尖峰孤立子解和紧孤立子解以来, 在构造非线性发展方程精确解领域开始研究, 获得了此类解的一些方法. 到目前为止, 在 Degasperis-Procesi 方程和 $K(m,n,1)$ 方程等少数非线性发展方程中获得了有限多个尖峰孤立子解和紧孤立子解, 其他绝大多数非线性发展方程中还没有发现此类精确解.

辅助方程法具有构造性和机械化性特点, 这两大特点的发掘对于构造非线性发展方程的新精确解具有重要意义. 本文为了构造变系数非线性发展方程的无穷序列光滑孤立波解、无穷序列尖峰孤立子解和无穷序列紧孤立子解, 进一步研究了第一种椭圆辅助方程, 获得了该方程的一些新解和相

* 国家自然科学基金 (批准号: 10862003)、内蒙古自治区高等学校科学研究基金 (批准号: NJZZ07031) 和内蒙古自治区自然科学基金 (批准号: 2010MS0111) 资助的课题.

† E-mail: tgts@imnu.edu.cn

应的 Bäcklund 变换. 在此基础上, 利用符号计算系统 Mathematica, 构造了第二类变系数 KdV 方程的新类型无穷序列精确解. 这些解包括了 Jacobi 椭圆函数、双曲函数、三角函数和有理函数单独构成的单函数型无穷序列光滑孤立子解、无穷序列尖峰孤立波解和无穷序列紧孤立子解. 这种方法也可以获得其他非线性发展方程的无穷序列新精确解.

2 第一种椭圆辅助方程的新解和相应的 Bäcklund 变换

第一种椭圆辅助方程存在多种新精确解, 该方程在构造非线性发展方程精确解领域获得了 Jacobi 椭圆函数、双曲函数、三角函数和有理函数形式的有限多个光滑孤立子精确解 [8-11]. 本文获得了第一种椭圆辅助方程的一些新解和相应的 Bäcklund 变换. 这种结论的获得对于发现非线性发展方程的多种新精确解具有重要作用.

2.1 第一种椭圆辅助方程的解

2.1.1 第一种椭圆辅助方程的已知解

第一种椭圆辅助方程 (6) 存在如下三种基本解, 其余解都可以用这三种解来表示.

$$\left(\frac{z(\xi)}{d\xi}\right)^2 = a + bz^2(\xi) + cz^4(\xi), \tag{6}$$

a	b	c	$z(\xi)$	序号
1	$-1-k^2$	k^2	$sn(\xi,k)$	(7)
$1-k^2$	$2k^2-1$	$-k^2$	$cn(\xi,k)$	(8)
$-1+k^2$	$2-k^2$	-1	$dn(\xi,k)$	(9)

2.1.2 第一种椭圆辅助方程的新解

从 Jacobi 椭圆函数的定义, 可以得出如下周期性质:

$$\begin{aligned} sn\big(\xi+4K(k)\big) &= sn(\xi,k), \\ cn\big(\xi+4K(k)\big) &= cn(\xi,k), \\ dn\big(\xi+2K(k)\big) &= dn(\xi,k), \end{aligned} \tag{10}$$

其中

$$\begin{aligned} K(k) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}\mathrm{d}\varphi \\ &= \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}\mathrm{d}x, \end{aligned}$$

$$0 \leqslant k \leqslant 1.$$

本文为了构造非线性发展方程的无穷序列紧孤立子解和无穷序列尖峰孤立子解, 根据已知解 (7)—(9) 和 Jacobi 椭圆函数的周期性, 获得了第一种椭圆辅助方程的如下新类型解.

当 $a=1, b=-1-k^2, c=k^2$ 时, 第一种椭圆辅助方程 (6) 有如下解:

$$z(\xi) = \begin{cases} sn(\xi,k), & K(k) \leqslant \xi \leqslant 5K(k), \\ 1, & \text{其他}; \end{cases} \tag{11}$$

$$z(\xi) = \begin{cases} sn(\xi,k), & -K(k) \leqslant \xi \leqslant 3K(k), \\ -1, & \text{其他}; \end{cases} \tag{12}$$

$$z(\xi) = \begin{cases} 1, & \xi \leqslant K(k), \\ sn(\xi,k), & K(k) \leqslant \xi \leqslant 3K(k), \\ -1, & 3K(k) \leqslant \xi; \end{cases} \tag{13}$$

$$z(\xi) = \begin{cases} -1, & \xi \leqslant 3K(k), \\ sn(\xi,k), & 3K(k) \leqslant \xi \leqslant 5K(k), \\ 1, & 5K(k) \leqslant \xi. \end{cases} \tag{14}$$

当 $a=1-k^2, b=2k^2-1, c=-k^2$ 时, 第一种椭圆辅助方程 (6) 有如下解:

$$z(\xi) = \begin{cases} cn(\xi,k), & 0 \leqslant \xi \leqslant 4K(k), \\ 1, & \text{其他}; \end{cases} \tag{15}$$

$$z(\xi) = \begin{cases} cn(\xi,k), & 2K(k) \leqslant \xi \leqslant 6K(k), \\ -1, & \text{其他}; \end{cases} \tag{16}$$

$$z(\xi) = \begin{cases} 1, & \xi \leqslant 0, \\ cn(\xi,k), & 0 \leqslant \xi \leqslant 2K(k), \\ -1, & \xi \geqslant 2K(k); \end{cases} \tag{17}$$

$$z(\xi) = \begin{cases} -1, & \xi \leqslant 2K(k), \\ cn(\xi,k), & 2K(k) \leqslant \xi \leqslant 4K(k), \\ 1, & \xi \geqslant 4K(k). \end{cases} \tag{18}$$

当 $a=-1+k^2, b=2-k^2, c=-1$ 时, 第一种椭圆辅助方程 (6) 有如下解:

$$z(\xi) = \begin{cases} dn(\xi,k), & 0 \leqslant \xi \leqslant 2K(k), \\ 1, & \text{其他}; \end{cases} \tag{19}$$

$$z(\xi) = \begin{cases} dn(\xi,k), & K(k) \leqslant \xi \leqslant 3K(k), \\ \sqrt{1-k^2}, & \text{其他}; \end{cases} \tag{20}$$

$$z(\xi)=\begin{cases}\sqrt{1-k^2}, & \xi\leqslant K(k),\\ dn(\xi,k), & K(k)\leqslant\xi\leqslant 2K(k),\\ 1, & \xi\geqslant 2K(k);\end{cases}\tag{21}$$

$$z(\xi)=\begin{cases}1, & \xi\leqslant 2K(k),\\ dn(\xi,k), & 2K(k)\leqslant\xi\leqslant 3K(k),\\ \sqrt{1-k^2}, & \xi\geqslant 3K(k).\end{cases}\tag{22}$$

当 $a=0$ 时, 第一种椭圆辅助方程 (6) 有如下解:

$$z(\xi)=\begin{cases}\left[\frac{-b}{c}\sec^2[(-b)^{\frac{1}{2}}\xi]\right]^{\frac{1}{2}}, & (b<0,c>0),\\ 0, & (b<0,c>0);\end{cases}\tag{23}$$

$$z(\xi)=\begin{cases}\left[\frac{-b}{c}\sec^2[(-b)^{\frac{1}{2}}\xi]\right]^{\frac{1}{2}}, & (b<0,c>0),\\ \pm\sqrt{\frac{-b}{c}}, & (b<0,c>0);\end{cases}\tag{24}$$

$$z(\xi)=\begin{cases}\left[\frac{-b}{c}\csc^2[(-b)^{\frac{1}{2}}\xi]\right]^{\frac{1}{2}}, & (b<0,c>0),\\ 0, & (b<0,c>0);\end{cases}\tag{25}$$

$$z(\xi)=\begin{cases}\left[\frac{-b}{c}\csc^2[(-b)^{\frac{1}{2}}\xi]\right]^{\frac{1}{2}}, & (b<0,c>0),\\ \pm\sqrt{\frac{-b}{c}}, & (b<0,c>0);\end{cases}\tag{26}$$

$$z(\xi)=\begin{cases}\left[\frac{-b}{c}sech^2[\sqrt{b}\xi]\right]^{\frac{1}{2}}, & (b>0,c<0),\\ 0, & (b>0,c<0);\end{cases}\tag{27}$$

$$z(\xi)=\begin{cases}\left[\frac{-b}{c}sech^2[\sqrt{b}\xi]\right]^{\frac{1}{2}}, & (b>0,c<0),\\ \pm\sqrt{\frac{-b}{c}}, & (b>0,c<0);\end{cases}\tag{28}$$

$$z(\xi)=\begin{cases}\left[\frac{b}{c}csch^2[\sqrt{b}\xi]\right]^{\frac{1}{2}}, & (b>0,c>0),\\ 0, & (b>0,c>0);\end{cases}\tag{29}$$

$$z(\xi)=\begin{cases}\left[\frac{b}{c}csch^2[\sqrt{b}\xi]\right]^{\frac{1}{2}}, & (b>0,c>0),\\ \pm\sqrt{\frac{-b}{c}}, & (b>0,c>0).\end{cases}\tag{30}$$

当 $b^2-4ac=0$ 时, 第一种椭圆辅助方程 (6) 有如下解:

$$z(\xi)=\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{2c}}\tan\left(\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{2}}|\xi|\right),\quad (b>0,c>0),\tag{31}$$

$$z(\xi)=\frac{\sqrt{-b}\left[1+\exp(\sqrt{-2b}|\xi|)\right]}{\sqrt{2c}\left[1-\exp(\sqrt{-2b}|\xi|)\right]},\quad (b<0,c>0).\tag{32}$$

当 $a=b=0$ 时, 第一种椭圆辅助方程 (6) 有如下解:

$$z(\xi)=\frac{1}{\sqrt{c}|\xi|},\ (c>0).\tag{33}$$

2.2 第一种椭圆辅助方程的 Bäcklund 变换

第一种椭圆辅助方程 (6) 通过变换 (34), 转化为第二种椭圆辅助方程 (35):

$$z^2(\xi)=\rho(\xi),\tag{34}$$

$$[\rho'(\xi)]^2=4a\rho(\xi)+4b\rho^2(\xi)+4c\rho^3(\xi).\tag{35}$$

根据 (34), (35) 式和文献 [12] 中给出的第二种椭圆辅助方程 (36) 的 Bäcklund 变换, 可以获得第一种椭圆辅助方程 (6) 的 Bäcklund 变换 (这里只列出两种 Bäcklund 变换)

$$\left(\frac{z(\xi)}{d\xi}\right)^2=az(\xi)+bz^2(\xi)+cz^3(\xi).\tag{36}$$

1) 若 $z_{n-1}(\xi)$ 是第一种椭圆辅助方程 (6) 的解, 则下列 $z_n(\xi)$ 也是方程 (6) 的解.

$$z_n^2(\xi)=\mp\frac{2a+(b\pm\sqrt{b^2-4ac})z_{n-1}^2(\xi)}{\pm b+\sqrt{b^2-4ac}\pm 2cz_{n-1}^2(\xi)},\quad (n=1,2,\cdots),\tag{37}$$

$$\begin{aligned}z_n^2(\xi)=&\left\{a\left[-\sqrt{3A_2}\mp 9\left(z'_{n-1}(\xi)\right)^2\right]\right\}\\ &\times\left\{\sqrt{3A_2}(b-\sqrt{b^2-3ac})\right.\\ &+2\sqrt{3A_2}cz_{n-1}^2(\xi)\\ &\left.\pm 3(b+\sqrt{b^2-3ac})\left(z'_{n-1}(\xi)\right)^2\right\}^{-1},\\ &(n=1,2,\cdots),\end{aligned}\tag{38}$$

其中

$$A_2=\sqrt{\frac{1}{16c^2}[128b^3-432abc+2(16b^2-48ac)^{\frac{3}{2}}]}.$$

2) 若 $z_{n-1}(\xi)$ 是第一种椭圆辅助方程 (6) 的解, 则下列 $z_n(\xi)$ 也是方程 (6) 的解 (这里 $b^2-4ac=0$):

$$\begin{aligned}z_n(\xi)=&\left\{ib[S+Lz_{n-1}^2(\xi)]\right\}\left\{b\sqrt{SL}\right.\\ &\mp ib\sqrt{\frac{(-2Sc+bL)^2}{b^2}}z_{n-1}(\xi)\\ &\left.+2c\sqrt{SL}z_{n-1}^2(\xi)\right\}^{-1},\quad (SL<0,\end{aligned}$$

$$b^2-4ac=0,\ n=1,2,\cdots\big), \tag{39}$$

$$\begin{aligned}z_n(\xi)=&\big\{\mathrm{i}b[S+Lz_{n-1}^2(\xi)]\big\}\Big\{b\sqrt{SL}\\&\mp\mathrm{i}b\sqrt{\frac{(-2Sc+bL)^2}{b^2}}z_{n-1}(\xi)\\&-2c\sqrt{SL}z_{n-1}^2(\xi)\Big\}^{-1},\quad\big(SL<0,\\&b^2-4ac=0,\ n=1,2,\cdots\big).\end{aligned} \tag{40}$$

3) 若 $z_{n-1}(\xi)$ 是第一种椭圆辅助方程 (6) 的解, 则下列 $z_n(\xi)$ 也是方程 (6) 的解 (这里 $a=0$):

$$z_n^2(\xi)=\frac{-bz_{n-1}^2(\xi)}{b+cz_{n-1}^2(\xi)},\ (a=0,n=1,2,\cdots), \tag{41}$$

$$\begin{aligned}z_n^2(\xi)=&\frac{-2\sqrt{3A_1}cz_{n-1}^2(\xi)\pm6b[z'_{n-1}(\xi)]^2}{c\big[\sqrt{3A_1}\mp9[z'_{n-1}(\xi)]^2\big]},\\&\left(a=0,\ b>0,\ A_1=4\sqrt{\frac{b^3}{c^2}},\ n=1,2,\cdots\right),\end{aligned} \tag{42}$$

$$\begin{aligned}z_n^2(\xi)=&\frac{-8b\sqrt{3A_1}-2\sqrt{3A_1}cz_{n-1}^2(\xi)}{4c\big[\sqrt{3A_1}\mp9[z'_{n-1}(\xi)]^2\big]},\\&\left(a=0,\ b<0,\ A_1=4\sqrt{\frac{b^3}{c^2}},\ n=1,2,\cdots\right).\end{aligned} \tag{43}$$

4) 若 $z_{n-1}(\xi)$ 是第一种椭圆辅助方程 (6) 的解, 则下列 $z_n(\xi)$ 也是方程 (6) 的解 (这里 $a=b=0$, 而且 c 是大于零的任意常数):

$$z_n(\xi)=\frac{d[-\sqrt{c}z_{n-1}^2(\xi)+z'_{n-1}(\xi)]}{p+z_{n-1}(\xi)[q+rz_{n-1}(\xi)]+mz'_{n-1}(\xi)},\quad(n=1,2,\cdots), \tag{44}$$

$$z_n(\xi)=\frac{(d-\sqrt{c}\mp q)z_{n-1}^2(\xi)+dz'_{n-1}(\xi)}{qz_{n-1}(\xi)+rz_{n-1}^2(\xi)+mz'_{n-1}(\xi)},\quad(n=1,2,\cdots), \tag{45}$$

$$\begin{aligned}z_n(\xi)=&\big\{B\sqrt{c}\big[Bz_{n-1}(\xi)+Cz_{n-1}^2(\xi)+dz'_{n-1}(\xi)\big]\big\}\\&\times\Big\{B\sqrt{c}\big[\pm B+[q+rz_{n-1}(\xi)]z_{n-1}(\xi)\big]\\&\mp\big[(C+d\sqrt{c})(C+d\sqrt{c}-q)\\&+Br\big]z'_{n-1}(\xi)\Big\}^{-1},\\&(n=1,2,\cdots).\end{aligned} \tag{46}$$

在解的 Bäcklund 变换 (44)—(46) 中 d,m,p,q,r,B,C 是不全为零的任意常数.

3 方法介绍

假设给定的变系数非线性发展方程为如下 (以 $(1+1)$ 维变系数非线性发展方程为例):

$$H(u,u_x,u_t,u_{xx},u_{xt},u_{tt},\cdots)=0, \tag{47}$$

我们把方程(47)的形式解取为如下表达式 (不惟一):

$$\begin{aligned}u(x,t)=&u(\xi)=F\big(z(\xi),\\z'(\xi)\big)=&F[z\big(p(t)x+q(t)\big),z'\big(p(t)x+q(t)\big)],\end{aligned} \tag{48}$$

这里 $F\big(z(\xi),z'(\xi)\big)$ 表示 $z(\xi)$ 和 $z'(\xi)$ 的变系数多项式或变系数有理分式; $z(\xi)$ 和 $z'(\xi)$ 由第一种椭圆辅助方程 (6) 来确定; $F\big(z(\xi),z'(\xi)\big)$ 中 $z(\xi)$ 和 $z'(\xi)$ 的系数以及 $p(t),q(t)$ 是 t 的待定函数.

将 (6), (48) 式一起代入 (47) 式, 令 $x^lz^j(\xi)\big(z'(\xi)\big)^i$ $(i=0,1,l=0,1,j=0,1,2,\cdots)$ 的系数为零后即可得到一个 $p(t)$, $q(t)$ 和 (48) 的系数为未知量的非线性超定微分方程组, 用符号计算系统 Mathematica 求出该微分方程组的解. 再把方程组的每一组解, 分别同第一种椭圆辅助方程 (6) 的解与相应的 Bäcklund 变换来确定的无穷序列解一起代入 (48) 式, 即可得到变系数非线性发展方程 (47) 的无穷序列光滑孤立子解、无穷序列紧孤立子解和无穷序列尖峰孤立子解.

4 第二类变系数 KdV 方程的新类型无穷序列精确解

下面构造第二类变系数 KdV 方程的无穷序列光滑孤立子解、无穷序列紧孤立子解和无穷序列尖峰孤立子解. 我们把第二类变系数 KdV 方程的形式解选择为如下表达式 (不惟一):

$$u(x,t)=u(\xi)=g(t)+f(t)z^2\big(p(t)x+q(t)\big). \tag{49}$$

将 (6), (49) 式代入 (1) 式并令 $z^j(\xi)(j=0,2)$; $z'(\xi)xz(\xi),z'(\xi)z^l(\xi)(l=1,3)$ 的系数为零后得到一个 $g(t)$, $f(t)$, $p(t)$, $q(t)$ 为未知量的非线性超定微分方程组, 利用符号计算系统 Mathematica 求出该方程组的如下解:

$$\begin{aligned}g(t)=&f(t)\\=&-\int\nu(t)\,\mathrm{d}t,\alpha(t)f(t)+12cp^2(t)\beta(t)=0,\\p(t)=&-\int\mu(t)\,\mathrm{d}t,q(t)\\=&-\int[g(t)p(t)\alpha(t)+4bp^3(t)\beta(t)\\&+p(t)\sigma(t)]\,\mathrm{d}t;\end{aligned} \tag{50}$$

$$g(t)=f(t)$$

$$
\begin{aligned}
&= -\int \nu(t)\,\mathrm{d}t, \alpha(t)f(t) + 12cp^2(t)\beta(t) \\
&= 0, \quad a = 0, \\
p(t) &= -\int \mu(t)\,\mathrm{d}t, \\
q(t) &= -\int [g(t)p(t)\alpha(t) + 4bp^3(t)\beta(t) \\
&\quad + p(t)\sigma(t)]\,\mathrm{d}t;
\end{aligned} \tag{51}
$$

$$
\begin{aligned}
g(t) &= f(t) = -\int \nu(t)\,\mathrm{d}t, \\
&\quad \alpha(t)f(t) + 12cp^2(t)\beta(t) = 0, \\
&\quad a = b = 0, \\
p(t) &= -\int \mu(t)\,\mathrm{d}t, \\
q(t) &= -\int [g(t)p(t)\alpha(t) + p(t)\sigma(t)]\,\mathrm{d}t;
\end{aligned} \tag{52}
$$

$$
\begin{aligned}
g(t) &= f(t) = -\int \nu(t)\,\mathrm{d}t, \\
&\quad \alpha(t)f(t) + 12cp^2(t)\beta(t) = 0, \\
&\quad b^2 - 4ac = 0, \\
p(t) &= -\int \mu(t)\,\mathrm{d}t, \\
q(t) &= -\int [g(t)p(t)\alpha(t) + 4bp^3(t)\beta(t) \\
&\quad + p(t)\sigma(t)]\,\mathrm{d}t.
\end{aligned} \tag{53}
$$

把 (50)—(53) 式代入 (49) 式后得到第二类变系数 KdV 方程 (1) 的如下形式的解:

$$
\begin{aligned}
u(x,t) = &-\bigg[1 + z^2\bigg(-x\int \mu(t)\,\mathrm{d}t \\
&-\int [g(t)p(t)\alpha(t) + 4bp^3(t)\beta(t) \\
&+ p(t)\sigma(t)]\,\mathrm{d}t\bigg)\bigg]\int \nu(t)\,\mathrm{d}t,
\end{aligned} \tag{54}
$$

$$
\begin{aligned}
u(x,t) = &-\bigg[1 + z^2\bigg(-x\int \mu(t)\,\mathrm{d}t \\
&-\int [g(t)p(t)\alpha(t) + 4bp^3(t)\beta(t) \\
&+ p(t)\sigma(t)]\,\mathrm{d}t\bigg)\bigg]\int \nu(t)\,\mathrm{d}t, (a=0),
\end{aligned} \tag{55}
$$

$$
\begin{aligned}
u(x,t) = &-\bigg[1 + z^2\bigg(-x\int \mu(t)\,\mathrm{d}t \\
&-\int [g(t)p(t)\alpha(t) + p(t)\sigma(t)]\,\mathrm{d}t\bigg)\bigg] \\
&\times \int \nu(t)\,\mathrm{d}t, \quad (a=b=0),
\end{aligned} \tag{56}
$$

$$
\begin{aligned}
u(x,t) = &-\bigg[1 + z^2\bigg(-x\int \mu(t)\,\mathrm{d}t \\
&-\int [g(t)p(t)\alpha(t) + 4bp^3(t)\beta(t) \\
&+ p(t)\sigma(t)]\,\mathrm{d}t\bigg)\bigg]\int \nu(t)\,\mathrm{d}t, \\
&(b^2 - 4ac = 0).
\end{aligned} \tag{57}
$$

利用第一种椭圆辅助方程的解与相应的 Bäcklund 变换, 可以获得第一种椭圆辅助方程的多种无穷序列精确解. 把这些解代入 (54)—(57) 式后得到第二类变系数 KdV 方程的如下无穷序列新精确解.

4.1 第二类变系数 KdV 方程的无穷序列光滑类孤子解

4.1.1 椭圆函数型无穷序列光滑类孤子解

把第一种椭圆辅助方程的已知解和 Bäcklund 变换 (38) 来确定的无穷序列解, 代入 (54) 式后得到第二类变系数 KdV 方程的如下 Jacobi 椭圆函数型无穷序列光滑类孤子解:

$$
\begin{cases}
u_n(x,t) = -[1 + z_n^2(\xi)]\displaystyle\int \nu(t)\,\mathrm{d}t, \ (n = 1, 2, \cdots), \\
z_n^2(\xi) = \dfrac{a\Big[-\sqrt{3A_2} \mp 9\big(z'_{n-1}(\xi)\big)^2\Big]}{\sqrt{3A_2}(b - \sqrt{b^2 - 3ac}) + 2\sqrt{3A_2}cz_{n-1}^2(\xi) \pm 3(b + \sqrt{b^2 - 3ac})\big(z'_{n-1}(\xi)\big)^2}, \\
z_0(\xi) = \dfrac{\sqrt{\dfrac{N^2(k^2-1) + M^2}{M^2 + N^2k^2}} + cn(\xi, k)}{Msn(\xi, k) + Ndn(\xi, k)}, \Big(a = \dfrac{1}{4(M^2 + N^2k^2)}, \ b = \dfrac{1}{2} - k^2, \ c = \dfrac{1}{4}(M^2 + N^2k^2)\Big), \\
\xi = -x\displaystyle\int \mu(t)\,\mathrm{d}t - \int [g(t)p(t)\alpha(t) + 4bp^3(t)\beta(t) + p(t)\sigma(t)]\,\mathrm{d}t.
\end{cases} \tag{58}
$$

Bäcklund 变换 (58) 能够确定第二类变系数 KdV 方程的 Jacobi 椭圆函数型无穷序列光滑类孤子解, 其中 M, N 是不全为零的任意常数.

4.1.2 双曲函数型无穷序列光滑类孤子解

双曲函数与三角函数是 Jacobi 椭圆函数的特殊情况. 当 $k=1$ 时, Bäcklund 变换 (58) 确定第二类变系数 KdV 方程的下列双曲函数型无穷序列光滑类孤子解:

$$\begin{cases} u_n(x,t) = -[1+z_n^2(\xi)]\displaystyle\int \nu(t)\,\mathrm{d}t, \quad (n=1,2,\cdots), \\ z_n^2(\xi) = \dfrac{a\big[-\sqrt{3A_2}\mp 9\big(z'_{n-1}(\xi)\big)^2\big]}{\sqrt{3A_2}(b-\sqrt{b^2-3ac})+2\sqrt{3A_2}cz_{n-1}^2(\xi)\pm 3(b+\sqrt{b^2-3ac})\big(z'_{n-1}(\xi)\big)^2}, \\ z_0(\xi) = \dfrac{\sqrt{\dfrac{M^2}{M^2+N^2}}+\operatorname{sech}(\xi)}{M\tanh(\xi)+N\operatorname{sech}(\xi)}, \quad \left(a=\dfrac{1}{4(M^2+N^2)},\ b=-\dfrac{1}{2},\ c=\dfrac{1}{4}(M^2+N^2)\right), \\ \xi = -x\displaystyle\int \mu(t)\,\mathrm{d}t - \int [g(t)p(t)\alpha(t)+4bp^3(t)\beta(t)+p(t)\sigma(t)]\,\mathrm{d}t. \end{cases} \tag{59}$$

其中 M,N 是不全为零的任意常数.

4.1.3 三角函数型无穷序列光滑孤立波解

$k=0$ 时, Bäcklund 变换 (58) 确定第二类变系数 KdV 方程的下列三角函数型无穷序列光滑孤立波解:

$$\begin{cases} u_n(x,t) = -[1+z_n^2(\xi)]\displaystyle\int \nu(t)\,\mathrm{d}t,\ (n=1,2,\cdots), \\ z_n^2(\xi) = \dfrac{a\big[-\sqrt{3A_2}\mp 9\big(z'_{n-1}(\xi)\big)^2\big]}{\sqrt{3A_2}(b-\sqrt{b^2-3ac})+2\sqrt{3A_2}cz_{n-1}^2(\xi)\pm 3(b+\sqrt{b^2-3ac})\big(z'_{n-1}(\xi)\big)^2}, \\ z_0(\xi) = \dfrac{\sqrt{\dfrac{M^2-N^2}{M^2}}+\cos(\xi)}{M\sin(\xi)+N}, \quad \left(a=\dfrac{1}{4M^2},\ b=\dfrac{1}{2},\ c=\dfrac{M^2}{4},\ M^2-N^2>0\right), \\ \xi = -x\displaystyle\int \mu(t)\,\mathrm{d}t - \int [g(t)p(t)\alpha(t)+4bp^3(t)\beta(t)+p(t)\sigma(t)]\,\mathrm{d}t. \end{cases} \tag{60}$$

其中 M,N 是不全为零的任意常数.

4.2 第二类变系数 KdV 方程的无穷序列尖峰孤立子解

4.2.1 双曲函数型无穷序列尖峰孤立波解

把第一种椭圆辅助方程的已知解 (32) 和 Bäcklund 变换 (39) 来确定的无穷序列解, 代入 (57) 式后得到第二类变系数 KdV 方程的如下双曲函数型无穷序列尖峰孤立波解:

$$\begin{cases} u_n(x,t) = -[1+z^2(\xi)]\displaystyle\int \nu(t)\,\mathrm{d}t, \quad (b^2=4ac,\ n=1,2,\cdots), \\ z_n(\xi) = \dfrac{\mathrm{i}b[S+Lz_{n-1}^2(\xi)]}{b\sqrt{SL}\mp \mathrm{i}b\sqrt{\dfrac{(-2Sc+bL)^2}{b^2}}z_{n-1}(\xi)+2c\sqrt{SL}z_{n-1}^2(\xi)}, \quad (SL<0, b^2-4ac=0), \\ z_0(\xi) = \dfrac{\sqrt{-b}\big[1+\exp(\sqrt{-2b}|\xi|)\big]}{\sqrt{2c}\big[1-\exp(\sqrt{-2b}|\xi|)\big]}, (b<0,\ c>0), \\ \xi = -x\displaystyle\int \mu(t)\,\mathrm{d}t - \int [g(t)p(t)\alpha(t)+4bp^3(t)\beta(t)+p(t)\sigma(t)]\,\mathrm{d}t. \end{cases} \tag{61}$$

4.2.2 三角函数型无穷序列尖峰孤立波解

把第一种椭圆辅助方程的已知解 (31) 和 Bäcklund 变换 (39) 确定的无穷序列解, 代入 (57) 式后得到第二类变系数 KdV 方程的如下三角函数型无穷序列尖峰孤立波解:

$$\begin{cases} u_n(x,t) = -[1+z^2(\xi)]\displaystyle\int \nu(t)\,\mathrm{d}t, \quad (b^2=4ac,\ n=1,2,\cdots), \\ z_n(\xi) = \dfrac{\mathrm{i}b[S+Lz_{n-1}^2(\xi)]}{b\sqrt{SL}\mp \mathrm{i}b\sqrt{\dfrac{(-2Sc+bL)^2}{b^2}}z_{n-1}(\xi)+2c\sqrt{SL}z_{n-1}^2(\xi)}, \quad (SL<0, b^2-4ac=0), \\ z_0(\xi) = \dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{2c}}\tan\Big(\dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{2}}|\xi|\Big),\ (b>0,\ c>0), \\ \xi = -x\displaystyle\int \mu(t)\,\mathrm{d}t - \int [g(t)p(t)\alpha(t)+4bp^3(t)\beta(t)+p(t)\sigma(t)]\,\mathrm{d}t. \end{cases} \tag{62}$$

4.2.3 有理函数型无穷序列尖峰孤立波解

把第一种椭圆辅助方程的已知解 (33) 和 Bäcklund 变换 (44) 确定的无穷序列解, 代入 (56) 式后得到第二类变系数 KdV 方程的如下有理函数型无穷序列尖峰孤立波解:

$$\begin{cases} u_n(x,t) = -[1+z^2(\xi)]\displaystyle\int \nu(t)\,\mathrm{d}t,\ (a=b=0,\ n=1,2,\cdots), \\ z_n(\xi) = \dfrac{d[-\sqrt{c}z_{n-1}^2(\xi)+z'_{n-1}(\xi)]}{p+z_{n-1}(\xi)[q+rz_{n-1}(\xi)]+mz'_{n-1}(\xi)},\ (a=b=0,\ n=1,2,\cdots), \\ z_0(\xi) = \dfrac{1}{\sqrt{c}|\xi|}, (a=b=0, c>0), \\ \xi = -x\displaystyle\int \mu(t)\,\mathrm{d}t - \int [g(t)p(t)\alpha(t)+p(t)\sigma(t)]\,\mathrm{d}t. \end{cases} \tag{63}$$

4.3 第二类变系数 KdV 方程的无穷序列紧孤立子解

4.3.1 Jacobi 椭圆函数型无穷序列紧孤立子解

把第一种椭圆辅助方程的已知解 (11)—(14) 和 Bäcklund 变换 (38) 确定的无穷序列解, 分别代入 (54) 式后得到第二类变系数 KdV 方程的下列 Jacobi 椭圆函数型四类无穷序列紧孤立子解:

$$\begin{cases} u_n(x,t) = -[1+z_n^2(\xi)]\displaystyle\int \nu(t)\,\mathrm{d}t, \quad (n=1,2,\cdots), \\ z_n^2(\xi) = \dfrac{a\big[-\sqrt{3A_2}\mp 9\big(z'_{n-1}(\xi)\big)^2\big]}{\sqrt{3A_2}(b-\sqrt{b^2-3ac})+2\sqrt{3A_2}cz_{n-1}^2(\xi)\pm 3(b+\sqrt{b^2-3ac})\big(z'_{n-1}(\xi)\big)^2}, \\ z_0(\xi) = \begin{cases} sn(\xi,k),\ K(k)\leqslant\xi\leqslant 5K(k), \\ 1, \qquad\qquad \text{其他}, \end{cases} (a=1,\ b=-(1+k^2),\ c=k^2), \\ \xi = -x\displaystyle\int \mu(t)\,\mathrm{d}t - \int [g(t)p(t)\alpha(t)+4bp^3(t)\beta(t)+p(t)\sigma(t)]\,\mathrm{d}t; \end{cases} \tag{64}$$

$$\begin{cases} u_n(x,t) = -[1+z_n^2(\xi)]\displaystyle\int \nu(t)\,\mathrm{d}t, \quad (n=1,2,\cdots), \\ z_n^2(\xi) = \dfrac{a\big[-\sqrt{3A_2}\mp 9\big(z'_{n-1}(\xi)\big)^2\big]}{\sqrt{3A_2}(b-\sqrt{b^2-3ac})+2\sqrt{3A_2}cz_{n-1}^2(\xi)\pm 3(b+\sqrt{b^2-3ac})\big(z'_{n-1}(\xi)\big)^2}, \\ z_0(\xi) = \begin{cases} sn(\xi,k),\ -K(k)\leqslant\xi\leqslant 3K(k), \\ -1, \qquad\qquad \text{其他}, \end{cases} (a=1,\ b=-(1+k^2),\ c=k^2), \\ \xi = -x\displaystyle\int \mu(t)\,\mathrm{d}t - \int [g(t)p(t)\alpha(t)+4bp^3(t)\beta(t)+p(t)\sigma(t)]\,\mathrm{d}t; \end{cases} \tag{65}$$

$$\left\{\begin{aligned}
&u_n(x,t)=-[1+z_n^2(\xi)]\int\nu(t)\,\mathrm{d}t,\quad(n=1,2,\cdots),\\
&z_n^2(\xi)=\frac{a\big[-\sqrt{3A_2}\mp9\big(z'_{n-1}(\xi)\big)^2\big]}{\sqrt{3A_2}(b-\sqrt{b^2-3ac})+2\sqrt{3A_2}cz_{n-1}^2(\xi)\pm3(b+\sqrt{b^2-3ac})\big(z'_{n-1}(\xi)\big)^2},\\
&z_0(\xi)=\begin{cases}1,&\xi\leqslant K(k),\\ sn(\xi,k),\ K(k)\leqslant\xi\leqslant3K(k),&(a=1,\ b=-(1+k^2),\ c=k^2),\\ -1,&3K(k)\leqslant\xi,\end{cases}\\
&\xi=-x\int\mu(t)\,\mathrm{d}t-\int[g(t)p(t)\alpha(t)+4bp^3(t)\beta(t)+p(t)\sigma(t)]\,\mathrm{d}t;
\end{aligned}\right.\tag{66}$$

$$\left\{\begin{aligned}
&u_n(x,t)=-[1+z_n^2(\xi)]\int\nu(t)\,\mathrm{d}t,\quad(n=1,2,\cdots),\\
&z_n^2(\xi)=\frac{a\big[-\sqrt{3A_2}\mp9\big(z'_{n-1}(\xi)\big)^2\big]}{\sqrt{3A_2}(b-\sqrt{b^2-3ac})+2\sqrt{3A_2}cz_{n-1}^2(\xi)\pm3(b+\sqrt{b^2-3ac})\big(z'_{n-1}(\xi)\big)^2},\\
&z_0(\xi)=\begin{cases}-1,&\xi\leqslant3K(k),\\ sn(\xi,k),\ 3K(k)\leqslant\xi\leqslant5K(k),&(a=1,\ b=-(1+k^2),\ c=k^2),\\ 1,&5K(k)\leqslant\xi,\end{cases}\\
&\xi=-x\int\mu(t)\,\mathrm{d}t-\int[g(t)p(t)\alpha(t)+4bp^3(t)\beta(t)+p(t)\sigma(t)]\,\mathrm{d}t;
\end{aligned}\right.\tag{67}$$

其中

$$A_2=\sqrt{\frac{1}{16c^2}[128b^3-432abc+2(16b^2-48ac)^{\frac{3}{2}}]}.$$

4.3.2 双曲函数型无穷序列紧孤立子解

把第一种椭圆辅助方程的已知解 (30) 和 Bäcklund 变换 (42) 确定的无穷序列解, 代入 (55) 式后得到第二类变系数 KdV 方程的下列双曲函数型无穷序列紧孤立子解:

$$\left\{\begin{aligned}
&u_n(x,t)=-[1+z_n^2(\xi)]\int\nu(t)\,\mathrm{d}t,(a=0,n=1,2,\cdots),\\
&z_n^2(\xi)=\frac{-2\sqrt{3A_1}cz_{n-1}^2(\xi)\pm6b[z'_{n-1}(\xi)]^2}{c\Big[\sqrt{3A_1}\mp9[z'_{n-1}(\xi)]^2\Big]},\ \left(a=0,\ b>0,\ A_1=4\sqrt{\frac{b^3}{c^2}},\ n=1,2,\cdots\right),\\
&z_0(\xi)=\begin{cases}\Big[\dfrac{b}{c}\operatorname{csch}^2[(b)^{\frac{1}{2}}\xi]\Big]^{\frac{1}{2}},\ (b>0,\ c>0),\\ \pm\sqrt{\dfrac{-b}{c}},\qquad(b>0,\ c>0),\end{cases}\\
&\xi=-x\int\mu(t)\,\mathrm{d}t-\int[g(t)p(t)\alpha(t)+4bp^3(t)\beta(t)+p(t)\sigma(t)]\,\mathrm{d}t.
\end{aligned}\right.\tag{68}$$

4.3.3 三角函数型无穷序列紧孤立子解

把第一种椭圆辅助方程的已知解 (26) 和 Bäcklund 变换 (43) 确定的无穷序列解, 代入 (55) 式后得到第二类变系数 KdV 方程的下列三角函数型无穷序列紧孤立子解:

$$\begin{cases} u_n(x,t) = -[1+z_n^2(\xi)]\displaystyle\int \nu(t)\,\mathrm{d}t,\ (a=0,\ n=1,2,\cdots), \\ z_n^2(\xi) = \dfrac{-8b\sqrt{3A_1}-2\sqrt{3A_1}cz_{n-1}^2(\xi)}{4c\Big[\sqrt{3A_1}\mp 9[z'_{n-1}(\xi)]^2\Big]},\ \left(a=0,\ b<0,\ A_1=4\sqrt{\dfrac{b^3}{c^2}},\ n=1,2,\cdots\right), \\ z_0(\xi) = \begin{cases} \Big[\dfrac{-b}{c}\csc^2[(-b)^{\frac{1}{2}}\xi]\Big]^{\frac{1}{2}},\ (b<0,\ c>0), \\ \pm\sqrt{\dfrac{-b}{c}},\qquad (b<0,\ c>0), \end{cases} \\ \xi = -x\displaystyle\int \mu(t)\,\mathrm{d}t - \int[g(t)p(t)\alpha(t)+4bp^3(t)\beta(t)+p(t)\sigma(t)]\,\mathrm{d}t. \end{cases} \tag{69}$$

5 结 论

1993 年, Camassa 和 Holm 建立了 CH 方程, 并第一次获得了尖峰孤立子解 [13]. 1993 年, Rosenau 和 Hyman 在研究液体滴的变化规律时, 建立了所谓的 $K(m,n)$ 方程, 并发现了紧孤立子解 [14]. 非线性发展方程的尖峰孤立子解和紧孤立子解引起了数学物理学家的极大关注. 到目前为止, 利用多种方法构造了 CH-r 方程、广义 DGH 方程、 Degasperis-Procesi 方程、$B(m,n)$ 方程和 $K(m,n,1)$ 方程等少数非线性发展方程的如下形式的有限多个尖峰孤立子解和紧孤立子解 [15−21]:

$$u(x,t) = c\exp(-\mid\xi\mid) = c\exp(-\mid x-ct\mid); \tag{70}$$

$$u(x,t) = \begin{cases} \dfrac{4\lambda}{3}\cos^2\left(\dfrac{x-\lambda t}{4}\right),\ \left|\dfrac{x-\lambda t}{4}\right| \leqslant \dfrac{\pi}{2}, \\ 0,\qquad \left|\dfrac{x-\lambda t}{4}\right| > \dfrac{\pi}{2}; \end{cases} \tag{71}$$

$$u(x,t) = \begin{cases} \Big[\dfrac{2mv^2}{m+1}\cos^2\left(\dfrac{m-1}{2m}(x-vt)\right)\Big]^{\frac{1}{m-1}},\ \left|\dfrac{(m-1)(x-vt)}{2m}\right| \leqslant \dfrac{\pi}{2}, \\ 0,\qquad \left|\dfrac{(m-1)(x-vt)}{2m}\right| > \dfrac{\pi}{2}; \end{cases} \tag{72}$$

$$u(x,t) = \begin{cases} \Big[\dfrac{2mv^2}{m+1}\sin^2\left(\dfrac{m-1}{2m}(x-vt)\right)\Big]^{\frac{1}{m-1}},\ \left|\dfrac{(m-1)(x-vt)}{2m}\right| \leqslant \dfrac{\pi}{2}, \\ 0,\qquad \left|\dfrac{(m-1)(x-vt)}{2m}\right| > \dfrac{\pi}{2}; \end{cases} \tag{73}$$

$$u(x,t) = \begin{cases} \dfrac{16D-1}{12}\sin^2\left(\dfrac{1}{4}(x-Dt)\right),\ 2n\pi \leqslant \dfrac{1}{4}(x-Dt) \leqslant (2n+1)\pi, \\ 0,\qquad \text{其他}. \end{cases} \tag{74}$$

1973 年以来, 在构造非线性发展方程精确解领域提出了多种求解方法. 包括辅助方程法、双曲正切函数展开法和齐次平衡法等. 这些方法已经获得了许多研究成果 [22−42]. 总体来讲这些成果有如下特点: 1) 在构造非线性发展方程精确解领域, 获得了 CH-r 方程和 $K(m,n)$ 方程等少数非线性发展方程的有限多个尖峰孤立子解和紧孤立子解, 其他多数非线性发展方程中没有发现此类精确解; 2) 辅助方程法只获得了非线性发展方程的有限多个光滑孤立子精确解, 未能获得无穷序列精确解.

非线性发展方程的尖峰孤立波解和紧孤立子解是光滑孤立子解的特殊情况. 因此, 本文挖掘辅助方程法的构造性和机械化性两大特点, 进一步研究了第一种椭圆辅助方程, 获得了该方程的一些新解和相应的 Bäcklund 变换. 在符号计算系统 Mathematica 的帮助下, 以第二类变系数 KdV 方程为应用实例, 构造了无穷序列光滑孤立子解、无穷序列紧孤立子解和无穷序列尖峰孤立子解.

[1] Liu S K, Fu Z T, Liu S D, Zhao Q 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 1923 (in Chinese) [刘式适, 付遵涛, 刘式达, 赵强 2002 物理学报 **51** 1923]
[2] Li D S, Zhang H Q 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 1569 (in Chinese) [李德生, 张鸿庆 2003 物理学报 **52** 1569]
[3] Zhang J F, Chen F Y 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 1648 (in Chinese) [张解放, 陈芳跃 2001 物理学报 **50** 1648]
[4] Zhu J M, Zheng C L, Ma Z Y 2004 *Chin. Phys.* **13** 2008
[5] Lou S Y, Ruan H Y 1992 *Acta Phys. Sin.* **41** 182 (in Chinese) [楼森岳, 阮航宇 1992 物理学报 **41** 182]
[6] Chan W L, Li K S 1989*J. Math. Phys.* **30** 2521
[7] Tian C 1987 *J. Phys.* A: *Math. Gen.* **20** 359
[8] Zhang J L, Ren D F, Wang M L, Wang Y M, Fang Z D 2003 *Chin. Phys.* **12** 825
[9] Zhang L, Zhang L F, Li C Y 2008 *Chin. Phys.* B **17** 403
[10] Zhao X Q, Zhi H Y, Zhang H Q 2006 *Chin. Phys.* **15** 2202
[11] Wu H Y, Zhang L, Tan Y K, Zhou X T 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 3312 (in Chinese) [吴海燕, 张亮, 谭言科, 周小滔 2008 物理学报 **57** 3312]
[12] Taogetusang, Sirendaoerji 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 4413 (in Chinese) [套格图桑, 斯仁道尔吉 2010 物理学报 **59** 4413]
[13] Camassa R, Holm D D 1993 *Phys. Rev. Lett.* **71** 1661
[14] Rosenau P, Hyman J M 1993 *Phys. Rev. Lett.* **70** 564
[15] Dullin H R, Gottwald G A, Holm D D 2002 *Phys. Rev. Lett.* **87** 4501
[16] Guo B L, Liu Z R 2003 *Science in China* A **33** 325 (in Chinese) [郭柏灵, 刘正荣 2003 中国科学 A **33** 325]
[17] Yin J L, Tian L X 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 3632 (in Chinese) [殷久利, 田立新 2009 物理学报 **58** 3632]
[18] Yu L Q, Tian L X 2006 *Math. Practice. Theory* **36** 261 (in Chinese) [余丽琴, 田立新 2006 数学的实践与认识 **36** 261]
[19] Yu L Q, Tian L X 2005 *Pure. Appl. Math* **21** 310 (in Chinese) [余丽琴, 田立新 2005 纯粹数学与应用数学 **21** 310]
[20] Yan Z Y 2002 *Chaos, Solitons and Fractals* **14** 1151
[21] Yin J L, Tian L X 2007 *Acta Math. Phys.* **27A** 027 (in Chinese) [殷久利, 田立新 2007 数学物理学报 **27A** 027]
[22] Fan E G 2000 *Phys. Lett.* A **277** 212
[23] Chen Y, Li B, Zhang H Q 2003 *Chin. Phys.* **12** 940
[24] Chen Y, Yan Z Y, Li B, Zhang H Q 2003 *Chin. Phys.* **12** 1
[25] Chen Y, Li B, Zhang H Q 2003 *Commun. Theor. Phys.* (Beijing) **40** 137
[26] Li D S, Zhang H Q 2003 *Commun. Theor. Phys.* (Beijing) **40** 143
[27] Li D S, Zhang H Q 2004 *Chin. Phys.* **13** 984
[28] Li D S, Zhang H Q 2004 *Chin. Phys.* **13** 1377
[29] Chen H T, Zhang H Q 2004 *Commun. Theor. Phys.* (Beijing) **42** 497
[30] Xie F D, Chen J, Lü Z S 2005 *Commun. Theor. Phys.* (Beijing) **43** 585
[31] Xie F D, Yuan Z T 2005 *Commun. Theor. Phys.* (Beijing) **43** 39
[32] Zhen X D, Chen Y, Li B, Zhang H Q 2003 *Commun. Theor. Phys.* (Beijing) **39** 647
[33] LÜ Z S, Zhang H Q 2003 *Commun. Theor. Phys.* (Beijing) **39** 405
[34] Xie F D, Gao X S 2004 *Commun. Theor. Phys.* (Beijing) **41** 353
[35] Chen Y, Li B 2004 *Commun. Theor. Phys.* (Beijing) **41** 1
[36] Ma S H, Fang J P, Zhu H P 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 4319 (in Chinese) [马松华, 方建平, 朱海平 2007 物理学报 **56** 4319]
[37] Ma S H, Wu X H, Fang J P, Zheng C L 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 11 (in Chinese) [马松华, 吴小红, 方建平, 郑春龙 2008 物理学报 **57** 11]
[38] Pan Z H, Ma S H, Fang J P 2010 *Chin. Phys.* B **19** 100301(1)
[39] Qiang J Y, Ma S H, Fang J P 2010 *Chin. Phys.* B **19** 090305(1)
[40] Taogetusang, Sirendaoerji, Li S M 2010 *Chin. Phys.* B **19** 080303(1)
[41] Taogetusang, Sirendaoerji, Wang Q P 2009 *Acta Sci. J. Nat. Univ. NeiMongol* **38** 387 (in Chinese) [套格图桑, 斯仁道尔吉, 王庆鹏 2009 内蒙古师范大学学报 **38** 387]
[42] Taogetusang, Sirendaoerji 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 5194 (in Chinese) [套格图桑, 斯仁道尔吉 2010 物理学报 **59** 5194]

New type infinite sequence exact solutions of the second KdV equation with variable coefficients*

Taogetusang[1)2)†] Bai Yu-Mei[1)]

1) (*The College of Mathematical, Inner Mongolia University for Nationalities, Tongliao* 028043*, China*)

2) (*The College of Mathematical Science, Inner Mongolia Normal University, Huhhot* 010022*, China*)

(Received 24 May 2011; revised manuscript received 12 July 2011)

Abstract

To construct a number of new infinite sequence exact solutions of nonlinear evolution equations and to study the two characteristics of constructivity and mechanicalness of the first kind of elliptic equation, new types of solutions and the corresponding Bäcklund transformation of the equation are presented. Then the second kind of KdV equation with variable coefficients is chosen as a practical example and three kinds of new infinite sequence exact solutions are obtained with the help of symbolic computation system Mathematica, where are included the smooth soliton-like solutions, the infinite sequence peak soliton solutions, and the infinite sequence compact soliton solutions. The method can be used to search for new infinite sequence exact solutions of other nonlinear evolution equations with variable coefficients.

Keywords: the first kind of elliptic equation, Bäcklund transformation, nonlinear evolution equation with variable coefficients, new infinite sequence exact solutions

PACS: 02.30.Ik, 02.30.Jr

∗ Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 10862003), the Science Research Foundation of Institution of Higher Education of Inner Mongolia Autonomous Region, China (Grant No. NJZZ07031), and the Natural Science Foundation of Inner Mongolia Autonomous Region, China (Grant No. 2010MS0111).

† E-mail: tgts@imnu.edu.cn