

## 量子势阱粒子群优化算法的改进研究\*

李盼池<sup>1)2)†</sup> 王海英<sup>2)</sup> 宋考平<sup>1)</sup> 杨二龙<sup>1)</sup>

1) (东北石油大学石油与天然气工程博士后流动站, 大庆 163318)

2) (东北石油大学计算机与信息技术学院, 大庆 163318)

(2011年5月23日收到; 2011年7月3日收到修改稿)

为提高量子势阱粒子群优化算法的优化能力,通过分析目前量子势阱粒子群优化算法的设计过程,提出了改进的量子势阱粒子群优化算法.首先,分别基于 Delta 势阱、谐振子和方势阱提出了改进的量子势阱粒子群优化算法,并提出了基于统计量均值的控制参数设计方法.然后,在势阱中心的设计方面,为强调全局最优粒子的指导作用,提出了基于自身最优粒子加权平均和动态随机变量的两种设计策略.实验结果表明,三种势阱粒子群优化算法性能比较接近,都优于原算法,且 Delta 势阱模型略优于其他两种.

**关键词:** 量子计算, 量子势阱, 粒子群优化, 算法设计

**PACS:** 03.65.-w

## 1 引言

粒子群优化算法 (PSO) 是由 Eberhart 博士和 Kennedy 博士于 1995 年提出的一种新的全局优化算法<sup>[1]</sup>.作为一种重要的优化工具, PSO 已成功应用于组合优化<sup>[2]</sup>和数值优化<sup>[3]</sup>.关于 PSO 性能的改进,目前主要有以下几种策略:一是基于算法参数的选择<sup>[4]</sup>;二是基于粒子位置及速度的更新规则<sup>[5]</sup>;三是与其他算法的融合<sup>[6,7]</sup>.这些改进使 PSO 性能均有不同程度的提高.量子计算是一门新兴的计算技术,其与智能计算的融合有着广阔的应用前景.目前量子粒子群优化 (QPSO) 虽然也已获得一些成功的应用<sup>[8-14]</sup>,但有关 QPSO 的理论研究成果相对较少<sup>[15-18]</sup>.QPSO 的基本原理是通过模拟量子力学中粒子在势场中向势能最低点的移动建立搜索机理,即将粒子寻优空间看作量子力学中的势场(势阱),将全局最优解看作势场中势能最低点(势阱中心),将粒子的寻优过程看作势场中粒子向势能最低点的移动过程.由于不同势阱中,对粒子概率密度函数积分的复杂度不同,有些概率密度函数甚至没有原函数,只能采用数值方法.因此,目前 QPSO 在对势阱的选择上,几乎均采用 Delta 势阱,而对其他势阱研究很少,另外势阱

中心的构造方法也较为单一.针对以上问题,本文基于 Delta 势阱、谐振子和方势阱这三种势场,通过合理设置势阱中心分别建立了 QDPSO, QOPSO, QSPSO 模型.实验结果表明,三种模型比较接近,都优于原算法,且 QDPSO 略优于 QSPSO 和 QOPSO.

## 2 量子势阱 PSO 模型

## 2.1 基本 PSO 模型

设在  $n$  维空间中的  $M$  个粒子组成一个种群.其中,第  $i$  个粒子位置  $X_i$ 、速度  $V_i$ 、自身搜索到的最优位置  $P_i^L$ 、整个种群搜索到的最优位置  $P_g$  分别记为:  $X_i = (x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{in})$ ,  $V_i = (v_{i1}, v_{i2}, \dots, v_{in})$ ,  $P_i^L = (p_{i1}, p_{i2}, \dots, p_{in})$ ,  $P_g = (p_{g1}, p_{g2}, \dots, p_{gn})$ .将  $X_i$  代入目标函数可计算其适应值.粒子状态更新策略为

$$V_i(t+1) = wV_i(t) + c_1r_1(P_i^L - X_i(t)) + c_2r_2(P_g - X_i(t)), \quad (1)$$

$$X_i(t+1) = X_i(t) + V_i(t+1), \quad (2)$$

其中  $i = 1, 2, \dots, M$ ;  $w$  为惯性因子;  $c_1$  为自身因子;  $c_2$  为全局因子;  $r_1, r_2$  是  $(0, 1)$  之间随机数.对种群中每个粒子应用 (1) 和 (2) 两式循环迭代,可使

\* 国家自然科学基金 (批准号: 61170132)、中国博士后科学基金 (批准号: 20090460864, 201003405)、黑龙江省博士后科学基金 (批准号: LBH-Z09289) 和黑龙江省教育厅科学基金 (批准号: 11551015) 资助的课题.

† E-mail: lipanchi@vip.sina.com

整个种群逐步逼近全局最优解. 为便于叙述, 将 (1) 式重写为如下形式 [18]:

$$V_i(t+1) = wV_i(t) + [\Phi](P_i - X_i(t)), \quad (3)$$

其中

$$P_i = \text{diag} \left( \frac{c_1 r_1^1}{c_1 r_1^1 + c_2 r_1^2}, \dots, \frac{c_1 r_n^1}{c_1 r_n^1 + c_2 r_n^2} \right) P_i^L + \text{diag} \left( \frac{c_2 r_1^2}{c_1 r_1^1 + c_2 r_1^2}, \dots, \frac{c_2 r_n^2}{c_1 r_n^1 + c_2 r_n^2} \right) P_g, \quad (4)$$

$$[\Phi] = \text{diag}(c_1 r_1^1 + c_2 r_1^2, \dots, c_1 r_n^1 + c_2 r_n^2). \quad (5)$$

文献 [19] 指出, 为使 PSO 收敛, 所有粒子必须逼近 (4) 式定义的  $P_i$ .

## 2.2 量子势阱 PSO 模型

在量子力学里, 粒子动态行为一般用如下薛定谔方程描述:

$$j\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(r, t) = \left( -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(r) \right) \Psi(r, t), \quad (6)$$

其中  $\hbar$  为普朗克常数,  $m$  为粒子质量,  $V(r)$  为势场能量分布函数. 在薛定谔方程中, 未知量是波函数  $\Psi(r, t)$ , 根据波函数的统计诠释, 该函数幅度的平方为粒子出现的概率密度.

QPSO 的设计思想为, 首先选择某种不显含时间  $t$  的势阱  $V(r)$ ; 然后通过求解 (6) 式的薛定谔方程得到变量分离形式的波函数  $\Psi(r)$ , 进而得到粒子在势场中出现的概率密度函数  $|\Psi(r)|^2$ ; 最后通过将势阱中心设置为 (4) 式定义的最优解, 并合理设计势阱参数, 可使粒子以大概率逼近 (4) 式定义的位置. 下面以 Delta 势阱为例说明 QPSO 的构造过程.

Delta 势阱的势能分布可表示为

$$V(r) = -\gamma \delta(r), \quad (7)$$

其中  $\gamma$  为势阱深度. 将 (7) 式代入 (6) 式, 解出粒子波函数为

$$\Psi(r) = \frac{1}{\sqrt{L}} e^{-|r|/L}, \quad (8)$$

其中  $L = \frac{\hbar^2}{m\gamma}$  为 Delta 势阱的特征长度. 粒子在  $r$  处出现的概率密度函数为

$$Q(r) = |\Psi(r)|^2 = \frac{1}{L} e^{-2|r|/L}, \quad (9)$$

为使当前在  $r$  处的粒子下次移动时以较大概率向势阱中心靠近, (9) 式需满足如下关系:

$$\int_{-|r|}^{|r|} Q(r) dr > 0.5, \quad (10)$$

由 (9) 和 (10) 式可得特征长度  $L$  必须满足

$$L = \frac{|r|}{g \ln(\sqrt{2})}, \quad (11)$$

其中  $g$  为控制参数,  $g > 1$ .

在势阱中的粒子动态行为服从薛定谔方程, 在任一确定时刻, 其位置是不确定的, 而普通 PSO 中的粒子服从牛顿力学, 在任一确定时刻, 必须具有确定的位置. 这个矛盾可以借助波函数的坍缩得以圆满解决. 具体可采用蒙特卡洛方法. 首先在 (0,1) 内取随机数  $u$ , 然后令  $u = e^{-2|r|/L}$ , 最后解出

$$|r| = \frac{L}{2} \ln(1/u), \quad (12)$$

由 (11) 和 (12) 式可得

$$|r_{k+1}| = \frac{\ln(1/u)}{2g \ln \sqrt{2}} |r_k|, \quad (13)$$

令  $r_k = x_k - P$  得

$$x_{k+1} = P \pm \frac{\ln(1/u)}{2g \ln \sqrt{2}} |x_k - P|, \quad (14)$$

令  $\alpha = \frac{1}{2g \ln \sqrt{2}}$ , 得

$$x_{k+1} = P \pm \alpha |x_k - P| \ln(1/u). \quad (15)$$

上式即为 QDPSO 的迭代方程 [18].

## 3 量子势阱 PSO 改进

关于 QDPSO 模型, 前面已导出, 如 (15) 式所示, 这里重点研究其他两种 QPSO 模型的设计方法.

### 3.1 QOPSO 模型

一维谐振子的势能分布可表示为

$$V(r) = \frac{1}{2} K r^2, \quad (16)$$

其中  $K$  是刻画简谐作用力强弱的参数. 将上式代入 (6) 式, 通过解薛定谔方程可得粒子在  $r$  处出现的概率密度函数为 [18]

$$Q(r) = \frac{\alpha}{\sqrt{\pi}} e^{-\alpha^2 r^2}, \quad (17)$$

为使当前在  $r$  处的粒子下次移动时以较大概率向势阱中心靠近, (17) 式需满足如下关系:

$$\int_{-|r|}^{|r|} Q(r) dr = 2\Phi(\sqrt{2}\alpha|r|) - 1 > 0.5, \quad (18)$$

其中  $\Phi(r) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^r e^{-t^2/2} dt$  为概率积分函数.

由于被积函数  $Q(r)$  没有原函数, 故 (18) 式不存在解析解. 在文献 [16] 和 [17] 中, 均直接由  $\Phi(\sqrt{2}\alpha|r|) > 0.75$  得出  $\sqrt{2}\alpha|r| > 0.75$ , 这显

然是不正确的. 我们通过数值积分方法获得的结果是:

$$\sqrt{2}\alpha|r| > 0.67448975019609, \quad (19)$$

$$\alpha = g \frac{0.47693627620448}{|r|}, \quad (20)$$

其中  $g > 1$ .

在  $(0,1)$  内取随机数  $u$ , 令  $u = e^{-\alpha^2 r^2}$ , 最后解出

$$|r| = \frac{1}{\alpha} \sqrt{\ln(1/u)}, \quad (21)$$

由 (20) 和 (21) 式可得

$$|r_{k+1}| = \frac{\sqrt{\ln(1/u)}}{0.47693627620448g} |r_k|, \quad (22)$$

令  $r_k = x_k - P$  得

$$x_{k+1} = P \pm \frac{\sqrt{\ln(1/u)}}{0.47693627620448g} |x_k - P|. \quad (23)$$

上式即为 QPSO 的迭代方程.

### 3.2 QPSO 模型

方势阱的势能分布可表示为

$$V(r) = \begin{cases} 0 & |r| \leq W/2, \\ V_0 & |r| > W/2, \end{cases} \quad (24)$$

其中  $W$  为势阱宽度,  $V_0$  为势阱高度. 粒子在  $r$  处出现的概率密度函数为<sup>[18]</sup>

$$Q(r) = \begin{cases} \frac{a}{W} \cos^2\left(\frac{\xi}{W}r\right) & |r| \leq \frac{W}{2}, \\ \frac{b}{W} e^{-\frac{\eta}{W}r} & r > \frac{W}{2}, \\ \frac{b}{W} e^{\frac{\eta}{W}r} & r < -\frac{W}{2}, \end{cases} \quad (25)$$

其中  $a, b, \xi, \eta$  为待定常数.

(24) 式含有多个束缚态, 构造 QPSO 时只需考虑能量最小的束缚态 (基态), 根据量子力学理论, 此时  $\xi < \pi$ , 为简便我们取  $\xi = 1$ . 根据波函数及其导数在  $r = \pm W/2$  处的连续性, (25) 式可重写为:

$$Q(r) = \begin{cases} \frac{a}{W} \cos^2\left(\frac{1}{W}r\right) & |r| \leq \frac{W}{2}, \\ \frac{a}{W} \cos^2\left(\frac{1}{2}\right) e^{\tan(\frac{1}{2}) - \frac{2}{W} \tan(\frac{1}{2})r} & r > \frac{W}{2}, \\ \frac{a}{W} \cos^2\left(\frac{1}{2}\right) e^{\tan(\frac{1}{2}) + \frac{2}{W} \tan(\frac{1}{2})r} & r < -\frac{W}{2}, \end{cases} \quad (26)$$

由  $\int_{-\infty}^{\infty} Q(r)dr = 1$  得,  $a = 0.42909473012164$ .

由  $\int_{-|r|}^{|r|} Q(r)dr > 0.5$  得

$$W = \frac{1.48293382351325}{g} |r|, \quad (27)$$

其中  $g > 1$ .

在  $(0, 1)$  内取随机数  $u$ , 令  $u = \cos^2\left(\frac{1}{W}r\right)$ , 最后解出

$$|r| = W \arccos(\sqrt{u}), \quad (28)$$

由 (27) 和 (28) 式可得

$$|r_{k+1}| = \frac{1.48293382351325 \cos^{-1}(\sqrt{u})}{g} |r_k|, \quad (29)$$

令  $r_k = x_k - P$  得

$$x_{k+1} = P \pm \frac{1.48293382351325 \cos^{-1}(\sqrt{u})}{g} |x_k - P|. \quad (30)$$

上式即为 QPSO 的迭代方程.

### 3.3 三种 QPSO 的控制参数设计

从三种 QPSO 的构造方法可知, 其收敛具有随机性, 通过合理设计控制参数, 可增大收敛概率. 本文提出一种基于随机变量均值的控制参数设计方法. 在三种 QPSO 迭代式中, 随机变量的取值情况如图 1 所示.

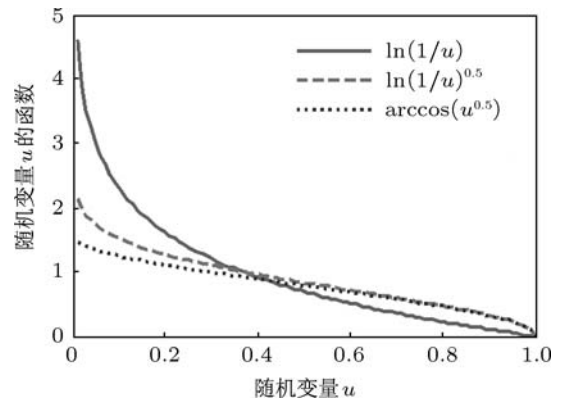


图 1 三种 QPSO 中随机变量的取值

从图 1 可知, 在  $0 < u < 0.5$  时, 随机变量的三种函数值均大于 1, 从三种 QPSO 的迭代式可知, 此时其作用是使粒子偏离势阱中心. 为削弱这种作用, 我们需要研究控制参数  $g$  的合理取值. 下面首先给出随机变量序列收敛的定义和 QPSO 一阶收敛定理. 定义: 若随机变量序列  $X_n$  满足

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E[|X_n - X|^k] = 0 \quad k > 0, \quad (31)$$

则称该序列  $k$  阶收敛于  $X$  [20]. 其中  $E(X)$  为随机变量  $X$  的数学期望.

**定理** 令 QPSO 迭代式为

$$x_{k+1} = P \pm \frac{\beta}{g} |x_k - P|, \quad (32)$$

其中  $\beta$  为随机变量,  $g$  为常数. 则当  $g$  大于  $\beta$  的数学期望时, QPSO 一阶收敛于  $P$ .

**证明**  $|x_{k+1} - P| = \frac{\beta}{g} |x_k - P| < \frac{\beta}{E[\beta]} |x_k - P|$ .

令  $\chi_k = \beta/g$ , 则  $\chi_k$  为独立同分布的随机变量, 且  $E[\chi_k] < E\left[\frac{\beta}{E[\beta]}\right] = 1$ .

$$\begin{aligned} |x_{k+1} - P| &= \chi_k |x_k - P| \\ &= \prod_{i=1}^k \chi_i |x_1 - P|, \end{aligned}$$

$$E[|x_{k+1} - P|] = \prod_{i=1}^k E[\chi_i |x_1 - P|],$$

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} E[|x_{k+1} - P|] \\ = |x_1 - P| \lim_{k \rightarrow \infty} \prod_{i=1}^k E[\chi_i] = 0. \end{aligned}$$

故 QPSO 一阶收敛于  $P$ .

根据上述定理, 三种 QPSO 的迭代式可做如下简化.

#### 1) QDPSO

$$g = \lambda E\left[\frac{\ln(1/u)}{2 \ln \sqrt{2}}\right], \quad (33)$$

其中  $\lambda > 1$ . 此时满足 (14) 式中  $g > 1$  的条件. 代入 (14) 式得

$$x_{k+1} = P \pm \frac{\ln(1/u)}{\lambda E[\ln(1/u)]} |x_k - P|. \quad (34)$$

#### 2) QOPSO

$$g = \lambda E\left[\frac{\sqrt{\ln(1/u)}}{0.47693627620448}\right], \quad (35)$$

其中  $\lambda > 1$ . 此时满足 (23) 式中  $g > 1$  的条件. 代入 (23) 式得

$$x_{k+1} = P \pm \frac{\sqrt{\ln(1/u)}}{\lambda E[\sqrt{\ln(1/u)}]} |x_k - P|. \quad (36)$$

#### 3) QSPSO

$$g = \lambda E[1.48293382351325 \cos^{-1}(\sqrt{u})], \quad (37)$$

其中  $\lambda > 1$ . 此时满足 (30) 式中  $g > 1$  的条件. 代入 (30) 式得

$$x_{k+1} = P \pm \frac{\cos^{-1}(\sqrt{u})}{\lambda E[\cos^{-1}(\sqrt{u})]} |x_k - P|. \quad (38)$$

以上三种模型均只有一个控制参数  $\lambda$ , 且其取值均为  $\lambda > 1$ .

### 3.4 三种 QPSO 的势阱中心设计

文献 [19] 指出, PSO 中每个粒子都将收敛于自身最优和全局最优的随机加权平均值. 所以在 QPSO 中, 势阱中心通常按 (4) 式定义的位置设置. 文献 [15] 对此做了改进, 采用了如下迭代式:

$$x_{k+1} = P_{k+1} \pm \alpha \ln(1/u) |x_k - P_k|, \quad (39)$$

并将  $P_k$  设置为所有  $M$  个粒子自身最优位置的算术平均值,

$$P_k = \frac{1}{M} \left( \sum_{i=1}^M p_{i1}^L, \sum_{i=1}^M p_{i2}^L, \dots, \sum_{i=1}^M p_{in}^L \right), \quad (40)$$

而将  $P_{k+1}$  设置为该粒子自身最优和全局最优的等幅度随机加权平均值,

$$P_{k+1,i} = r p_i^L + (1-r) P_g, \quad (41)$$

其中  $i = 1, 2, \dots, M$ ,  $r$  为 (0,1) 之间均匀分布的随机数.

在 QPSO 迭代过程中, 粒子的收敛过程其实就是由最初的随机位置向着全局最优位置逐步逼近的过程. 在这一过程中全局最优位置作为优化路标, 起着越来越重要的作用. 因此在算法设计中应予以关注. 基于这种理念, 本文在 (40) 和 (41) 式的基础上, 提出如下势阱中心设计方法. 令 QPSO 迭代式为

$$x_{k+1} = P_{k+1} \pm \frac{\beta}{\lambda E[\beta]} |x_k - P_k|, \quad (42)$$

其中  $\beta$  为  $\ln(1/u)$ ,  $\sqrt{\ln(1/u)}$ ,  $\cos^{-1}(\sqrt{u})$  三者之一,  $u$  为 (0, 1) 之间均匀分布的随机数.

#### 1) $P_k$ 的设计方法

首先将所有  $M$  个自身最优粒子按适应值排序, 然后按从低到高权重线性增加的原则取加权平均值, 其中权重递增的幅度随优化代数逐渐加大. 如 (43) 式所示:

$$P_k = \sum_{i=1}^M \tilde{P}_i^L w_i / \sum_{i=1}^M w_i, \quad (43)$$

其中  $\tilde{P}_i^L$  是各  $P_i^L$  按适应值从低到高排序后的第  $i$  个值,  $w_i = 1 + \frac{c \times k(i-1)}{G(M-1)}$ ,  $c$  是加权常数,  $k$  是当前代数,  $G$  是限定代数.

由 (43) 式可知, 每一代构造  $P_k$  时, 各个  $\tilde{P}_i^L$  的权重随适应值逐渐加大, 其加大的幅度又随代数递增. 当  $k = G$  时, 各个  $\tilde{P}_i^L$  的加权最小为 1, 最大为  $1 + c$ .

#### 2) $P_{k+1}$ 的设计方法

本文采用改变随机变量均值的方法, 如 (44) 式所示:

$$P_{k+1,i} = r^{(1+k/G)} P_i^L + (1 - r^{(1+k/G)}) P_i^g, \quad (44)$$

其中  $k$  为当前代数,  $i = 1, 2, \dots, M$ ,  $M$  为粒子总数,  $r$  为 (0,1) 之间均匀分布的随机数.

根据 (44) 式, 当  $k = 1$  时, 随机变量  $r^{(1+k/G)} \approx r$  均值为 1/2, 此时,  $1 - r^{(1+k/G)}$  均值也为 1/2; 而当  $k = G$  时, 随机变量  $r^{(1+k/G)} \approx r^2$  的均值为 1/3, 而  $1 - r^{(1+k/G)}$  均值为 2/3. 因此, 该设计体现了随迭代步数增加使中心倾向全局最优解的设计思想.

## 4 对比实验

### 4.1 函数极值优化

采用如下 4 个标准测试函数验证本文提出算法的性能.

#### 1) Rosenbrock 函数

$$f_1(x) = \sum_{i=1}^{n-1} [100(x_i^2 - x_{i+1})^2 + (x_i - 1)^2], \quad (45)$$

其中  $x_i \in [-30, 30]$ , 全局极小值为 0, 全局极小值点为  $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 1$ .

#### 2) Rastrigin 函数

$$f_2(x) = 10n + \sum_{i=1}^n (x_i^2 - 10 \cos(2\pi x_i)), \quad (46)$$

其中  $x_i \in [-5.12, 5.12]$ , 全局极小值为 0, 全局极小值点为  $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$ .

### 3) Griewank 函数

$$f_3(x) = \sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{4000} - \prod_{i=1}^n \cos\left(\frac{x_i}{\sqrt{i}}\right) + 1, \quad (47)$$

其中  $x_i \in [-600, 600]$ , 全局极小值为 0, 全局极小值点为  $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$ .

### 4) Ackley 函数

$$f_4(x) = 20 + e - 20e^{-\frac{1}{5} \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2}} - e^{-\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \cos(2\pi x_i)}, \quad (48)$$

其中  $x_i \in [-32, 32]$ , 全局极小值为 0, 全局极小值点为  $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$ .

参数设置: 将 4 个测试函数的维数分别取 10 和 20 维, 当维数  $n = 10$  时, 三种 QPSO 的粒子数均为 20, 优化代数均为 1000; 当维数  $n = 20$  时, 三种 QPSO 的粒子数均为 40, 优化代数均为 1500. 每种 QPSO 的势阱中心分别采用文献 [15] 的方法和本文提出的方法设置, 加权常数为  $c = 0.1$ .

实验方案: 首先考察控制参数取定值时的性能, 将控制参数分别取  $\lambda = 1.0, 1.1, 1.2, 1.3, 1.4, 1.5$ ; 其次考察控制参数线性增加时的性能, 将控制参数分别取  $\lambda = 1.0-1.5, 1.1-1.4, 1.2-1.3$ . 为增强实验结果的客观性, 对于控制参数  $\lambda$  的每种取值, 分别用三种 QPSO 仿真 100 次, 并取平均值作为评价指标. 实验结果对比如表 1 至 6 所示.

表 1 Rosenbrock 函数优化结果对比

模型	维数	中心	控制参数					
			1.0	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5
QDPSO	10	文献 [15]	51.6862	26.9915	<b>15.5604</b>	24.7594	46.5828	70.4754
		本文	34.3592	10.3503	<b>8.7701</b>	19.5973	41.7595	70.1695
	20	文献 [15]	2429.1248	81.8350	36.3886	<b>27.3472</b>	39.9205	89.6087
		本文	628.7611	62.3965	26.5236	<b>23.0711</b>	38.9492	88.8078
QOPSO	10	文献 [15]	$1.9007 \times 10^4$	21.7298	<b>9.5039</b>	21.3723	185.4785	348.1803
		本文	$1.3646 \times 10^4$	21.4025	<b>7.3363</b>	18.6733	155.1081	336.3298
	20	文献 [15]	$9.1703 \times 10^7$	1311.5813	<b>29.6708</b>	32.3945	93.7130	422.2273
		本文	$8.2835 \times 10^7$	616.9282	<b>28.8569</b>	31.3654	88.9727	413.6087
QSPSO	10	文献 [15]	$1.3946 \times 10^5$	26.7527	<b>7.3769</b>	36.5072	106.5319	321.1751
		本文	$1.3670 \times 10^5$	18.3213	<b>6.8529</b>	29.1107	97.1049	301.0975
	20	文献 [15]	$1.0817 \times 10^8$	4323.8658	<b>30.8985</b>	36.8875	146.0346	817.8263
		本文	$1.0817 \times 10^8$	1112.7402	<b>24.3671</b>	35.0443	138.5114	808.2517

表 2 Rastrigin 函数优化结果对比

模型	维数	中心	控制参数					
			1.0	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5
QDPSO	10	文献 [15]	22.2159	10.3195	5.9185	<b>4.9091</b>	5.3922	7.5132
		本文	17.5283	6.6327	<b>3.9110</b>	4.7898	4.9941	6.9050
	20	文献 [15]	116.0693	74.3160	36.6467	12.5456	<b>12.4128</b>	15.7205
		本文	101.6805	53.9767	18.6451	<b>10.7863</b>	12.4071	15.6507
QOPSO	10	文献 [15]	53.5352	24.0892	8.8105	<b>5.3481</b>	6.5571	8.7614
		本文	51.5285	23.7785	<b>5.0996</b>	5.1247	6.2401	8.5549
	20	文献 [15]	249.5879	111.2439	50.4360	<b>11.8855</b>	16.0790	19.7379
		本文	245.7703	106.2888	28.7446	<b>11.1882</b>	15.4026	19.6934
QSPSO	10	文献 [15]	62.2553	27.3425	8.7037	<b>5.2291</b>	7.5835	9.2785
		本文	60.3088	26.0604	5.5834	<b>5.1144</b>	7.5240	8.7985
	20	文献 [15]	257.8466	117.1013	48.0251	<b>11.3187</b>	16.0502	20.8841
		本文	257.8356	115.3643	31.1710	<b>11.2530</b>	15.9318	20.7246

表 3 Griewank 函数优化结果对比

模型	维数	中心	控制参数					
			1.0	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5
QDPSO	10	文献 [15]	0.4213	0.2429	0.1125	<b>0.0635</b>	0.0725	0.1003
		本文	0.3635	0.2147	0.0852	<b>0.0620</b>	0.0708	0.0970
	20	文献 [15]	0.6873	0.2733	0.0346	<b>0.0180</b>	0.0185	0.0276
		本文	0.5710	0.1068	0.0258	<b>0.0158</b>	0.0178	0.0274
QOPSO	10	文献 [15]	0.9256	0.4660	0.1471	<b>0.0716</b>	0.0945	0.1804
		本文	0.8634	0.4354	0.1028	<b>0.0570</b>	0.0896	0.1779
	20	文献 [15]	223.2464	0.5713	0.0352	<b>0.0199</b>	0.0398	0.8520
		本文	213.3349	0.5095	0.0185	<b>0.0171</b>	0.0333	0.8417
QSPSO	10	文献 [15]	1.6626	0.5074	0.1818	<b>0.0630</b>	0.1033	0.3282
		本文	1.3475	0.4702	0.1183	<b>0.0607</b>	0.0901	0.2926
	20	文献 [15]	282.2340	0.6242	0.0334	<b>0.0160</b>	0.1051	1.0183
		本文	279.0063	0.5319	0.0190	<b>0.0153</b>	0.1024	1.1634

表 4 Ackley 函数优化结果对比

模型	维数	中心	控制参数					
			1.0	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5
QDPSO	10	文献 [15]	10.0375	1.5012	<b>0.0425</b>	0.0886	0.2167	0.7323
		本文	8.8930	0.3746	$6.8923 \times 10^{-15}$	0.0165	0.2148	0.7248
	20	文献 [15]	19.7037	10.3803	0.6652	0.0414	<b>0.0231</b>	0.9301
		本文	19.4413	6.8375	0.1124	$9.3401 \times 10^{-14}$	0.0116	0.8924
QOPSO	10	文献 [15]	17.3305	2.9178	<b>0.0540</b>	0.1322	0.6795	1.9865
		本文	17.3213	1.5281	$2.5935 \times 10^{-15}$	0.1022	0.6058	1.8068
	20	文献 [15]	20.1089	12.4515	<b>0.0113</b>	0.0658	1.2463	3.0845
		本文	20.0786	11.1385	$4.3698 \times 10^{-15}$	0.0347	1.2426	2.9494
QSPSO	10	文献 [15]	17.7082	2.1859	$4.7368 \times 10^{-12}$	0.1261	0.9511	2.2495
		本文	17.6601	1.2068	$2.6290 \times 10^{-15}$	0.1066	0.7181	2.2449
	20	文献 [15]	20.0910	12.6062	<b>0.0406</b>	0.1182	1.6433	3.5478
		本文	20.0882	11.7493	$3.9080 \times 10^{-15}$	0.0989	1.6385	3.4179

表 5 Rosenbrock 和 Rastrigin 函数优化结果对比

模型	维数	中心	Rosenbrock 参数			Rastrigin 参数		
			1.0—1.5	1.1—1.4	1.2—1.3	1.0—1.5	1.1—1.4	1.2—1.3
QDPSO	10	文献 [15]	34.0764	<b>11.5292</b>	43.2057	<b>4.1464</b>	4.6008	5.5206
		本文	33.5346	<b>7.5480</b>	33.3005	<b>4.1033</b>	4.1599	4.3286
	20	文献 [15]	97.9102	62.3589	<b>24.2812</b>	<b>15.3813</b>	21.5991	23.5325
		本文	65.5403	39.2704	<b>23.5224</b>	<b>10.4135</b>	11.2689	11.3185
QOPSO	10	文献 [15]	43.1567	<b>16.1038</b>	16.6159	<b>4.7808</b>	4.8897	4.9882
		本文	41.4411	<b>12.1284</b>	14.7034	4.4355	4.3372	<b>4.2493</b>
	20	文献 [15]	86.9076	33.4247	<b>30.1642</b>	<b>11.8825</b>	18.9920	20.7963
		本文	56.5984	31.6871	<b>29.1834</b>	11.0208	10.7646	<b>10.4115</b>
QSPSO	10	文献 [15]	59.1887	13.3491	<b>11.7530</b>	<b>5.3427</b>	6.5202	5.4214
		本文	36.3177	<b>8.4269</b>	8.6609	<b>3.9800</b>	4.3208	4.2009
	20	文献 [15]	52.1593	38.7167	<b>24.4363</b>	<b>10.9933</b>	14.1306	17.2601
		本文	45.9017	30.0826	<b>23.5698</b>	10.2595	9.7405	<b>8.8077</b>

表 6 Griewank 和 Ackley 函数优化结果对比

模型	维数	中心	Ackley 参数			Griewank 参数		
			1.0—1.5	1.1—1.4	1.2—1.3	1.0—1.5	1.1—1.4	1.2—1.3
QDPSO	10	文献 [15]	0.1034	0.1140	<b>0.0794</b>	6.5381	1.0988	<b>0.1628</b>
		本文	<b>0.0563</b>	0.0748	0.0585	5.2875	0.4803	<b>0.0116</b>
	20	文献 [15]	0.0226	0.0306	<b>0.0222</b>	17.8046	6.3141	<b>0.3953</b>
		本文	0.0198	0.0225	<b>0.0171</b>	16.9529	3.0065	<b>0.1276</b>
QOPSO	10	文献 [15]	0.1364	0.1511	<b>0.1162</b>	12.9676	0.3769	<b>0.0165</b>
		本文	<b>0.0689</b>	0.0844	0.0870	12.3189	0.1720	<b><math>2.7001 \times 10^{-15}</math></b>
	20	文献 [15]	<b>0.0140</b>	0.0163	0.0160	19.9921	4.9338	<b><math>8.5626 \times 10^{-6}</math></b>
		本文	0.0128	0.0146	<b>0.0127</b>	19.8057	2.4272	<b><math>4.6185 \times 10^{-15}</math></b>
QSPSO	10	文献 [15]	0.1154	0.1524	<b>0.1024</b>	15.1453	0.4492	<b>0.0280</b>
		本文	0.0742	0.0834	<b>0.0582</b>	12.4770	0.2740	<b>0.0116</b>
	20	文献 [15]	0.0179	0.0145	<b>0.0102</b>	19.8768	2.9084	<b>0.0435</b>
		本文	0.0134	0.0116	<b>0.0087</b>	19.6151	1.7802	<b><math>4.7606 \times 10^{-15}</math></b>

实验结果表明: 就势阱中心的设计而言, 不论控制参数取定值还是线性增加, 本文方法的优化结果普遍好于文献 [15] 的方法. 这是因为设计中强调了全局最优粒子对优化的引导作用, 从而也表明这种设计方法是有效的、可行的.

就控制参数的取法而言, 取定值和线性增加的优化结果差别不大, 二者互有优劣, 线性增加法没有呈现出稳定的优势. 对于定值参数的 48 次最优结果 (表 1—4 中粗体数据), 有 22 次在  $\lambda = 1.2$  取得, 24 次在  $\lambda = 1.3$  取得, 2 次在  $\lambda = 1.4$  取得; 对于线性增加参数的 48 次最优结果 (表 5,6 中粗体数据), 有 11 次在  $\lambda = 1.0—1.5$  取得, 6 次在  $\lambda = 1.1—1.4$  取得, 31 次在  $\lambda = 1.2—1.3$  取得. 上述结果表明, 对于定值参数, 一般可取  $\lambda = 1.2$  或  $\lambda = 1.3$ ; 对于线性增加参数, 一般可取  $\lambda = 1.2—1.3$ .

就三种 QPSO 的优化性能而言, QDPSO 和 QSPSO 的优化性能比较接近, 且二者均略优于 QOPSO. 比较三种模型在两种参数设置 (定值

和线性增加) 下的最好优化结果 (表 1—6 中粗体数据, 即每行数据的最小值) 可知, QDPSO, QOPSO 和 QSPSO 取得最好结果 (表 1—6 中粗体下划线数据, 即维数和中心相同时三种方法的优化结果中最好的一个) 的次数分别为 13, 6 和 13 次. 这表明 QDPSO 和 QSPSO 的优化性能比较接近, 且二者的优化性能略优于 QOPSO. 对于这种现象, 可从粒子在三种势阱中出现的概率密度曲线 (如图 2 所示) 给出解释.

由图 2 可知, 首先, 三种曲线的形状比较接近, 因此优化性能也接近. 其次, 在势阱的经典禁区 ( $|r| > 1$ ) 内, 三种势阱中粒子出现的概率密度均不为零, 这说明在三种势阱中均不同程度地存在着隧道效应, 粒子有可能跃出势阱进入禁区. 对于三种 QPSO 的优化过程而言, 这恰好相当于粒子的变异过程, 可有效避免早熟收敛的发生. 事实上, 在没有速率更新项的 QPSO 中, 正是由于这种对势阱中隧道效应的模拟, 才有效增强了模型的优化性能.

由图 2 可知, 三种 QPSO 中, QDPSO 和 QSPSO 的粒子在经典禁区内出现的概率几乎相等, 而 QOPSO 粒子出现的概率最低, 这导致其变异能力较弱, 因此使其优化性能略弱于 QDPSO 和 PPSO. 若仅就 QDPSO 和 PPSO 而论, 由于 QDPSO 在经典禁区内出现的概率略高于 QSPSO, 因此其优化性能也略高于 QSPSO.

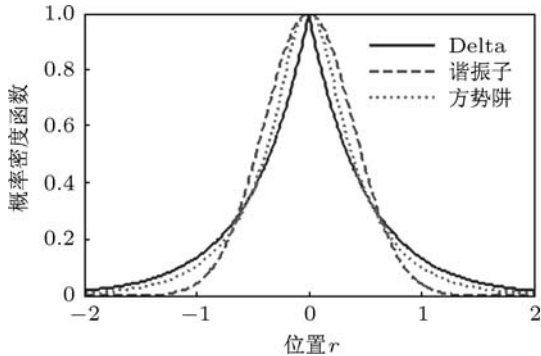


图 2 粒子的归一化概率密度曲线

### 4.2 神经网络权值优化

本实验用三层前馈神经网络作为分类器, 用三种 QPSO 及带惯性权重的普通 PSO 优化网络权值实现手写体汉字识别问题. 识别对象为两个手写体汉字“优”和“伏”, 分别由 15 个不同层次的人员书写, 共得两类 30 个字模样本. 根据图象数据二值化思想, 字模样本编码方法为: 将每个字模处理成  $A_{8 \times 8}$  点阵, 用向量  $X = (x_{8i+j})^T$  存储, 依据点阵的颜色, 向量对应维置 1 或 0. 部分字模样本如图 3 所示.

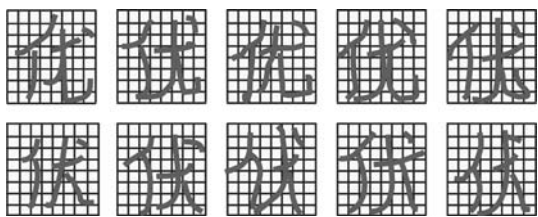


图 3 部分字模样本示意图

字模样本共两类, 网络输出可用一位二进制数表示, 输入为 64 个节点, 隐层取 5 个节点, 因此网络为 64-5-1 型. 限定分类误差为 0.5, 限定迭代步数为 100. 训练过程采用单样本循环误差修正方式, 即随机从样本集中抽取一个样本进行训练直到满足误差精度为止, 再选取下一个样本, 直到取完所有样本, 完成一次迭代. 选取每类汉字的前 10 个数据

作为训练集, 用于提取每类样本的模式信息, 余下的 5 个作为测试集, 用来检验网络的泛化能力.

算法参数设置为: 三种 QPSO 控制参数均取  $\lambda = 1.2$ , 其势阱中心分别用本文方法和文献 [15] 中方法设置. 普通 PSO 惯性权重取  $w = 0.7298$ , 自身和全局因子  $c_1 = c_2 = 1.49618$ . 种群规模均取 50, 优化空间维数 (即分类器权值数) 为 325.

适应度函数取为  $\exp(-|E|)$ , 其中  $E$  为网络输出误差, 当  $|E| < 0.5$  时认为算法收敛. 分别用三种 QPSO 和普通 PSO 优化网络权值, 每种算法运行 10 次后计算平均结果, 优化结果对比如表 7 所示.

表 7 神经网络权值优化结果对比

算法	中心	最小误差	平均误差	收敛次数
QDPSO	文献 [15]	0.0996	0.2886	10
	本文	0.0588	0.2054	10
QOPSO	文献 [15]	0.1089	0.3072	10
	本文	0.0599	0.2178	10
QSPSO	文献 [15]	0.1106	0.2912	10
	本文	0.0498	0.2098	10
普通 PSO	—	0.1598	0.4133	10

本实验需要同时优化 325 个变量. 由表 7 可知, 对于高维优化问题, 本文三种 QPSO 的优化性能不仅优于文献 [15] 中的 QPSO, 而且也优于带惯性权重的普通 PSO. 就本文三种 QPSO 而言, 优化性能仍然比较接近, 且 QDPSO 性能最佳. 将训练好的网络用于测试集字模样本识别, 三种 QPSO 的正确识别率均达到 100%, 而普通 PSO 的正确识别率为 80%. 由此可见, 本文提出的三种改进的 QPSO 对于处理高维优化的模式识别问题也具有较大的潜力.

### 5 结论

在基于 Delta 势阱的 QDPSO 模型基础上, 提出了基于谐振子的 QOPSO 和基于方势阱的 QSPSO, 提出了新的势阱中心和控制参数的设计方法. 实验结果表明, 应用新的势阱中心及控制参数设置方法, 三种改进 QPSO 的优化性能均比原 QPSO 有不同程度的提高; 三种 QPSO 优化性能比较接近, 其中 QDPSO 和 QSPSO 更为接近, 且 QDPSO 略优于 QSPSO 和 QOPSO.



- [1] Kennedy J, Eberhart R C 1995 *IEEE International Conference on Neural Networks* Perth, Australian, November 27–December 1, 1995 p1942
- [2] Guo W Z, Chen G L 2011 *J. Software* **22** 833 (in Chinese) [郭文忠, 陈国龙 2011 软件学报 **22** 833]
- [3] Lin S W, Ying K C, Chen S C, Lee Z J 2008 *Expert Syst. Appl.* **35** 1817
- [4] Cai X J, Cui Z H, Zeng J C, Tan Y 2008 *Inf. Process. Lett.* **105** 231
- [5] Liu Y, Qin Z, Shi Z W, Lu J 2007 *Neurocomputing* **70** 672
- [6] Zhang Y J, Shao S F 2011 *Pattern Recogni. Artif. Intell.* **24** 90 (in Chinese) [张英杰, 邵岁锋 2011 模式识别与人工智能 **24** 90]
- [7] Zhu H M, Wu Y P 2010 *Control Decis.* **25** 20 (in Chinese) [朱海梅, 吴永萍 2010 控制与决策 **25** 20]
- [8] Samrat L S, Leandro S C, Ajith A 2009 *Microelectron. Reliab.* **49** 660
- [9] Omkara S N, Khandelwala R, Ananthb T S 2009 *Expert Syst. Appl.* **36** 11312
- [10] Meng K, Wang H G, Dong Z Y 2010 *IEEE Trans. Power Syst.* **25** 215
- [11] Zhang Z S 2010 *Expert Syst. Appl.* **37** 1800
- [12] Lu S F, Sun S F, Lu Z D 2010 *Energy Convers. Manage.* **51** 561
- [13] Gao H, Xu W B, Sun J, Tang Y L 2010 *IEEE Trans. Instrum. Meas.* **59** 934
- [14] Leandro S C 2010 *Expert Syst. Appl.* **37** 1676
- [15] Fang W, Sun J, Xie Z P, Xu W B 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 3686 (in Chinese) [方伟, 孙俊, 谢振平, 须文波 2010 物理学报 **59** 3686]
- [16] Feng B, Xu W B 2004 *IEEE Conference on Cybernetics and Intelligent Systems* Singapore, December 1–3, 2004 p291
- [17] Feng B, Xu W B 2004 *IEEE Conference on Control, Automation, Robotics and Vision* Kunming, December 6–9, 2004, China p1454
- [18] Said M M, Ahmed A K 2006 *IEEE Trans. Antennas Propagat.* **54** 2765
- [19] Clerc M, Kennedy J 2002 *IEEE Trans. Evol. Comput.* **6** 58
- [20] Zhao S Q, Zheng W 1999 *Random Signal Analysis* (Harbin: Harbin Institute of Technology Press) p54 (in Chinese) [赵淑清, 郑薇 1999 随机信号分析 (哈尔滨: 哈尔滨工业大学出版社) 第 54 页]

# Research on the improvement of quantum potential well-based particle swarm optimization algorithm\*

Li Pan-Chi<sup>1)2)†</sup> Wang Hai-Ying<sup>2)</sup> Song Kao-Ping<sup>1)</sup> Yang Er-Long<sup>1)</sup>

1) (*Post-doctoral Research Center of Oil and Gas Engineering, Northeast Petroleum University, Daqing 163318, China*)

2) (*School of Computer and Information Technology, Northeast Petroleum University, Daqing 163318, China*)

(Received 23 May 2011; revised manuscript received 31 July 2011)

## Abstract

To enhance the optimization ability of quantum potential well-based particle swarm optimization algorithm, the improved quantum potential well-based particle swarm optimization algorithms are proposed by analyzing the design process of current quantum potential well-based particle swarm optimization algorithms. Firstly, three improved quantum particle swarm optimization algorithms are proposed based on delta potential well, harmonic oscillator and square potential well, respectively, and then a statistic mean-based control parameter design method is presented for the proposed models. Secondly, to highlight the guiding role of the global optimal particle in designing potential well centers, two strategies are presented based on a weighted average of all self-optimal particles and dynamic random variables. The experimental results show that the performances of three improved algorithms are relatively close, the model based delta potential well are slightly better than the other two kinds of model, and the performances of three improved algorithms are superior to that of the original algorithm.

**Keywords:** quantum computation, quantum potential well, particle swarm optimization, algorithm design

**PACS:** 03.65.-w

---

\* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 61170132), the China Postdoctoral Science Foundation (Grant Nos. 20090460864, 201003405), the Postdoctoral Science Foundation of Heilongjiang Province, China (Grant No. LBH-Z09289), and the Scientific Research Foundation of the Education Department of Heilongjiang Province, China (Grant No. 11551015).

† E-mail: lipanchi@vip.sina.com