

具有完全不确定参数的五项双曲型混沌系统的投影同步

余飞 王春华[†] 胡燕 尹晋文

(湖南大学信息科学与工程学院, 长沙 410082)

(2011年7月10日收到; 2011年8月9日收到修改稿)

提出了一个新的简单的双曲型三维自治混沌系统, 该三维混沌系统只含有五项, 并且其非线性特征主要依赖于一个非线性二次双曲正弦项和一个非线性二次交叉项. 较已有的三维混沌系统而言, 不仅系统的项要少一些, 而且在参数变化时, 呈现混沌的参数范围也很大. 对系统的一些基本动力学特性进行了数值模拟和理论分析. 同时, 还研究了具有完全不确定参数的该五项双曲型混沌系统的投影同步. 基于 Lyapunov 指数稳定性理论和 Barbalat 引理, 设计了一个新的具有参数自适应律的自适应同步控制器, 利用该控制器分别实现了两个结构相同和相异混沌系统的渐进性和全局性投影同步. 数值模拟验证了该方法的有效性和可行性.

关键词: 三维自治混沌系统, 五项双曲型混沌系统, 投影同步, 自适应控制器

PACS: 05.45.Ac, 05.45.Pq, 05.45.Xt

1 引言

在过去几十年中, 混沌已在生物工程、流行病学、保密通信和电力系统等方面得到了广泛应用^[1-4]. 自从 Lorenz 在 1963 年研究大气对流时发现第一个混沌系统以来^[5], 人们在寻找新的混沌吸引子方面做了大量研究, 如 Rössler 在 1976 年发现了只含有一个非线性项的 Rössler 系统^[6], Chen^[7] 于 1999 年在混沌系统的反控制研究中发现了一个新的系统, 被研究者称为 Chen 系统, Chen 系统被证明是 Lorenz 系统的对偶系统. 在 2002 年, Lü 和 Chen^[8] 进一步发现了一个混沌系统, 称为 Lü 系统, 该系统实现了 Lorenz 系统和 Chen 系统之间的过渡. 随后, 一个“统一系统”被构造出来^[9], 作为 Lorenz 系统、Lü 系统和 Chen 系统之间的光滑链接. Celikovsky 和 Chen^[10] 在 2002 年提出了一大类一般的混沌系统即广义 Lorenz 系统族. Liu 等^[11] 在 2004 年提出了含有平方项的 Liu 系统. 随后, 大量的三维自治混沌系统相继提出, 这些混沌系统方程右边大多含有六个或七个线性和非线性项. 由于在某些工程应用中, 方程的参数项越多, 相关的计算成本也就越多. 现在的疑问是: 是否存在一个系统, 其方程右边只含有五个参数项, 且系统

同样具有一些非常复杂和有趣的动力学行为? 本文给出了积极的回答.

自从 1990 年 Pecora 和 Carroll^[12] 首次提出了混沌同步的原理并在电路中得以实现以来, 由于混沌同步在物理学、信息科学以及保密通信等领域具有重要的应用价值, 二十多年来人们对其进行了广泛深入的研究, 并且提出了多种用以实现混沌同步的方法, 如线性和非线性反馈控制同步法^[13-19]、主动和被动控制法^[20,21]、滑模控制法^[22,23]、基于观测器控制法^[24,25]、Backstepping 方法^[26,27]、基于 H_∞ 控制器方法^[28] 及自适应完全和反相同步方法^[29-31] 等. 最近, 投影同步受到了广泛关注^[32-35], 因为投影同步可以使驱动和响应系统同步到一个比例因子上, 而且由于该比例因子存在不可预测性, 使得投影同步能更好地应用于保密通信中. 同时, 随着该比例因子的正负号选择, 投影同步囊括了完全、反相和混合同步等方法, 因此对投影同步的研究已成为混沌系统同步研究的一个热点方向. 在实际应用中, 一般混沌系统的参数常常是未知或不确定的. 因此, 对参数未知的不确定混沌系统的同步研究就显得至关重要.

本文首先提出了一个只含有五项的双曲型混沌系统, 对系统的一些基本动力学特性进行了数值

[†] E-mail: wch1227164@sina.com

模拟和理论分析. 此外, 为实现参数不确定情况下的混沌同步, 还提出了一种基于参数辨识的投影同步方法, 采用参数自适应控制策略对系统中的不确定参数进行辨识, 并设计了相应的非线性控制器, 实现了参数不确定情况下的两个混沌系统的投影同步, 包括两个相同结构的双曲型混沌系统和两个异结构混沌系统 (一个是双曲型混沌系统, 另一个是非双曲型混沌系统).

2 五项双曲型三维混沌系统及其动力学特性

五项双曲型三维自治混沌系统的数学模型描述为

$$\dot{x} = a(y - x), \quad \dot{y} = -bxz, \quad \dot{z} = \sinh(xy) - c, \quad (1)$$

其中 $a, b, c \in R^+$, x, y, z 是状态变量. 当 $a = 5, b = 25, c = 3$, 初始条件为 $[0.2, 2, 0.4]^T$ 时, 图 1(a)–(d) 为系统轨迹的相图. 从图中可以看出, 该混沌吸引子具有一些非常有趣和复杂的动力学行

为. 该三维混沌系统的三个 Lyapunov 指数分别为 $l_1 = 2.0515, l_2 = 0, l_3 = -7.0515$. 从而我们可以得到该新系统的 Lyapunov 维数为

$$D_L = j + \frac{\sum_{i=1}^j l_i}{|l_{j+1}|} = 2 + \frac{l_1 + l_2}{|l_3|} = 2 + \frac{2.0515}{|-7.0515|} = 2.291, \quad (2)$$

由此可见, 该新系统的维数是分数维数. 由方程组 (1) 可得

$$\nabla V = \frac{\partial \dot{x}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{y}}{\partial y} + \frac{\partial \dot{z}}{\partial z} = -a = -5, \quad (3)$$

这意味着, 当 $t \rightarrow \infty$ 时, 包含系统轨线的每个体积元均以指数率 -5 收缩零. 因此, 所有系统的轨迹最终渐近地运动到一个特定的零体积的极限集中, 即固定在一个吸引子上.

很明显, 该混沌系统具有 z 轴的对称性, 即满足 $(x, y, z) \rightarrow (-x, -y, z)$ 的不变形. 系统 (1) 的平衡点可以解下面代数方程求得

$$a(y - x) = 0, \quad -bxz = 0, \quad \sinh(xy) - c = 0. \quad (4)$$

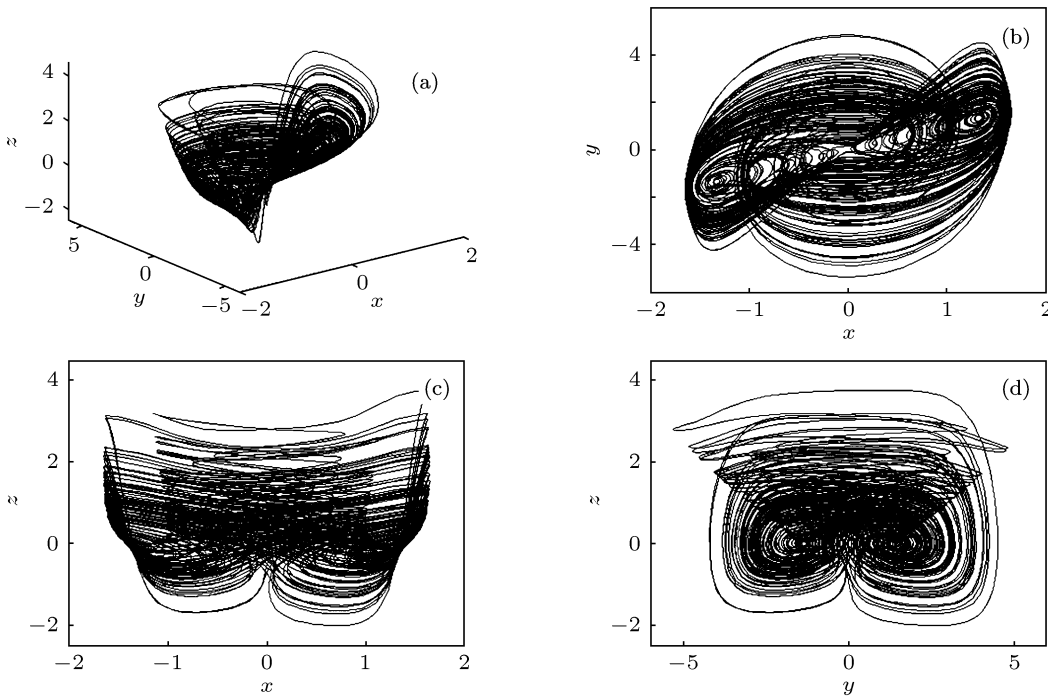


图 1 吸引子相图 (a) x - y - z 三维图; (b) x - y 平面; (c) x - z 平面; (d) y - z 平面

当 $c > 0$ 时, 系统有两个平衡点, 令 $k = c + \sqrt{c^2 + 1}$, 则系统的两个平衡点为 $E^+(\sqrt{\ln k}, \sqrt{\ln k}, 0)$ 和 $E^-(-\sqrt{\ln k}, -\sqrt{\ln k}, 0)$. 当 $a = 5, b = 25, c = 3$ 时, 系统 (1) 的两个平衡点分别为 $E^+(1.349, 1.349, 0)$ 和 $E^-(-1.349, -1.349, 0)$.

为了考察系统的稳定性, 考虑每一个平衡点所对应的 Jacobi 矩阵并计算其特征值, 相关的结果在表 1 中给出. 从表 1 中可以看出, 系统 (1) 所有平衡点都是鞍焦点, 表明该两个平衡点都是不稳定的. 通过上述理论分析和数值仿真, 证明该系统确实是一个

新的混沌系统.

表 1 平衡点所对应的特征值

E^+	E^-
$\lambda_1 = -8.3649$	$\lambda_1 = -8.3649$
$\lambda_2 = 1.6825 + 13.0121i$	$\lambda_2 = 1.6825 + 13.0121i$
$\lambda_3 = 1.6825 - 13.0121i$	$\lambda_3 = 1.6825 - 13.0121i$

Poincaré 映射反映了混沌分岔和可折叠特性, 图 2 是系统 (1) 投影在不同平面的 Poincaré 映射,

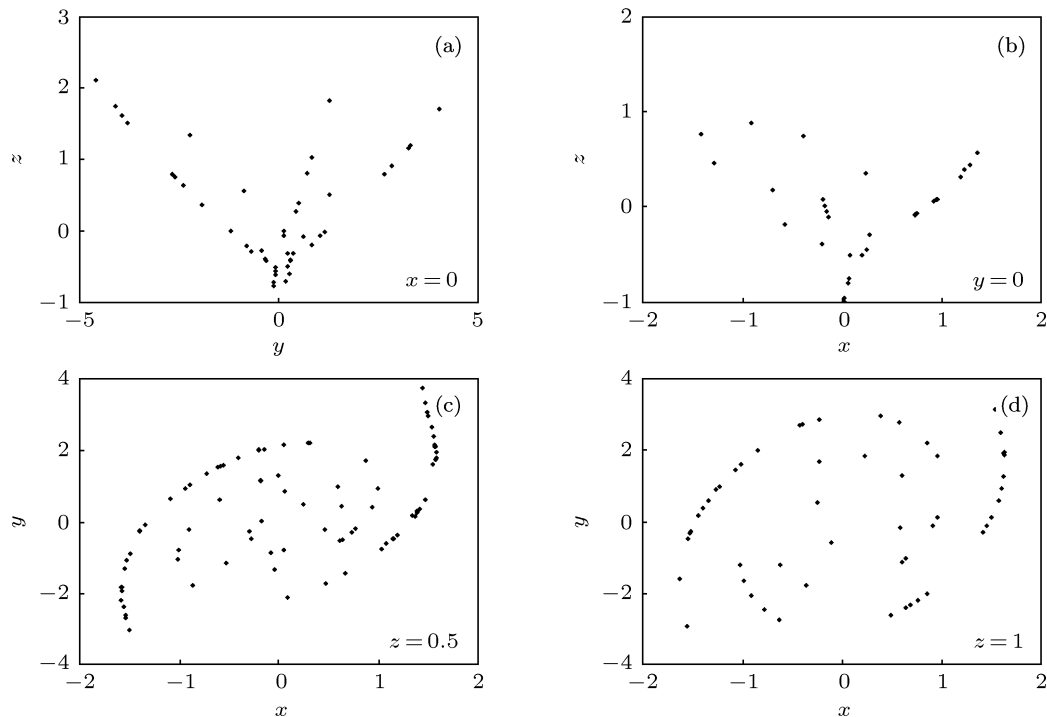


图 2 Poincaré 映射 (a) $x = 0$; (b) $y = 0$; (c) $z = 0.5$; (d) $z = 1$

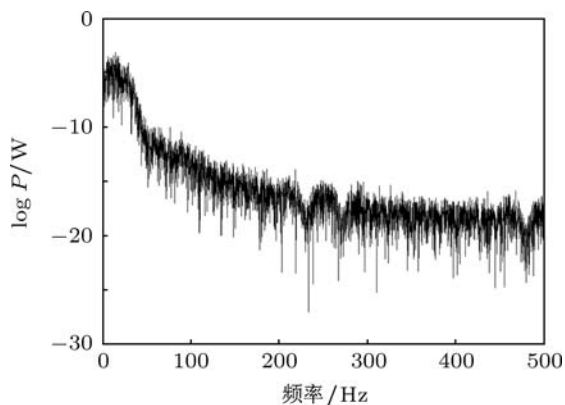


图 3 $\log |y|$ 的频谱

3 自适应投影同步

本节主要研究两个相同结构的双曲型混沌系统和两个异结构混沌系统 (一个是双曲型混沌系统,

从图 2(a), (b) 可以清晰地看出存在折叠的枝节, 图 2(c), (d) 表明吸引子在 z 轴方向为涡旋形状. 图 3 是系统 (1) 的频谱, 可以看出存在连续的宽频带特性. 图 4 是时域谱, 图中表明每个变量都是非周期振荡. 当 $a = 5, c = 3$ 时, 变化 b 可以得到如图 5 所示的 Lyapunov 指数谱. 该指数谱图是在 $b \in (0, 231]$ 之间获得的, 从指数谱图可以看到, 系统 (1) 在 $b \in (0, 231]$ 之间的很大范围上都呈现出混沌特性.

另一个是非双曲型混沌系统) 的投影同步. 我们的目的是设计一个控制器, 使响应系统轨线的幅度与驱动系统成比例关系同步, 同时采用参数自适应控制策略对系统中的不确定参数进行辨识.

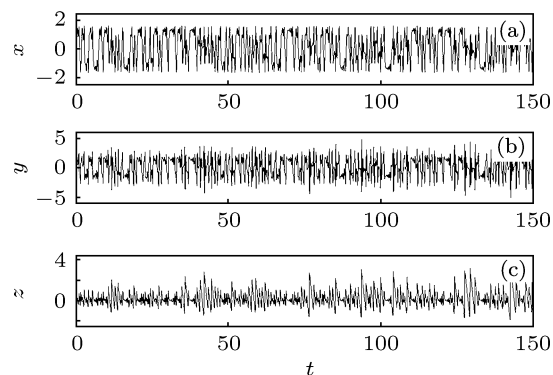
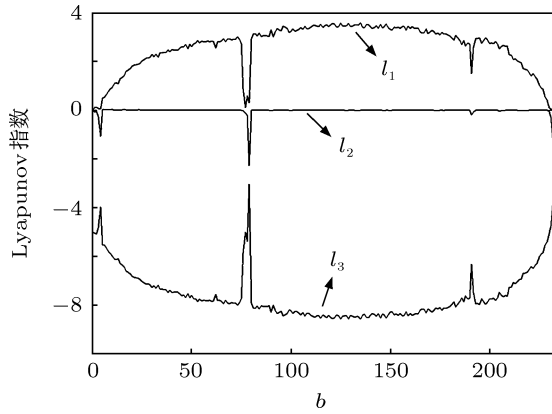


图 4 时域 (a) $t-x$ 波; (b) $t-y$ 波; (c) $t-z$ 波


 图5 随参数 b 变化的 Lyapunov 指数谱

3.1 两个相同的双曲型混沌系统的自适应投影同步

对两个相同的双曲型混沌系统的自适应投影同步问题的研究, 得到了一些全局渐进同步的条件. 注意, 驱动系统和响应系统的初始条件是不相同的, 驱动系统重新描述为

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= a(y_1 - x_1), & \dot{y}_1 &= -bx_1z_1, \\ \dot{z}_1 &= \sinh(x_1y_1) - c. \end{aligned} \quad (5)$$

假设系统 (5) 的参数都是不确定的, 响应系统为

$$\begin{aligned} \dot{x}_2 &= a(y_2 - x_2) + u_1, \\ \dot{y}_2 &= -bx_2z_2 + u_2, \\ \dot{z}_2 &= \sinh(x_2y_2) - c + u_3, \end{aligned} \quad (6)$$

其中 u_1, u_2, u_3 为非线性控制器, 用来实现系统 (5) 和 (6) 同步. 为了设计这些控制器, 使响应系统轨线的幅度与驱动系统成比例关系同步, 记状态误差信号为 $e_1 = x_2 - \varepsilon x_1, e_2 = y_2 - \varepsilon y_1, e_3 = z_2 - \varepsilon z_1$, 其中 ε 为比例因子. 则误差系统方程为

$$\begin{aligned} \dot{e}_1 &= a(e_2 - e_1) + u_1, \\ \dot{e}_2 &= b\varepsilon x_1z_1 - bx_2z_2 + u_2, \\ \dot{e}_3 &= \sinh(x_2y_2) - \varepsilon \sinh(x_1y_1) \\ &\quad + (\varepsilon - 1)c + u_3. \end{aligned} \quad (7)$$

若没有施加控制器, 系统 (5) 和 (6) 在初始条件不同的情况下, 系统的轨线将很快分离而互不相干. 然而, 通过施加合适的控制器和对系统中的不确定参数进行辨识, 系统 (5) 和 (6) 会全局渐进同步. 为了达到该目的, 我们对系统 (6) 设计合适的控制器

$$\begin{aligned} u_1 &= -\hat{a}(e_2 - e_1) - p_1e_1, \\ u_2 &= -\hat{b}\varepsilon x_1z_1 + \hat{b}x_2z_2 - p_2e_2, \\ u_3 &= \varepsilon \sinh(x_1y_1) - \sinh(x_2y_2) \end{aligned}$$

$$- (\varepsilon - 1)\hat{c} - p_3e_3, \quad (8)$$

和参数自适应律

$$\begin{aligned} \dot{\hat{a}} &= e_1e_2 - e_1^2, \\ \dot{\hat{b}} &= \varepsilon x_1z_1e_2 - x_2z_2e_2, \\ \dot{\hat{c}} &= (\varepsilon - 1)e_3, \end{aligned} \quad (9)$$

其中 $\hat{a}, \hat{b}, \hat{c}$ 分别为 a, b, c 的估计值, p_1, p_2, p_3 是正的控制系数用来控制收敛速度.

定理 1 通过对系统 (6) 使用自适应控制律和利用等式 (9) 对系统中的不确定参数进行辨识, 在任何初始条件下, 响应系统轨线的幅度与驱动系统都会按比例因子 ε 成比例关系全局渐进同步.

证明 使用自适应控制律 (8) 和参数辨识律 (9), 误差系统方程 (7) 变为

$$\begin{aligned} \dot{e}_1 &= \tilde{a}(e_2 - e_1) - p_1e_1, \\ \dot{e}_2 &= \tilde{b}\varepsilon x_1z_1 - \tilde{b}x_2z_2 - p_2e_2, \\ \dot{e}_3 &= (\varepsilon - 1)\tilde{c} - p_3e_3, \end{aligned} \quad (10)$$

其中 $\tilde{a} = a - \hat{a}, \tilde{b} = b - \hat{b}, \tilde{c} = c - \hat{c}$. 选取 Lyapunov 函数为

$$\mathbf{V} = \frac{1}{2} (e^T e + \tilde{a}^2 + \tilde{b}^2 + \tilde{c}^2). \quad (11)$$

对 \mathbf{V} 求导并利用 (9) 和 (10) 式可得

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{V}} &= e^T \dot{e} + \tilde{a}\dot{\tilde{a}} + \tilde{b}\dot{\tilde{b}} + \tilde{c}\dot{\tilde{c}} \\ &= e_1\dot{e}_1 + e_2\dot{e}_2 + e_3\dot{e}_3 + \tilde{a}\left(-\dot{\tilde{a}}\right) \\ &\quad + \tilde{b}\left(-\dot{\tilde{b}}\right) + \tilde{c}\left(-\dot{\tilde{c}}\right) \\ &= e_1[\tilde{a}(e_2 - e_1) - p_1e_1] \\ &\quad + e_2[\tilde{b}\varepsilon x_1z_1 - \tilde{b}x_2z_2 - p_2e_2] \\ &\quad + e_3[(\varepsilon - 1)\tilde{c} - p_3e_3] + \tilde{a}(-e_1e_2 + e_1^2) \\ &\quad + \tilde{b}(-\varepsilon x_1z_1e_2 + x_2z_2e_2) \\ &\quad + \tilde{c}[-(\varepsilon - 1)e_3] \\ &= -p_1e_1^2 - p_2e_2^2 - p_3e_3^2 \\ &= -e^T \mathbf{P}e, \end{aligned} \quad (12)$$

其中 $\mathbf{P} = \text{diag}\{p_1, p_2, p_3\}$. 由于 $\dot{\mathbf{V}} \leq 0$ 有 $e, \hat{a}, \hat{b}, \hat{c} \in L_\infty$. 由误差系统 (7), 我们有 $\dot{e} \in L_\infty$. 由于 $\dot{\mathbf{V}} = -e^T \mathbf{P}e$ 和 \mathbf{P} 是一个正定矩阵, 有

$$\begin{aligned} \int_0^t \lambda_{\min}(\mathbf{P}) \|e\|^2 dt &\leq \int_0^t e^T \mathbf{P}e dt \\ &= \int_0^t -\dot{\mathbf{V}} dt = \mathbf{V}(0) - \mathbf{V}(t) \leq \mathbf{V}(0), \end{aligned} \quad (13)$$

其中 $\lambda_{\min}(\mathbf{P})$ 是正定矩阵 \mathbf{P} 的最小特征值. 因此 $\dot{e} \in L_\infty$, 根据 Barbalat 引理, 当 $t \rightarrow \infty$ 时,

$e_1(t), e_2(t), e_3(t) \rightarrow 0$. 即系统 (5) 和系统 (6) 全局渐近投影同步.

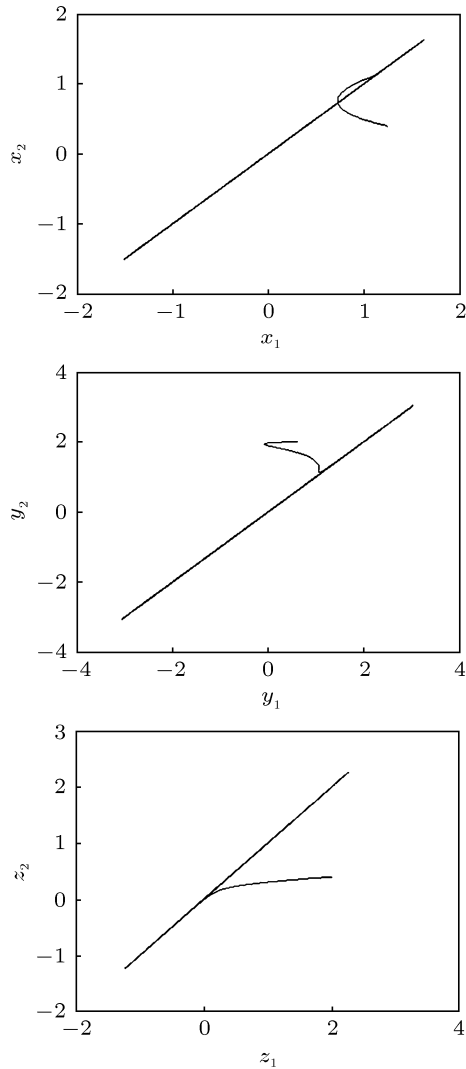


图6 响应系统和驱动系统状态变量同步图

注意当 $\varepsilon \neq 0$, 系统 (5) 和系统 (6) 能全局渐近投影同步. 特别是当 $\varepsilon = 1$ 时, 称为全局完全同步; 当 $\varepsilon = -1$ 时, 称为全局反同步. 所提出的投影同步方法同样可以应用于两个不同结构的三维自治混沌系统中.

为了验证该方法的有效性, 采用四阶 Runge-Kutta 法进行数值仿真, 选取“未知”参数 $a = 5, b = 25, c = 3$ 和控制增益 $(p_1, p_2, p_3, p_4) = (20, 20, 20)$. 系统 (5) 和 (6) 的状态初始值为 $x_1(0) = 0.2, y_1(0) = 2, z_1(0) = 0.4$ 和 $x_2(0) = 2, y_2(0) = 0.6, z_2(0) = 2$. 自适应参数的初始值为 $\hat{a}(0) = \hat{b}(0) = \hat{c}(0) = 0.1$. 当 $\varepsilon = 1$ 时, 系统 (5) 和 (6) 的状态变量之间的关系如图 6 所示. 可以看出, 响应系统和驱动系统可以达到完全的全局渐进同步. 图 7 是同步

误差 e 曲线图, 可见同步误差在很短的时间内就趋于零值. 图 8 是参数 $\hat{a}, \hat{b}, \hat{c}$ 估计值的收敛曲线, 可知参数估计值收敛于常值.

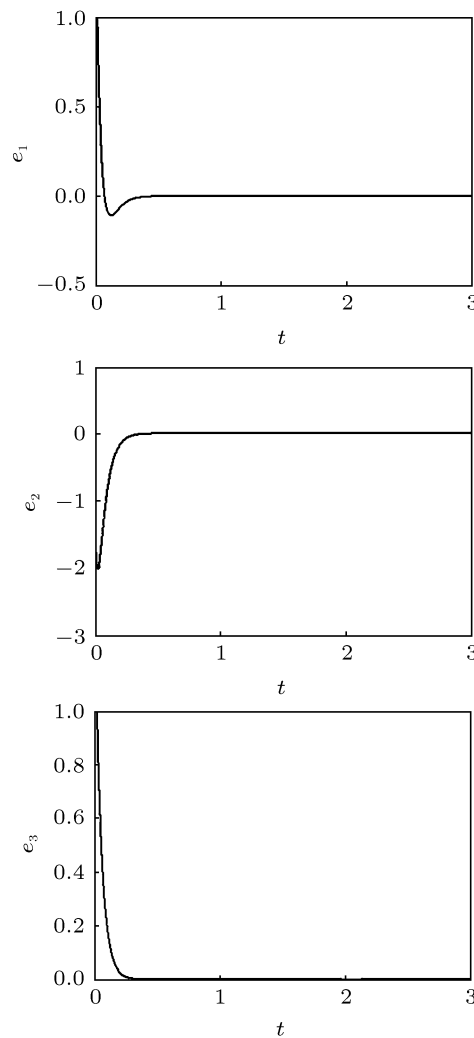


图7 同步误差曲线

3.2 双曲型和非双曲型混沌系统的自适应投影同步

在这一小节, 我们研究两个结构相异的混沌系统的自适应投影同步问题. 注意, 驱动系统和响应系统的初始条件是不相同的. 在这里, 系统 (5) 仍然选为驱动系统, 选取 Lorenz 系统为非双曲型系统和响应系统, 描述为

$$\begin{aligned} \dot{x}_2 &= d(y_2 - x_2) + u_1, \\ \dot{y}_2 &= fx_2 - x_2z_2 - y_2 + u_2, \\ \dot{z}_2 &= x_2y_2 - gz_2 + u_3, \end{aligned} \tag{14}$$

其中 d, f, g 为系统参数; u_1, u_2, u_3 为非线性控制器, 用来实现系统 (5) 和 (14) 同步. 为了设计这

些控制器,使响应系统轨线的幅度与驱动系统成比例关系同步,记状态误差信号为 $e_1 = x_2 - \varepsilon x_1$, $e_2 = y_2 - \varepsilon y_1$, $e_3 = z_2 - \varepsilon z_1$, 其中 ε 为比例因子. 则误差系统方程为

$$\begin{aligned} \dot{e}_1 &= d(y_2 - x_2) - a\varepsilon(y_1 - x_1) + u_1, \\ \dot{e}_2 &= f x_2 - x_2 z_2 + b\varepsilon x_1 z_1 - y_2 + u_2, \\ \dot{e}_3 &= x_2 y_2 - \varepsilon \sinh(x_1 y_1) - g z_2 \\ &\quad + c\varepsilon + u_3. \end{aligned} \quad (15)$$

若没有施加控制器,系统(5)和(14)在初始条件不同的情况下,系统的轨线将很快分离而互不相干. 然而,通过施加合适的控制器和对系统中的不确定参数进行辨识,系统(5)和(14)会全局渐进同步. 为了达到该目的,我们对系统(14)设计合适的控制器

$$\begin{aligned} u_1 &= -\hat{d}(y_2 - x_2) + \hat{a}\varepsilon(y_1 - x_1) - p_1 e_1, \\ u_2 &= -\hat{f} x_2 + x_2 z_2 - \hat{b}\varepsilon x_1 z_1 + y_2 - p_2 e_2, \\ u_3 &= -x_2 y_2 + \varepsilon \sinh(x_1 y_1) + \hat{g} z_2 \\ &\quad - \hat{c}\varepsilon - p_3 e_3, \end{aligned} \quad (16)$$

和参数自适应律

$$\begin{aligned} \dot{\hat{a}} &= -\varepsilon(y_1 - x_1)e_1, \quad \dot{\hat{b}} = \varepsilon x_1 z_1 e_2, \\ \dot{\hat{c}} &= \varepsilon e_3, \quad \dot{\hat{d}} = (y_2 - x_2)e_1, \\ \dot{\hat{f}} &= x_2 e_2, \quad \dot{\hat{g}} = -z_2 e_3, \end{aligned} \quad (17)$$

其中 $\hat{a}, \hat{b}, \hat{c}, \hat{d}, \hat{f}, \hat{g}$ 分别为 a, b, c, d, f, g 的估计值; p_1, p_2, p_3 是正的控制系数,用来控制收敛速度.

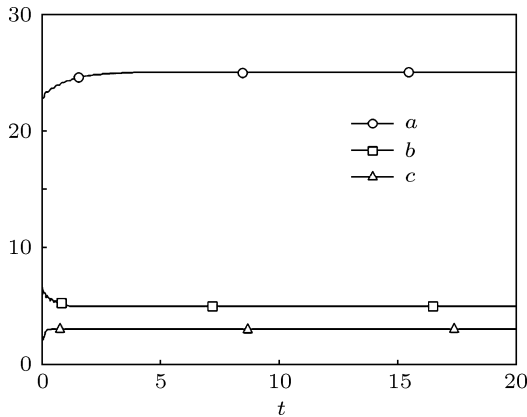


图8 参数收敛曲线

定理 2 通过对系统(14)使用自适应控制律和利用(17)式对系统中的不确定参数进行辨识,在任何初始条件下,响应系统轨线的幅度与驱动系统都会按比例因子 ε 成比例关系全局渐进同步.

证明 使用自适应控制律(16)和参数辨识

律(17),误差系统方程(15)变为

$$\begin{aligned} \dot{e}_1 &= \tilde{d}(y_2 - x_2) - \tilde{a}\varepsilon(y_1 - x_1) - p_1 e_1, \\ \dot{e}_2 &= \tilde{f} x_2 + \tilde{b}\varepsilon x_1 z_1 - p_2 e_2, \\ \dot{e}_3 &= -\tilde{g} z_2 + \tilde{c}\varepsilon - p_3 e_3, \end{aligned} \quad (18)$$

其中 $\tilde{a} = a - \hat{a}$, $\tilde{b} = b - \hat{b}$, $\tilde{c} = c - \hat{c}$, $\tilde{d} = d - \hat{d}$, $\tilde{f} = f - \hat{f}$ 和 $\tilde{g} = g - \hat{g}$. 选取 Lyapunov 函数为

$$V = \frac{1}{2}(e^T e + \tilde{a}^2 + \tilde{b}^2 + \tilde{c}^2 + \tilde{d}^2 + \tilde{f}^2 + \tilde{g}^2). \quad (19)$$

对 V 求导并利用(17)和(18)式可得

$$\begin{aligned} \dot{V} &= e^T \dot{e} + \tilde{a}\dot{\tilde{a}} + \tilde{b}\dot{\tilde{b}} + \tilde{c}\dot{\tilde{c}} + \tilde{d}\dot{\tilde{d}} + \tilde{f}\dot{\tilde{f}} + \tilde{g}\dot{\tilde{g}} \\ &= e_1 \dot{e}_1 + e_2 \dot{e}_2 + e_3 \dot{e}_3 + \tilde{a}(-\dot{\tilde{a}}) + \tilde{b}(-\dot{\tilde{b}}) \\ &\quad + \tilde{c}(-\dot{\tilde{c}}) + \tilde{d}(-\dot{\tilde{d}}) + \tilde{f}(-\dot{\tilde{f}}) + \tilde{g}(-\dot{\tilde{g}}) \\ &= e_1 [\tilde{d}(y_2 - x_2) - \tilde{a}\varepsilon(y_1 - x_1) - p_1 e_1] \\ &\quad + e_2 [\tilde{f} x_2 + \tilde{b}\varepsilon x_1 z_1 - p_2 e_2] \\ &\quad + e_3 [-\tilde{g} z_2 + \tilde{c}\varepsilon - p_3 e_3] \\ &\quad + \tilde{a}[\varepsilon(y_1 - x_1)e_1] + \tilde{b}[-\varepsilon x_1 z_1 e_2] \\ &\quad + \tilde{c}[-\varepsilon e_3] + \tilde{d}[-(y_2 - x_2)e_1] \\ &\quad + \tilde{f}(-x_2 e_2) + \tilde{g}(z_2 e_3) \\ &= -p_1 e_1^2 - p_2 e_2^2 - p_3 e_3^2 = -e^T P e, \end{aligned} \quad (20)$$

其中 $P = \text{diag}\{p_1, p_2, p_3\}$. 由于 $\dot{V} \leq 0$ 有 $e, \tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{c}, \tilde{d}, \tilde{f}, \tilde{g} \in L_\infty$. 由误差系统(18),我们有 $\dot{e} \in L_\infty$. 由于 $\dot{V} = -e^T P e$ 和 P 是一个正定矩阵,有

$$\begin{aligned} \int_0^t \lambda_{\min}(P) \|e\|^2 dt &\leq \int_0^t e^T P e dt \\ &= \int_0^t -\dot{V} dt = V(0) - V(t) \leq V(0), \end{aligned} \quad (21)$$

其中 $\lambda_{\min}(P)$ 是正定矩阵 P 的最小特征值. 因此 $\dot{e} \in L_\infty$, 根据 Barbalat 引理, 当 $t \rightarrow \infty$ 时, $e_1(t), e_2(t), e_3(t) \rightarrow 0$. 即系统(5)和系统(14)全局渐进投影同步.

为了验证该方法的有效性,采用四阶 Runge-Kutta 法进行数值仿真,选取“未知”参数 $a = 5$, $b = 25$, $c = 3$ 和 $d = 10$, $f = 8/3$, $g = 28$ 和控制增益 $(p_1, p_2, p_3) = (80, 80, 80)$. 系统(5)和(14)的状态初始值为 $x_1(0) = 0.2$, $y_1(0) = 2$, $z_1(0) = 0.4$ 和 $x_2(0) = 35$, $y_2(0) = 30$, $z_2(0) = 35$. 自适应参数的初始值为 $\hat{a}(0) = \hat{b}(0) = \hat{c}(0) = \hat{d}(0) = \hat{f}(0) = \hat{g}(0) = 0.1$. 当 $\varepsilon = -1$ 时,系统(5)和(6)随时间变化的状态轨线如图9所示.

可以看出, 响应系统的轨线和驱动系统相位正好相差 180° , 为反同步. 图 10 是同步误差 e 曲线图, 可见同步误差逐渐趋于零值. 图 11 是控制增益 $(p_1, p_2, p_3) = (20, 20, 20)$ 时的参数 $\hat{a}, \hat{b}, \hat{c}, \hat{d}, \hat{f}, \hat{g}$ 估计值的收敛曲线, 可知参数估计值最终收敛于常值.

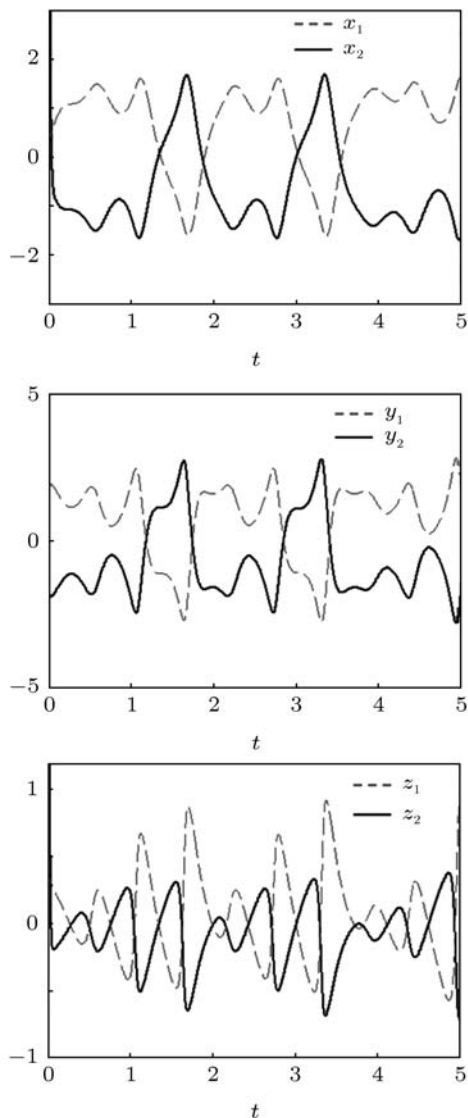


图9 响应系统和驱动系统状态变量轨线图

4 结论

本文首先提出了一个简单的五项双曲型三维自治混沌系统, 对该系统的一些基本的动力学特性进行了数值模拟和理论分析. 同时, 还研究了具有参数完全不确定的该五项双曲型混沌系统的投影同步. 基于 Lyapunov 稳定性理论和 Barbalat 引理, 给出了自适应同步控制器的设计方法和构造控制

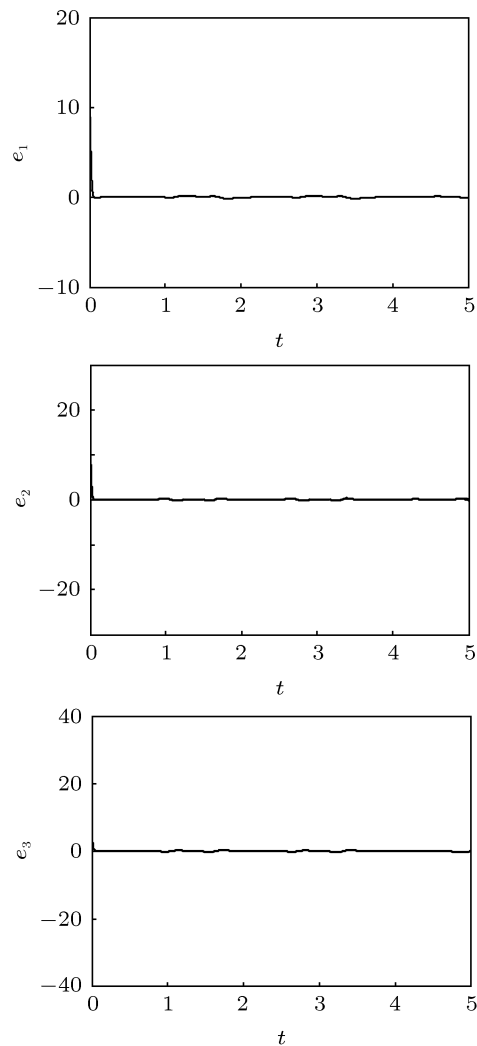


图10 同步误差曲线

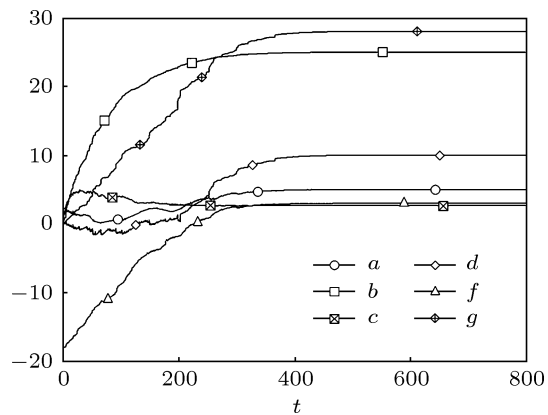


图11 参数收敛曲线

器及自适应律的解析式, 使得系统参数识别和两个相同结构和相异结构混沌系统能全局渐近同步. 对相关方法进行了数值模拟, 进一步验证了所提出方法的可行性和有效性.

- [1] Han J J, Fu W J 2010 *Chin. Phys. B* **19** 010205
- [2] Di G H, Xu Y, Xu W, Gu R C 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 020504 (in Chinese) [狄根虎, 许勇, 徐伟, 顾仁财 2011 物理学报 **60** 020504]
- [3] Liu Y M, Zhang Y H, Yang J Q 2009 *J. Circuits Syst.* **14** 116 (in Chinese) [刘玉民, 张雨虹, 杨金泉 2009 电路与系统学报 **14** 116]
- [4] Huang C H, Lin C H, Kuo C L 2011 *IEEE Trans. Power Delivery* **26** 944
- [5] Lorenz E N 1963 *J. Atmos. Sci.* **20** 130
- [6] Rössler O E 1976 *Phys. Lett. A* **57** 397
- [7] Chen G, Ueta T 1999 *Int. J. Bifur. Chaos* **9** 1465
- [8] Lü J, Chen G 2002 *Int. J. Bifur. Chaos* **12** 659
- [9] Lü J, Chen G, Cheng D, Celikovsky S 2002 *Int. J. Bifur. Chaos* **12** 2917
- [10] Celikovsky S, Chen G 2002 *Int. J. Bifur. Chaos* **12** 1789
- [11] Liu C, Liu T, Liu L, Liu K 2004 *Chaos, Solitons and Fractals* **22** 1031
- [12] Pecora L M, Carroll T L 1990 *Phys. Rev. Lett.* **64** 821
- [13] Pan L, Zhou W, Zhou L, Sun K 2011 *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.* **16** 2628
- [14] Liu Y Z, Jiang C S, Lin C S 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 709 (in Chinese) [刘扬正, 姜长生, 林长圣 2008 物理学报 **57** 709]
- [15] Wang F Q, Liu C X 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 5055 (in Chinese) [王发强, 刘崇新 2006 物理学报 **55** 5055]
- [16] Xu F, Yu P 2010 *J. Math. Anal. Appl.* **362** 252
- [17] Chen Z S, Sun K H, Zhang T S 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 2580 (in Chinese) [陈志盛, 孙克辉, 张泰山 2005 物理学报 **54** 2580]
- [18] Liu Y Z, Jiang C S, Lin C S, Jiang Y M 2007 *Chin. Phys. B* **16** 660
- [19] Wu X J, Wang X Y 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 6261 (in Chinese) [武相军, 王兴元 2006 物理学报 **55** 6261]
- [20] Cai G L, Huang J J 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 3997 (in Chinese) [蔡国梁, 黄娟娟 2006 物理学报 **55** 3997]
- [21] Wang F Q, Liu C X 2006 *Chin. Phys. B* **15** 1971
- [22] Guo H J, Yin Y W, Wang H M 2008 *Chin. Phys. B* **17** 1652
- [23] Li X C, Xu W, Xiao Y Z 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 4721 (in Chinese) [李秀春, 徐伟, 肖玉柱 2008 物理学报 **57** 4721]
- [24] Hua C C, Guan X P 2004 *Chin. Phys. B* **13** 1391
- [25] Chen X R, Liu C X, Li Y X 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 1453 (in Chinese) [陈向荣, 刘崇新, 李永勋 2008 物理学报 **57** 1453]
- [26] Njah A N 2010 *Nonlinear Dyn.* **61** 1
- [27] Lü L, Zhang Q L, Guo Z A 2008 *Chin. Phys. B* **17** 0498
- [28] Zheng H Q, Jing Y W 2011 *Chin. Phys. B* **20** 060504
- [29] Zhang Q, Lü J, Chen S 2010 *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.* **15** 3067
- [30] Li X F, Leung A C S, Han X P, Liu X J, Chu Y D 2011 *Nonlinear Dyn.* **63** 263
- [31] Taghvafard H, Erjaee G H 2011 *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.* **16** 4079
- [32] Hu M F, Xu Z Y 2007 *Chin. Phys. B* **16** 3231
- [33] Cai N, Jing Y, Zhang S 2010 *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.* **15** 1613
- [34] Ghosh D, Bhattacharya S 2010 *Nonlinear Dyn.* **61** 11
- [35] Dai H, Jia L X, Hui M, Si G Q 2011 *Chin. Phys. B* **20** 040507

Projective synchronization of a five-term hyperbolic-type chaotic system with fully uncertain parameters*

Yu Fei Wang Chun-Hua[†] Hu Yan Yin Jin-Wen

(*College of Information Science and Engineering, Hunan University, Changsha 410082, China*)

(Received 10 July 2011; revised manuscript received 9 August 2011)

Abstract

A new simple hyperbolic-type three-dimensional autonomous chaotic system is proposed. It is of interest that the chaotic system has only five terms which mainly rely on a nonlinear quadratic hyperbolic sine term and a quadratic cross-product term. Compared with other three-dimensional chaotic systems, the new system has not only less terms, but also a wider range of chaos when the parameter varies. Basic dynamical properties of the system are studied by numerical and theoretical analysis. Moreover the projective synchronization of the five-term hyperbolic-type chaotic system with fully uncertain parameters is also investigated in this paper. Based on Lyapunov stability theory and Barbalat's lemma, a new adaptive controller with parameter update law is designed to projectively synchronize two chaotic systems asymptotically and globally, including two identical exponential-type chaotic systems and two non-identical chaotic systems. Numerical simulations show the effectiveness and the feasibility of the developed methods.

Keywords: three-dimensional autonomous chaotic system, five-term hyperbolic-type chaotic system, projective synchronization, adaptive controller

PACS: 05.45.Ac, 05.45.Pq, 05.45.Xt

[†] E-mail: wch1227164@sina.com