

广义 BVP 电路系统的振荡行为及其非光滑分岔机理*

李绍龙¹⁾ 张正娣¹⁾ 吴天一¹⁾²⁾ 毕勤胜^{1)†}

1) (江苏大学理学院, 镇江 212013)

2) (镇江船艇学院基础部, 镇江 212013)

(2011 年 7 月 12 日收到; 2011 年 8 月 5 日收到修改稿)

探讨了具有分段线性特性的广义 BVP 电路系统随参数变化的复杂动力学演化过程. 其非光滑分界面将相空间划分成不同的区域, 分析了各区域中平衡点的稳定性, 得到其相应的简单分岔和 Hopf 分岔的临界条件. 给出了不同分界面处广义 Jacobian 矩阵特征值随辅助参数变化的分布情况, 讨论了分界面处系统可能存在的分岔行为, 指出当广义特征值穿越虚轴时可能引起 Hopf 分岔, 导致系统由周期振荡转变为概周期振荡, 而当出现零特征值时则导致系统的振荡在不同平衡点之间转换. 针对系统的两种典型振荡行为, 结合数值模拟验证了理论分析的结果.

关键词: 广义 BVP 振子, 非光滑分岔, 广义 Jacobian 矩阵, Hopf 分岔

PACS: 05.45.-a, 84.30.-r

1 引言

20 世纪 50 年代, Hodgkin 和 Huxley^[1] 建立了描述单个神经元放电行为的数学模型 (HH 模型), 该模型长期以来一直受到学者们的高度关注, 如 Hassard 等^[2] 发现了其中平衡状态的 Hopf 分岔, Guckenheimer 和 Oliva^[3] 给出了其不同的混沌吸引子并解释了混沌解的存在性. 基于四维的 HH 模型, FitzHugh 和 Nagumo^[4] 推导了二维的简化系统, 即所谓的 Bohöffer-Van der Pol (BVP) 振子或 FitzHugh-Nagumo 模型. 和 Van der Pol 振子类似, BVP 振子也是一类典型的自激系统, 可以刻画稳定的周期振荡以及阈值现象. BVP 振子广泛应用于生物过程的建模^[5], 如颈动脉窦神经的放电、心脏跳动规律等. 对于 BVP 振子行为的研究已经取得了很多成果, 如 Rajasekar^[6] 得到了 BVP 模型的关键分岔的动力学结构方程, Ramesh 和 Narayanan^[7] 利用神经网络探讨了 BVP 振子的混沌控制, Ueta 和 Kawakami^[8] 研究了非对称耦合 BVP 振子的分岔及其在交叉耦合下的混沌行为, Wang 和 Feng^[9] 给出了离散情形下的 BVP 振子的局部分岔, Chimi

和 Fotsin 等^[10] 讨论了周期激励下 BVP 振子的同步问题. 另外, BVP 振子可以用电路元件来搭建, 属于广义蔡氏电路系统^[11] 的范畴. 由于 BVP 振子是二维模型, 其典型行为是自激振荡, 这在实验室可以非常清晰地观察到. 为研究更加复杂的非线性现象及其产生机理, 需要在该电路系统的基础上做进一步的修改和补充, 即所谓的广义 BVP 振子, 如 Sekikawa 等^[12] 建立了不同尺度耦合的三维广义 BVP 振子, 并给出了该系统的分岔行为及其产生机理; Shimizu 等^[13] 通过引入交变电源, 建立了周期激励下的广义 BVP 电路系统, 给出了各种模式的复合模态振荡及其混沌现象; Nishiuchi 等^[14] 通过并联电容, 引入非线性电阻, 给出了广义 BVP 振子中由超临界 Neimark-Sacker 分岔导致的稳定不变环面.

迄今为止, 虽然在各种不同形式下的广义 BVP 振子的动力学特性方面已取得了一定的成果, 然而这些工作大都是针对光滑向量场开展的, 很少考虑在非光滑向量场下该类广义振子的行为. 事实上, 非光滑因素在实际电路系统中比较常见, 例如电路系统中的开关、用于控制目的的阈值、具有分段

* 国家自然科学基金 (批准号: 10972091, 20976075) 和江苏大学高级人才基金 (批准号: 09JDG011) 资助的课题.

† E-mail: qbi@ujs.edu.cn

线性伏安特性的非线性电阻等^[15,16]. 与光滑系统的分岔现象不同, 非光滑系统不仅可以产生光滑系统中的各种常规分岔, 还具有光滑系统所不具备的一些特殊的分岔形式^[17]. 例如在分析系统轨迹与分界面相交于一点但不穿越分界面时可能会产生擦边分岔和角点碰撞分岔^[18]; 而当轨迹多次穿越分界面时, 可能产生穿越滑动分岔、擦边滑动分岔等^[19]; 在非光滑连续系统的多次穿越则可表现为 Hopf 分岔与转点分岔 (turning point bifurcation) 的组合^[20]; Filippov 系统中 Floquet 乘子的跳跃会引起不连续分岔^[21]; 其他还有如二维非光滑映射中的边界碰撞分岔 (border collision bifurcations)^[22], Filippov 系统中周期运动的 C- 分岔^[23] 等.

由于目前对非光滑分岔的研究还处在初步阶段, 许多非常规分岔和产生原因及其对系统行为的影响还远未为人们所深刻认识^[24]. 因此, 分析非光滑系统各种非常规分岔及其产生机理, 探讨非光滑因素对系统整体动力特性的影响, 对于深入理解各种新的复杂现象的本质具有一定的理论意义, 同时对于实际非光滑系统参数识别、模型论证、优化设计以及控制技术等具有一定的实际应用价值.

本文针对图 1 所示的广义 BVP 电路系统, 引入 Chua 模型中具有分段线性特性的非光滑电阻, 分析系统随参数变化的演化过程, 重点考察其在分界面上的各种非光滑分岔及其产生条件, 探讨系统穿越不同分界面行为之间的相互作用, 从而揭示系统的各种振荡行为及其相应的产生机理.

2 广义 BVP 模型

广义 BVP 电路模型 (图 1a) 是由两个电容、一个电感、一个恒定电阻和一个非线性电阻构成的, 其动力学模型可以表示为^[14]

$$\begin{aligned} C \frac{dv_1}{dt} &= -i - g(v_1), & C \frac{dv_2}{dt} &= i - \frac{v_2}{r}, \\ L \frac{di}{dt} &= v_1 - v_2. \end{aligned} \quad (1)$$

Nishiuchi 等^[14] 分析了非线性电阻具有光滑伏安特性曲线 $g(v_1) = -av_1 - b \tanh cv_1$ 下的概周期振荡及其分岔行为. 而在实际电路系统中, 分段线性特性的电阻较为普遍, 比如 Chua 氏电路^[11], Jerk 电路^[25] 等, 也相对容易设计和实现. 在此引入一类典型的分段线性电阻, 其伏安特性曲线表示为

$$g(v_1) = -av_1 - b(|1 + cv_1| - |1 - cv_1|)/2,$$

如图 1(b) 所示. 系统 (1) 无量纲形式的方程为

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -z + Ax + (|1 + Bx| - |1 - Bx|)/2, \\ \dot{y} &= z - \delta y, & \dot{z} &= x - y, \end{aligned} \quad (2)$$

其中

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{1}{\sqrt{LC}}t, & A &= a\sqrt{\frac{L}{C}}, & B &= bc\sqrt{\frac{L}{C}}, \\ \delta &= \frac{1}{r}\sqrt{\frac{L}{C}}, & x &= \frac{v_1}{b}\sqrt{\frac{C}{L}}, & y &= \frac{v_2}{b}\sqrt{\frac{C}{L}}, & z &= \frac{i}{b}. \end{aligned}$$

显然, 系统 (2) 存在着非光滑分界面, 在分界面上可能存在着不同形式的非常规分岔, 从而导致该系统具有特殊的振荡行为.

3 平衡点分析

由非线性电阻的伏安特性曲线, 可以定义向量场 (2) 的两非光滑分界面 $\{(x, y, z)|x = x_\Sigma = \pm 1/B\}$, 从而将系统的相空间划分为三个区域: $D_0 = \{(x, y, z)||x| < 1/B\}$, $D_- = \{(x, y, z)|x < -1/B\}$ 和 $D_+ = \{(x, y, z)|x > 1/B\}$.

3.1 区域 D_0 中的平衡点及其稳定性

在区域 D_0 中, 系统仅存在一个平衡点 $E_0 = (0, 0, 0)$, 其相应的特征方程可以表示为

$$\begin{aligned} P_0(\lambda) &= \lambda^3 + [\delta - (A + B)]\lambda^2 + [2 - (A + B)\delta]\lambda \\ &\quad + \delta - (A + B). \end{aligned} \quad (3)$$

E_0 的稳定条件为

$$\delta - (A + B) > 0, \quad 1 - (A + B)\delta > 0. \quad (4)$$

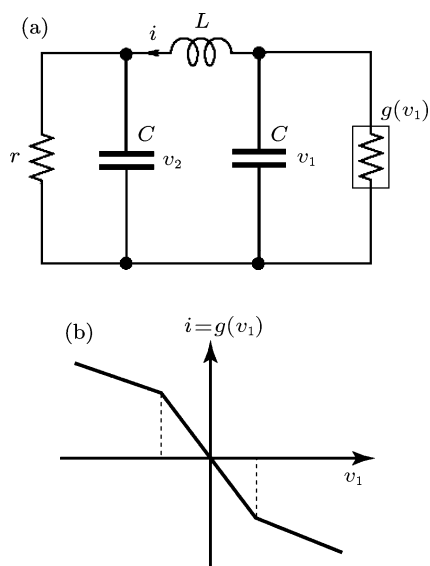


图 1 (a) 广义 BVP 电路; (b) 非线性电阻的伏安特性曲线

其失稳途径有两种可能, 当

$$\delta - (A + B) = 0, \quad 2 - (A + B)\delta > 0 \quad (5)$$

时会产生简单分岔, 导致平衡点的特性变化, 而当

$$\begin{aligned} 1 - (A + B)\delta &= 0, \quad \delta - A - B > 0, \\ 2 - A\delta - B\delta &> 0, \quad 2(A + B)\delta - \delta^2 - 1 \neq 0 \end{aligned} \quad (6)$$

时会产生 Hopf 分岔, 导致系统产生周期振荡, 其相应的振荡频率为 $\Omega_H^2 = 2 - (A + B)\delta$.

3.2 区域 D_{\pm} 中的平衡点及其稳定性

在区域 D_{\pm} 中, 系统存在两个平衡点 $E_{\pm} = \left(\pm \frac{1}{\delta - A}, \pm \frac{1}{\delta - A}, \pm \frac{\delta}{\delta - A}\right)$. 由于对称性, 其相应的特征方程相同, 表示为

$$P_{\pm} = \lambda^3 + (\delta - A)\lambda^2 + (2 - A\delta)\lambda + \delta - A. \quad (7)$$

E_{\pm} 的稳定条件为

$$\delta - A > 0, \quad 1 - A\delta > 0. \quad (8)$$

从而导致两类临界失稳条件, 一是对应于零特征根情形, 也即

$$\delta - A = 0, \quad 2 - A\delta > 0, \quad (9)$$

此时, E_{\pm} 会产生简单分岔; 二是对应于存在一对纯虚根时的情形, 此时, E_{\pm} 可能会产生 Hopf 分岔. 系统出现 Hopf 分岔需要满足以下条件^[26]

$$\delta - A > 0, \quad (10)$$

$$(2 - A\delta)(\delta - A) - (\delta - A) = 0, \quad (11)$$

$$2 - A\delta > 0, \quad (12)$$

$$2A\delta - \delta^2 - 1 \neq 0, \quad (13)$$

其中由 Hopf 分岔产生的频率为 $\Omega_H^2 = 2 - A\delta$.

4 振荡演化过程分析

取定参数 $L = 10[\mu\text{H}]$, $C = 0.022[\mu\text{F}]$, $\delta = 1.2$, $B = 0.65$, 由 (4) 和 (8) 式可知, 当 $0 < A < 11/60$ 时, E_0 和 E_{\pm} 均是稳定的; 当初值选在不同的区域时, 系统轨迹将逐渐稳定于该区域中相应的平衡点; 当 $A = 11/60$ 时, E_0 失稳产生 Hopf 分岔, 导致围绕 E_0 的稳定周期振荡 PO_0 , 其振荡频率为 $\Omega_0^2 = 2 - (A + B)\delta = 1$, 而 E_{\pm} 依然保持稳定, 即当 $11/60 < A < 5/6$ 时, 围绕 E_0 振荡的稳定周期振荡与稳定平衡点 E_{\pm} 共存. 当然, 随着 A 的增加, PO_0 的振动幅值也会不断增加, 一旦相轨迹突破区

域 D_0 的边界, 会导致诸如下文所描述的复杂运动模式. 当 $A = 5/6$ 时, 与 E_+ 或 E_- 的对应的特征值为 $\lambda_{1,2} = \pm i$ 和 $\lambda_3 = -0.3667$, 即 E_{\pm} 也会由 Hopf 分岔失稳, 分别导致两相应于不同初值的对称的周期振荡 PO_{\pm} , 其相应的频率为 $\Omega_{\pm}^2 = 2 - A\delta = 1$. 同样, 随着 A 的继续增加, PO_{\pm} 的振动幅值不断增大, 吸引子分别突破区域 D_{\pm} 的边界后, 也会导致复杂运动. 例如, 当 $A = 0.7$ 时系统存在两个对称的稳定焦点, 分别为 $E_+ = (2.0, 2.0, 2.4)$ 和 $E_- = (-2.0, -2.0, -2.4)$, 以及一个不稳定鞍点 $E_0 = (0, 0, 0)$, 如图 2.

图 3 给出 $A = 0.835$ 时系统的两个对称的周期解, 频率约为 1, 数值模拟还得到 $A = 0.84$ 时系统的两个对称周期振荡的频率约为 0.797, 且随着 A 的增大, 振荡的频率越来越小.

当 A 增大至 $A = 0.8798$ 时, 由于周期振荡的轨迹在穿越非光滑分界面时出现 Hopf 分岔, 导致对称的两个概周期解, 图 4 给出了其中一个概周期解的相图以及相应的 Poincare 映射图. 从时间历程上可以计算得其较大频率为 $\Omega = 0.785$, 该频率也即原周期解的频率, 由 E_{\pm} 的 Hopf 分岔产生. 而另一频率为 $\Omega = 0.742$, 即非光滑面处 Hopf 分岔的频率 (具体分析见下文).

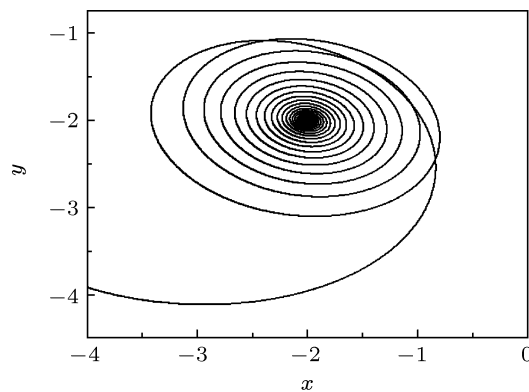
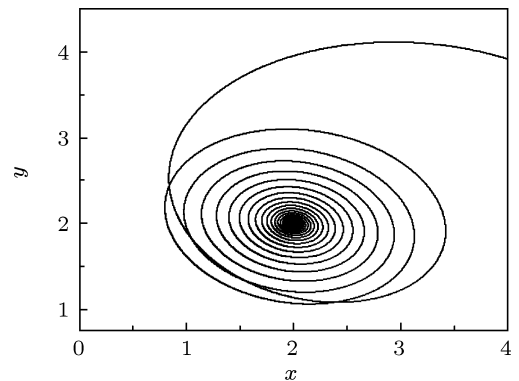


图 2 $A = 0.7$ 时两个对称的稳定的焦点

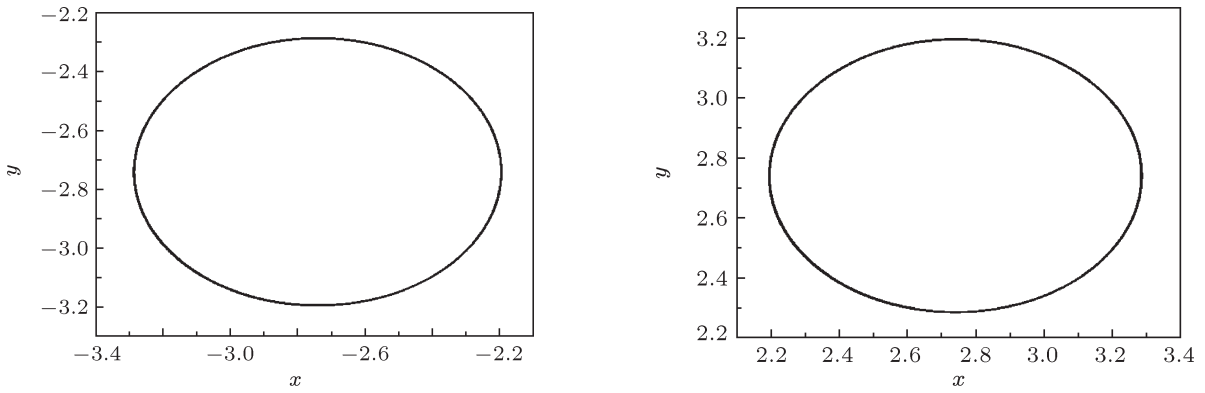


图3 $A = 0.835$ 时系统的两个对称的周期解

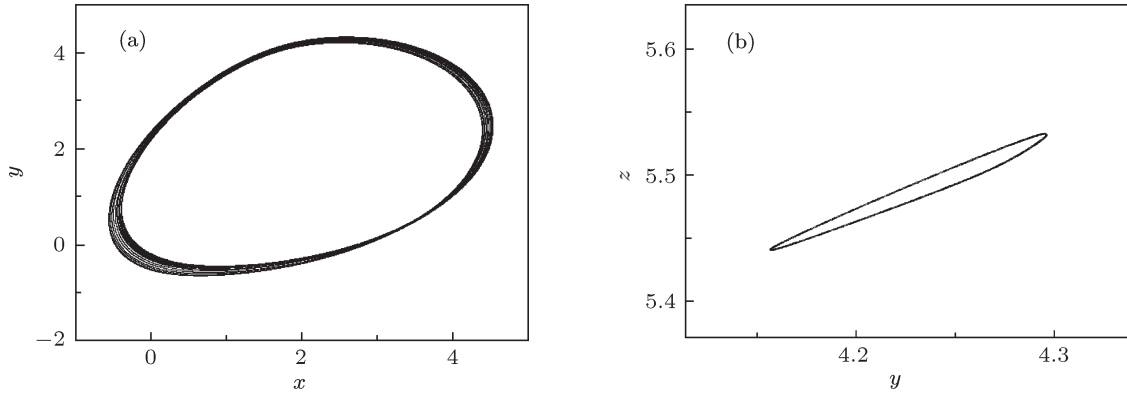


图4 $A = 0.8798$ 时 (a) 对称概周期解的上半部分相图; (b) Poincaré 截面图

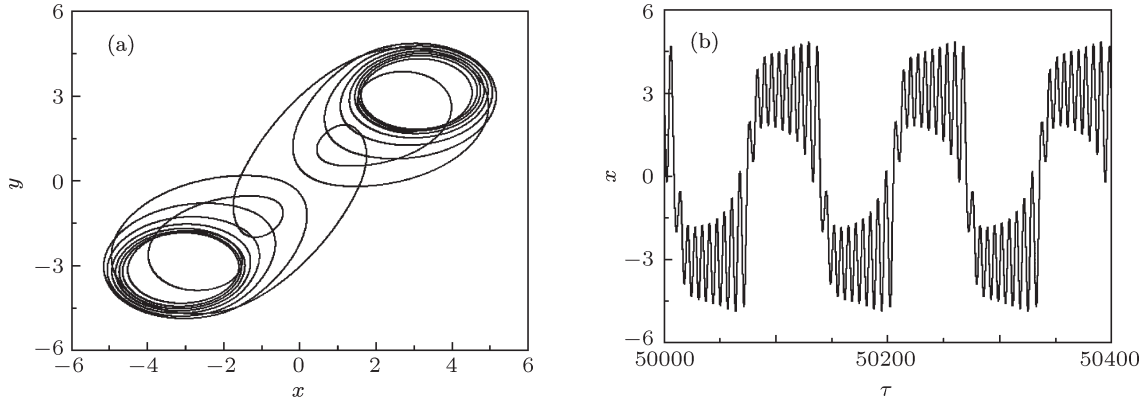


图5 $A = 0.88$ 时 (a) 相图; (b) 时间历程图

随着 A 的继续增大, 两个不同区域的概周期解的轨迹在相空间不断扩张, 导致它们之间的相互作用, 从而形成同时围绕两个概周期轨迹振荡的穿越不同分界面的周期解 (图 5). 从其相应的相图和时间历程均可以看出, 周期运动的大部分时间均分别围绕着原来的两个概周期解的轨迹振荡, 此时的相轨迹近似于原概周期轨迹. 而当轨迹在相空间中扩张到一定程度时, 会快速地在原来的两个概周期解的轨迹之间来回运动. 由于原概周期解

在 $A < 0.8799$ 均是全局稳定的, 当围绕一个概周期解振荡的轨迹在空间中扩展到一定程度时, 在穿越非光滑分界面后, 会趋向另一概周期轨迹, 从而形成来回振荡现象.

当 A 继续增大, 该周期解又会分裂, 再次出现两个对称的概周期振荡, 图 6 给出了当 $A = 0.882$ 其中的一个概周期解的相图以及相应的 Poincaré 映射图和时间历程图. 同样可以计算其中的一个频率为 $\Omega = 0.742$, 近似等于系统在非光滑分界面

处的 Hopf 分岔的频率 $\Omega_H = 0.748$, 另一频率是为 0.797, 近似等于 $A = 0.84$ 时周期解的频率.

当参数 A 继续增大至 $A = 0.888$ 时, 概周期解失稳, 产生围绕两平衡点 E_{\pm} 来回振动的周期解 (图 7(a)), 该周期解随参数变化产生倍周期分

岔, 在 $A = 0.888075$ 时出现 2- 周期解 (图 7(b)), 在 $A = 0.888095$ 时出现 4- 周期解 (图 7(c)), 在 $A = 0.8881$ 时系统发生混沌振荡, 进而进入混沌振荡 (图 7(d)), 在混沌区域中可以发现不同的周期窗口, 如周期 3 运动 (图 (8)).

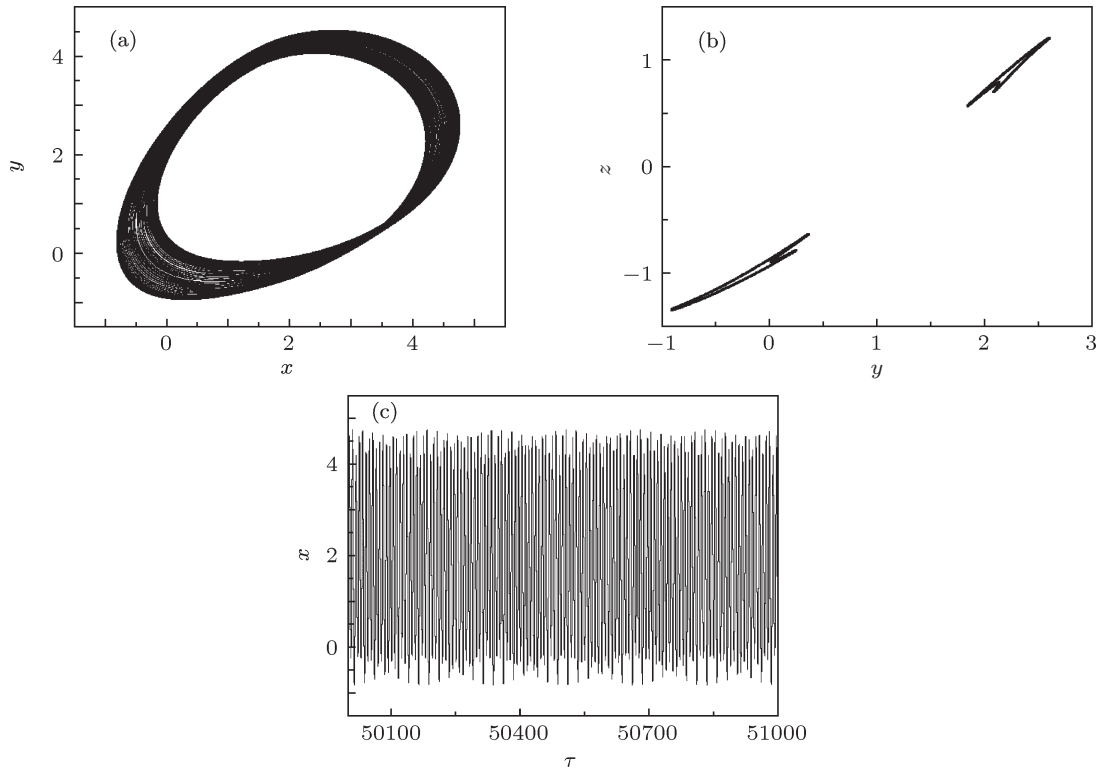


图 6 $A = 0.882$ 时 (a) 对称概周期的上半部分相图; (b) Poincaré 截面图; (c) 时间历程图

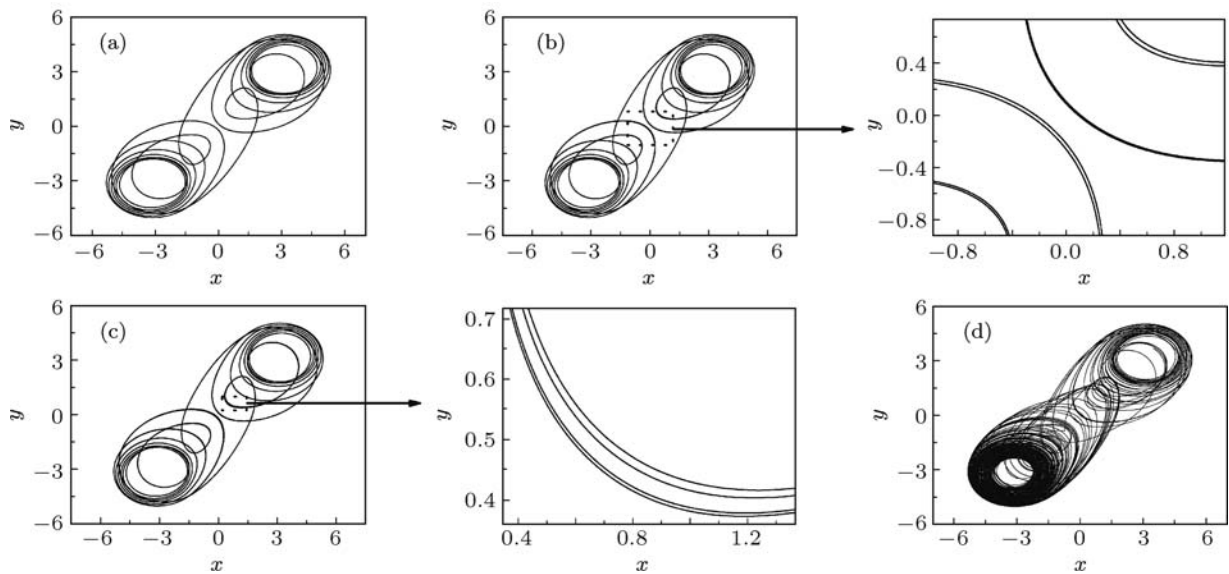


图 7 倍周期分岔到混沌

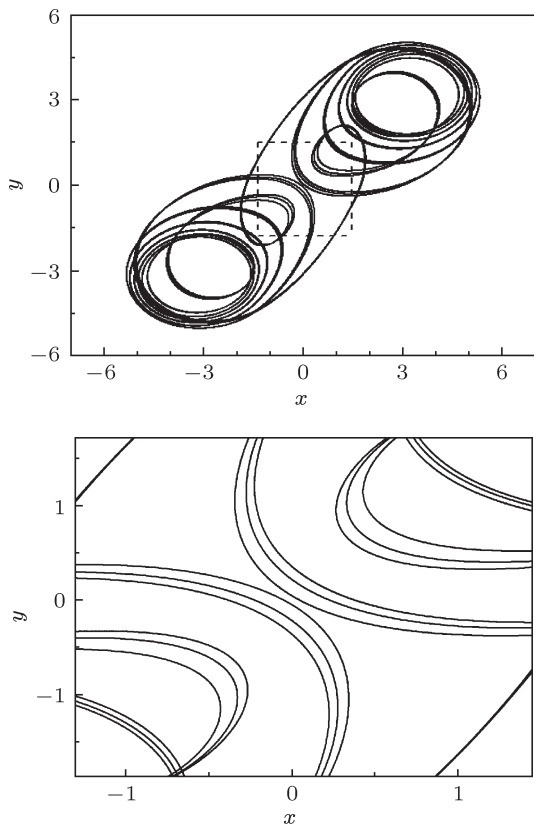


图8 $A = 0.8882$ 时系统的 3-周期解及虚线区域内的局部放大图

同时在数值模拟中可以发现, 围绕两平衡点 E_{\pm} 来回振荡的混沌运动 (图 7(d)), 在一定条件下会分裂成两个对称的围绕单个平衡点振荡的混沌运动 (图 9(a),(b)), 而它们又会随参数变化相互作用, 导致混沌激变 (图 9(c)).

5 非光滑分岔分析

由于电路中存在具有分段线性特性的非线性电阻, 此时相应的向量场是非光滑的, 系统的动力学演化过程会受区域中平衡点的分岔及分界面上的非光滑分岔的共同影响, 也即, 对于非光滑分界面, 其两边的向量场存在质的区别, 因此, 当轨迹穿越分界面时, 其行为可能会发生定性的变化. 注意到向量场 (2) 在分界面处是不光滑但是连续的, 也即是第一类非光滑向量场, 因而可以借助于广义 Clarke 导数得到的广义 Jacobian 矩阵研究在分界面附近的分岔行为. 分界面处的广义 Jacobian 矩阵可以表示成 [27]

$$J\left(\pm \frac{1}{B}\right) = qJ_{\pm} + (1-q)J_0, \quad (14)$$

其中 J_0 和 J_{\pm} 分别代表 D_0 和 D_{\pm} 区域中平衡点所对应的 Jacobian 矩阵, $q \in [0, 1]$, 由此得广义特征

方程为

$$\begin{aligned} P_q(\lambda) &= qP_{\pm}(\lambda) + (1-q)P_0(\lambda) \\ &= \lambda^3 + [\delta - A - (1-q)B]\lambda^2 \\ &\quad + [2 - A\delta - (1-q)B\delta]\lambda \\ &\quad + \delta - A - (1-q)B. \end{aligned} \quad (15)$$

在不同的系统参数条件下, 随辅助参量 q 从 0 到 1 的变化过程中, 当方程 (15) 的根穿越零或虚轴时, 在分界面处系统可能出现非光滑分岔, 而如果方程 (15) 的根多次穿越零或虚轴时系统还可能出

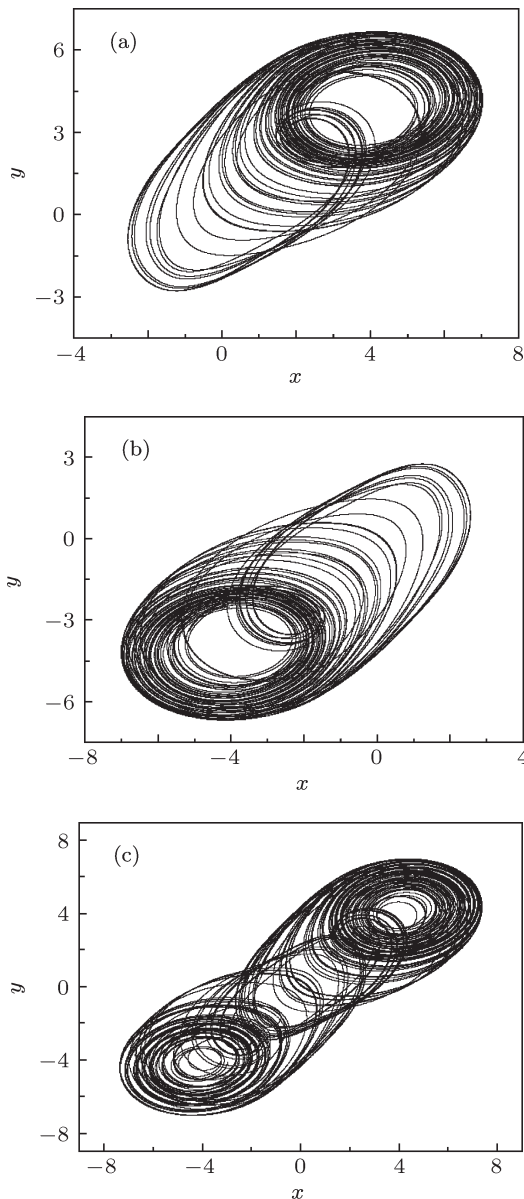


图9 (a),(b) $A = 0.95$ 时对称的混沌相图; (c) $A = 0.96$ 时的混沌相图

当 $\delta - A - (1-q)B = 0$ 时, 广义特征值穿越原点时可能导致系统产生简单分岔. 当广义特征值穿

越纯虚轴时可能引起系统产生 Hopf 分岔, 其 Hopf 分岔的必要条件可以表示为

$$\begin{aligned} \delta - A - (1 - q) B &> 0, \\ 1 - A\delta - (1 - q) B\delta &= 0. \end{aligned} \quad (16)$$

此时 $F_q(\lambda) = (\lambda^2 + \Omega^2)(\lambda + R)$, 其中 $R = \delta - A - (1 - q) B$, $\Omega_H^2 = 2 - A\delta - (1 - q) B\delta$.

现在我们取 A 为分岔参数, 应用摄动法得到系统在分界面处 Hopf 分岔的充分条件. 假设在 Hopf 分岔点 $A = A_H$ 处有一小的扰动量 ΔA , 特征方程在 $A = A_H + \Delta A$ 处可表示为

$$\begin{aligned} F_1 = \lambda^3 + [\delta - (A_H + \Delta A) - (1 - q)B] \lambda^2 \\ + [2 - (A_H + \Delta A)\delta - (1 - q)B\delta] \lambda \\ + \delta - (A_H + \Delta A) - (1 - q)B, \end{aligned} \quad (17)$$

假设在 $A = A_H + \Delta A$ 处的特征值为

$$\lambda_{1,2} = -\eta_1 \pm i(\Omega + \eta_2), \quad \lambda_3 = -(R + \eta_3). \quad (18)$$

由此得到特征方程的另一形式

$$\begin{aligned} F_2(\lambda) = [\lambda + \eta_1 + i(\Omega + \eta_2)] \\ \times [\lambda + \eta_1 - i(\Omega + \eta_2)] \\ \times (\lambda + R + \eta_3). \end{aligned} \quad (19)$$

将 (19) 式展开

$$\begin{aligned} F_2(\lambda) = \lambda^3 + (2\eta_1 + R + \eta_3)\lambda^2 \\ + [\eta_1^2 + (\Omega + \eta_2)^2 + 2\eta_1(R + \eta_3)]\lambda \\ + [\eta_1^2 + (\Omega + \eta_2)^2](R + \eta_3). \end{aligned} \quad (20)$$

比较在 (17) 和 (20) 式中 λ 相同次数的系数得到

$$\begin{aligned} 2\eta_1 + R + \eta_3 &= \delta - (A_H + \Delta A) - (1 - q)B, \\ \eta_1^2 + (\Omega + \eta_2)^2 + 2\eta_1(R + \eta_3) \\ &= 2 - (A_H + \Delta A)\delta - (1 - q)B\delta, \\ [\eta_1^2 + (\Omega + \eta_2)^2](R + \eta_3) \\ &= \delta - (A_H + \Delta A) - (1 - q)B. \end{aligned}$$

从中可计算出 $\eta_1 = -(\Omega^2 - 1 + \delta R)/2(R^2 + \Omega^2)\Delta A$, 即有 $d(\text{Re}(\lambda_1)/dA)|_{A=A_H} = -(\Omega^2 - 1 + \delta R)$. 因此, Hopf 分岔的充分条件可以写成为 $-(\Omega^2 - 1 + \delta R) \neq 0$.

当然, 尽管在分界面处的广义特征值穿越零点或纯虚轴, 但是不能完全用传统的分岔形式简单地理解系统的动力学行为. 下面我们利用非光滑分岔理论讨论系统两种较为典型的动力学行为.

首先, 当 $A = 0.882$ 时, 系统表现为概周期振荡 (见图 6), 此时其广义 Jacobian 矩阵的三个

特征值在复平面内随 q 变化的分布情况如图 10 所示, 可以发现, 其特征值在 $q = 0.5108$ 时穿越虚轴, 数值上可以发现此时满足 Hopf 分岔的充分条件, 也即系统在非光滑分界面上会发生超临界 Hopf 分岔, 其相关的频率为 $\Omega_H = 0.748$. 同时, 在 $A = 0.833$ 时, E_{\pm} 已经由超临界 Hopf 分岔失稳, 从而导致运动具有两个不同的频率成分特性. 数值分析表明, 此时的概周期运动的两个频率分别为 0.742, 近似等于系统在非光滑分界面处的 Hopf 分岔的频率 $\Omega_H = \sqrt{2 - A\delta - (1 - q)B\delta} = 0.748$, 以及 0.797, 与平衡点 E_{\pm} 的 Hopf 分岔频率随参数 A 变化的趋势定量地符合.

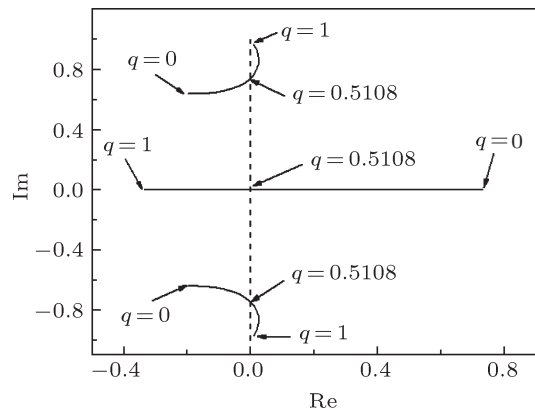


图 10 $A = 0.882$ 时非光滑分界面处广义 Jacobian 矩阵的特征曲线图

其次, 当 $A = 1.0$ 时, 系统表现为具有对称结构的围绕两个平衡点 E_{\pm} 振荡的周期运动 (图 11). 计算可知此时与 E_{\pm} 相关的特征值为 $\lambda_3 = -0.2465$, $\lambda_{1,2} = 0.0232 \pm 0.9005i$, 表明 E_{\pm} 均为不稳定焦点, 而与 E_0 相关的特征值为 $\lambda_{1,2} = -0.2445 \pm 0.6476i$, $\lambda_3 = 0.9390$, 即 E_0 为鞍式焦点.

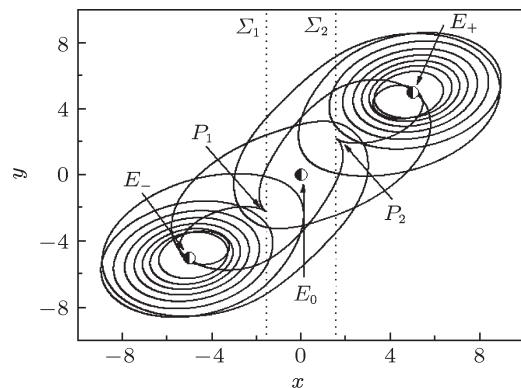


图 11 $A = 1.0$ 时对称结构的周期解

同样, 图 12 给出了其广义 Jacobian 矩阵特征值随辅助参数 q 变化在复平面内的分布情况.

显然, 当 $q = 0.6923$ 时, 其特征值将穿越虚轴, $\Omega_H = \sqrt{2 - A\delta - (1 - q)B\delta} = 0.7147$, 然而由于随 A 的增加, $P_H = \delta - A - (1 - q)B$ 从 $A < 1.0$ 向 $A > 1.0$ 的变化中从正变为负, 表明此时在非光滑分界面上的 Hopf 分岔为亚临界的, 这与 $A = 0.882$ 时产生超临界 Hopf 分岔不同, 考虑到平衡点 E_{\pm} 的超临界 Hopf 分岔特性, 故此时系统不会产生稳定的概周期运动, 依然表现为周期运动.

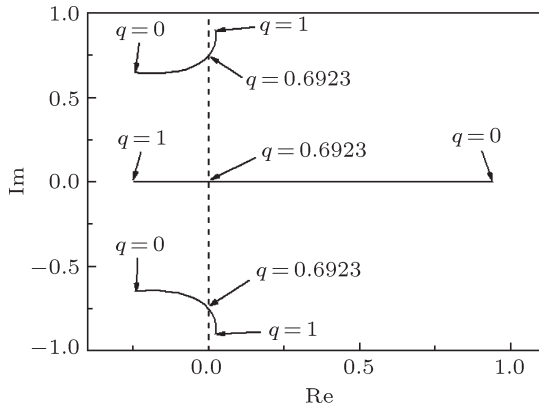


图 12 非光滑分界面处广义 Jacobian 矩阵的特征曲线图

广义 Jacobian 矩阵的特征值随辅助参数 q 变化会穿越实轴, 这就意味着在非光滑分界面上, 系统轨迹可能会在趋向不同平衡点之间转换. 从图 11 中该周期解的轨迹可以发现, 在平衡点 E_+ 和 E_- 附近的轨迹特性主要受这两个平衡点的性质影响, 当轨迹穿越分界面时, 轨迹将会受到分界面两边平衡点的特性的影响, 由于受非光滑分界面上广义 Jacobian 矩阵出现零特征值的影响, 其轨迹从围绕一平衡点的振荡在穿越非光滑分界面后会趋向于围绕另一平衡点的振荡. 通过上述理论分析, 我们可以解释图 11 所示相图的运动特征. 我们从点 P_1 出发分析轨迹的历程, 由图 13 给出的对称周期解的时间历程可以看出, 轨迹将向下运动, 此时系统轨迹的形态主要受平衡点 E_- 的影响, 系统的运动频率为 0.894, 近似等于平衡点 E_- 的 Hopf 分岔频率 Ω_H . 另外, 通过计算可以发现 E_0 处所有的特征值的实部远远大于 E_+ 和 E_- 处的特征值的实部, 说明轨迹可以迅速地穿越两个分界面, 故整个相图 11 中的大部分轨迹围绕着两个平衡点 E_{\pm} 运动, 而在平衡点 E_0 附近的时间较短. 虽然轨迹多次穿越非光滑分界面 Σ_1 和 Σ_2 , 但从 P_1 方向的轨迹在穿越非光滑分界面 Σ_1 时, 此时轨迹依然保持围绕 E_- 的振荡特性, 不会产生定性的变化; 而随着轨

迹在相空间中的扩展穿越 Σ_2 时, 由于广义 Jacobian 矩阵出现了零特征值, 使得轨迹发生定性变化, 在围绕两平衡点振荡之间转换. 当然轨迹由于惯性不会立即发生变化, 而是稍微滞后, 转化为围绕平衡

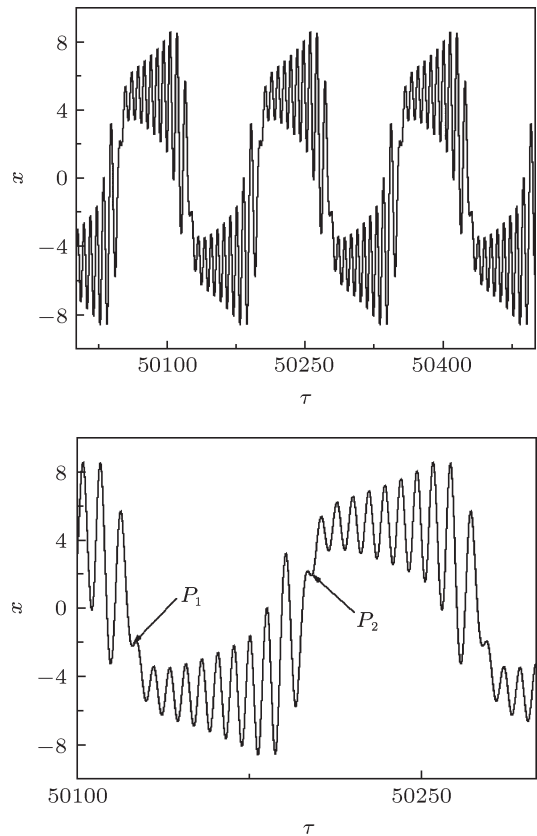


图 13 $A = 1.0$ 时系统周期解的时间历程图

点 E_+ , 并按 E_+ 处 Hopf 分岔的频率为 $\Omega_H = 0.894$ 的振荡, 轨迹在随后第二次穿越 Σ_1 发生非光滑分岔, 并到达 P_1 , 进入下一个周期运动.

6 结论

具有分段线性特性电阻的广义 BVP 电路系统随参数的变化会产生诸如周期振荡、概周期振荡以及混沌振荡等丰富的动力学特性. 通过对分界面处的非光滑分岔分析发现, 在分界面处会产生简单分岔和 Hopf 分岔, 其中简单分岔导致了系统的振荡在不同平衡点之间转换. 随着参数取值的不同, 系统相轨迹穿越非光滑分界面时产生了两种 Hopf 分岔, 一种是超临界 Hopf 分岔, 使得电路系统由周期振荡变为概周期振荡, 另一种是亚临界 Hopf 分岔, 使得电路系统依然表现为周期振荡. 另外, 非光滑分岔的产生与否, 与不同区域中平衡点的性质及

其分岔行为密切相关. 对于本文的广义 BVP 振子, 当轨迹穿越单条分界面时并不会出现简单分岔, 而当轨迹同时穿越两条分界面时, 简单分岔使得系统

的振荡在不同平衡点之间转换, 这也是导致系统的定性行为发生变化的重要条件之一, 会导致系统的振荡发生裂变或合并等现象.

-
- [1] Hodgkin A L, Huxley A F 1952 *J. Physiol.* **116** 449
- [2] Hassard B 1978 *J. Theor. Biol.* **71** 401
- [3] Guckenheimer J, Oliva R A 2002 *SIAM J. Appl. Dynamical Syst.* **1** 105
- [4] Guido S, William C 2003 *Physica D: Nonlinear Phenomena* **177** 1
- [5] Zhang H, Holdem A V 1995 *Chaos, Solitons and Fractals* **10** 303
- [6] Rajasekar S 1996 *Chaos, Solitons and Fractals* **30** 1799
- [7] Ramesh M, Narayanan S 2001 *Chaos, Solitons and Fractals* **12** 2395
- [8] Ueta T, Kawakami H 2002 *International Symposium on Circuits and Systems* Toskushima Japan, 2002 May 26–29 II-544
- [9] Wang J L, Feng G Q 2010 *Int. J. Non-Linear Mech.* **45** 608
- [10] Chimi E W, Fotsin H B, Wofo P 2008 *Physica Scripta* **77** 045001
- [11] Chen Z Y, Zhang X F, Bi Q S 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 2326 (in Chinese) [陈章耀, 张晓芳, 毕勤胜 2010 物理学报 **59** 2326]
- [12] Sekikawa M, Inaba N, Yoshinaga T, Hikiyara T 2010 *Phys. Lett. A* **374** 3745
- [13] Shimizu K, Sekikawa M, Inaba N 2011 *Phys. Lett. A* **375** 1566
- [14] Nishiuchi Y, Ueta T, Kawakami H 2006 *Chaos, Solitons and Fractals* **27** 941
- [15] Zhou G H, Xu J P, Bao B C 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 2272 (in Chinese) [周国华, 许建平, 包伯成 2010 物理学报 **59** 2272]
- [16] Gonzalo M R, Jason A C 2010 *Phys. Lett. A* **375** 143
- [17] Avramov K V, Borysiuk O V 2008 *J. Sound and Vibration* **318** 1197
- [18] Zhusubaliyev T Z, Mosekilde E 2008 *Physica D* **237** 930
- [19] Makarenkov O, Nistri P 2008 *J. Mathemat. Anal. Appl.* **338** 1401
- [20] Santos B C, Savi M A 2009 *Chaos, Solitons and Fractals* **40** 197
- [21] Zhang G, Chen G, Chen T, Lin Y 2006 *Chaos, Solitons and Fractals* **30** 1153
- [22] Avrutin V, Schanz M 2004 *Phys. Rev. E* **70** 026222
- [23] Halse C, Homer M, Bernardo M D 2003 *Chaos, Solitons and Fractals* **18** 953
- [24] Zhusubaliyev Z H, Mosekilde E 2008 *Phys. Lett. A* **372** 2237
- [25] Liu M H, Yu S M 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 5707 (in Chinese) [刘明华, 禹思敏 2006 物理学报 **55** 5707]
- [26] Guckenheimer J, Holmes P 1983 *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcation of Vector Field* (New York: Springer)
- [27] Leine R I, Campen D H 2006 *Eur. J. Mech. A Solids* **25** 595

Oscillations and non-smooth bifurcations in a generalized BVP circuit system*

Li Shao-Long¹⁾ Zhang Zheng-Di¹⁾ Wu Tian-Yi¹⁾²⁾ Bi Qin-Sheng^{1)†}

1) (*Faculty of Science, Jiangsu University, Zhenjiang 212013, China*)

2) (*General Department, ZhenJiang Watercraft College, Zhenjiang 212013, China*)

(Received 12 July 2011; revised manuscript received 5 August 2011)

Abstract

The complicated dynamical evolution of a generalized BVP circuit system with piecewise linear characteristics is explored. The phase space is divided into different types of regions by the nonsmooth boundaries. In each region, the stabilities of the equilibrium points are investigated, from which the critical conditions related to simple bifurcations as well as Hopf bifurcations are obtained. By employing the analysis of the distribution of the eigenvalues of the generalized Jacobian matrix, the bifurcation behaviors related to the nonsmooth boundaries are explored in detail. It is pointed out that when pure imaginary eigenvalues associated with the generalized Jacobian matrix appear, the Hopf bifurcation may take place, leading the system to change from periodic motion into the quasi-periodic oscillation, while when zero eigenvalue occurs, it may lead the system to oscillate between different equilibrium points. Combined with the numerical simulations, two typical oscillation behaviors of the system verify the theoretical results.

Keywords: generalized BVP oscillations, non-smooth bifurcation, generalized Jacobian matrix, Hopf bifurcation

PACS: 05.45.-a, 84.30.-r

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 10972091, 20976075) and the Advanced Talent Foundation of Jiangsu University, China (Grant No. 09JDG011).

† E-mail: qbi@ujs.edu.cn