

# 参数未知神经元模型的全阶与降阶最优同步\*

王兴元<sup>†</sup> 任小丽 张永雷

(大连理工大学电子信息与电气工程学部, 大连 116024)

(2010年11月18日收到; 2011年8月1日收到修改稿)

基于 Lyapunov 稳定性理论、最优控制原理以及分步设计方法, 为神经元系统设计了非线性反馈控制器和最优控制器. 其中非线性反馈控制器能使得两个神经元系统之间的轨道误差趋于零, 最优控制器使得在同步过程中所花费的能量达到最低. 本文以 Cable 模型为例, 实现了两个神经元模型的全阶最优同步; 以 Cable 模型和 Hindmarsh-Rose (HR) 模型为例, 实现了两个神经元模型的降阶最优同步; 同时, 均能有效地辨识出系统参数. 最后通过数值模拟进一步验证了本方案的有效性.

**关键词:** 最优同步, 全阶与降阶, 分步设计, 神经元

**PACS:** 05.45.Xt, 05.45.Pq, 05.45.Gg

## 1 引言

近年来, 为模拟真实的神经系统, 人们提出了很多神经元模型<sup>[1-3]</sup>. 在神经系统中一般存在着或简单或复杂的混沌现象<sup>[4]</sup>. 实验研究表明在皮质的突起中隐含着同步的神经元振荡<sup>[5,6]</sup>, 为了完成关键的功能, 一系列神经元可以同步, 如生物信息处理<sup>[7,8]</sup>; 而另一方面, 过多神经元的同步会引起动力学病理<sup>[9]</sup>. 神经元之间是通过特殊的途径连接在一起, 如间隙连接<sup>[10]</sup>. 间隙连接在揭示神经系统的通信途径方面起重要的作用. 自从 20 世纪 90 年代初 Pecora 和 Carroll 发现混沌同步并给出了混沌同步的方法, 至今人们已经提出了各种不同的混沌控制和同步方法<sup>[11-14]</sup>. 目前, 神经元及神经网络中的混沌同步已引起了人们特别的关注<sup>[15-20]</sup>, 尤其是在耦合神经元的方面, 已取得了很多有价值的成果<sup>[21,22]</sup>.

以上文献中对单个神经元或是耦合神经元的同步研究, 大多基于自适应方法, 以消除非线性系统中的非线性项, 但是没有考虑到这个过程中所使用的能量, 而能量问题是实际工程中必须要考虑的因素. 文献 [23] 中研究了两个相同结构系统的最优同步

问题, 该方法只能用于具有相同结构的全阶最优同步, 对于不同阶的同步则不适用. 而实际中, 如大脑神经元的同步, 或是心肺之间的同步均属于不同结构神经元的同步<sup>[24-26]</sup>. 此外, 大部分对于神经元系统的研究都是基于参数已知的假设<sup>[17,20-22]</sup>, 而在实际的系统中, 很多情况下无法得知其参数数值. 为了使得混沌同步能更适用于实际系统, 本文着重系统参数未知的全阶或降阶神经元的最优同步问题.

## 2 系统描述

### 2.1 Cable 模型

文献 [2] 中描述了 Cylindrical cell 模型, 在实际应用情况下, 对其施加外部电刺激, 其微分方程描述如下:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x(x-1)(1-r_1x) - y + I(t), \\ \dot{y} &= b_1x,\end{aligned}\quad (1)$$

其中  $x$  和  $y$  分别为 Cable 模型的膜电位和恢复变量;  $I(t)$  是形式为  $I(t) = A/\omega \cos(\omega t)$  的外部电刺激, 其中  $A$  和  $\omega = 2\pi f$  分别为其振幅和频率; 并且

\* 国家自然科学基金 (批准号: 61173183, 60573172, 60973152)、高等学校博士学科点专项科研基金 (批准号: 20070141014) 和辽宁省自然科学基金 (批准号: 20082165) 资助的课题.

<sup>†</sup> E-mail: wangxy@dlut.edu.cn

当  $b_1 = 1, r_1 = 10, A = 0.1, f = 127.1$  时该神经元模型表现出混沌行为, 其混沌吸引子如图 1(a) 所示.

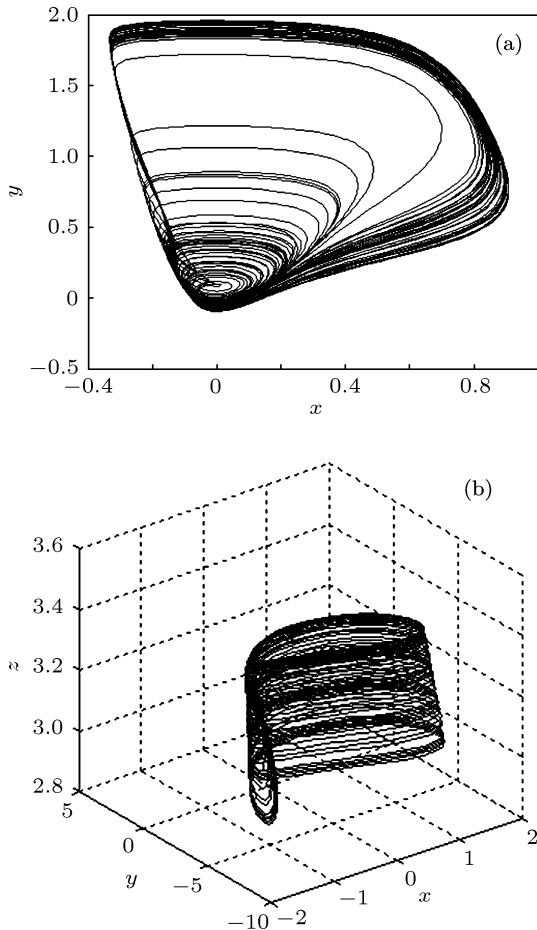


图 1 混沌吸引子 (a) 神经元模型 1; (b) 神经元模型 2

## 2.2 HR 神经元模型

早在 1984 年, Hindmarsh 和 Rose 提出了 HR 神经元模型 [3], 该模型的动力学方程描述如下:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y - a_2x^3 + b_2x^2 - z + I_0, \\ \dot{y} &= c_2 - d_2x - y, \\ \dot{z} &= r_2(s_2(x - g_2) - z), \end{aligned} \quad (2)$$

其中状态变量  $x$  是膜电位,  $y$  表示在膜之间通过快速离子通道的离子传输,  $z$  表示通过慢速通道的离子传输. 在这里  $I_0 = 3.2$ , 为施加给 HR 神经元的外部电刺激. 当系统参数  $a_2 = 1, b_2 = 3, c_2 = 1, d_2 = 5, r_2 = 0.006, s_2 = 4, g_2 = -1.6$  时, HR 神经元模型表现出混沌行为, 其混沌吸引子如图 1(b) 所示.

## 3 理论与方法

### 3.1 全阶与降阶同步

考虑以下的非线性动力学方程:

$$\dot{x} = f(x, t), \quad (3)$$

$$\dot{y} = g(y, t) + G(y, t)p + v + u. \quad (4)$$

假设系统 (3) 为驱动系统, 系统 (4) 为响应系统. 在 (3) 和 (4) 式中,  $x = (x_1, x_2, \dots, x_{m_1})^T \in R^{m_1}$ ,  $y = (y_1, y_2, \dots, y_{m_2})^T \in R^{m_2} (m_2 \leq m_1)$ ;  $f : R^{m_1} \times R^+ \rightarrow R^{m_1}$ ,  $g : R^{m_2} \times R^+ \rightarrow R^{m_2}$  以及  $G : R^{m_2} \times R^+ \rightarrow R^{m_2 \times k}$  均是连续的非线性函数;  $v$  为反馈控制器,  $u$  为最优控制器; 假设响应系统是未知的,  $p \in R^k$  是未知的参数向量.

当  $m_2 = m_1$  时, 系统 (3) 和 (4) 之间的同步即为全阶同步.

当  $m_2 < m_1$  时, 系统 (3) 和 (4) 之间的同步即为降阶同步. 为了实现降阶同步, 需将驱动系统投影到平面  $Q$  上, 并且该平面与响应系统有相等的维度. 投影后的驱动系统如下所示:

$$\dot{x}_q = f_q(x, t), \quad (5)$$

其中  $x_q \in R^{m_2}$ . 因此降阶同步实际上转化成为部分驱动系统与响应系统的全阶同步.

### 3.2 最优同步

在 (4) 式中,  $u$  即为待确定的最优控制器. 最优同步的目标就是所设计的最优控制器  $u$  能使得

$$J = \int_{t_0}^{\infty} [h(x) + u^T \Theta u] dt, \quad (6)$$

取最小值, 其中  $h(x)$  是连续可微的正定函数,  $\Theta = \text{diag}(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{m_2})$  是对角矩阵, 且  $\theta_i \neq 0$ . 根据动态规划原理, 最优同步问题转化为求一个最优控制器  $u$  满足 Hamilton-Jacobi-Bellman

$$\min_u [\dot{J} + w] = \partial[\dot{J} + w] / \partial u = 0, \quad (7)$$

其中  $w = h(x) + u^T \Theta u$ .

## 4 控制器设计

### 4.1 Cable 模型的全阶同步

首先设计非线性反馈控制器.

考虑两个 Cable 模型, 设 (1) 式为驱动系统, (8) 式为响应系统

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1(x_1 - 1)(1 - r_1 x_1) \\ &\quad - y_1 + I_1 + v_1 + u_1, \\ \dot{y}_1 &= b_1 x_1 + v_2 + u_2, \end{aligned} \quad (8)$$

其中  $v_i$  和  $u_i$  ( $i = 1, 2$ ) 分别为待确定的非线性反馈控制器和最优控制器. 定义同步误差  $e_1 = x_1 - x$ ,  $e_2 = y_1 - y$ , 可以得到两个 Cable 模型的误差动力系统为

$$\begin{aligned} \dot{e}_1 &= r_1(-x_1^3 + x_1^2 + x^3 - x^2) + x_1^3 - x^2 \\ &\quad - e_1 - e_2 + v_1 + u_1, \\ \dot{e}_2 &= b_1 e_1 + v_2 + u_2. \end{aligned} \quad (9)$$

令非线性控制器  $v_i$  为

$$\begin{aligned} v_1 &= -\hat{r}_1(-x_1^3 + x_1^2 + x^3 - x^2) \\ &\quad - x_1^3 + x^2 + e_1 + e_2, \\ v_2 &= -\hat{b}_1 e_1, \end{aligned} \quad (10)$$

其中  $\hat{r}_1$  和  $\hat{b}_1$  分别是系统参数  $r_1$  和  $b_1$  的估计值.

将 (10) 式代入 (9) 式, 那么误差动力系统就可化为

$$\begin{aligned} \dot{e}_1 &= \tilde{r}_1(-x_1^3 + x_1^2 + x^3 - x^2) + u_1, \\ \dot{e}_2 &= \tilde{b}_1 e_1 + u_2, \end{aligned} \quad (11)$$

其中  $\tilde{r}_1$  和  $\tilde{b}_1$  分别是参数  $r_1$  和  $b_1$  的估计误差, 即  $\tilde{r}_1 = r_1 - \hat{r}_1$ ,  $\tilde{b}_1 = b_1 - \hat{b}_1$ . 可以看出, 两个 Cable 模型的全阶最优同步问题转化为误差系统 (11) 的稳定性问题, 因此在非线性控制器  $v$  的基础上需要设计最优控制器  $u$ , 使得系统 (11) 渐进稳定, 并能使消耗能量达到最小.

根据 Lyapunov 稳定性理论, 为了辨识出系统参数, 取参数  $r_1$  和  $b_1$  的自适应率为

$$\begin{aligned} \dot{\hat{r}}_1 &= -e_1(-x_1^3 + x_1^2 + x^3 - x^2), \\ \dot{\hat{b}}_1 &= -e_1 e_2. \end{aligned} \quad (12)$$

根据最优控制原理, 设最优轨迹由性能指标 (13) 确定

$$I = \int_{t_0}^{\infty} \left\{ \sum_{i=1}^2 [\alpha_i e_i^2 + \beta_i u_i^2] + \gamma_1 \tilde{r}_1^2 + \gamma_2 \tilde{b}_1^2 \right\} dt, \quad (13)$$

并且

$$w = \sum_{i=1}^2 [\alpha_i e_i^2 + \beta_i u_i^2] + \gamma_1 \tilde{r}_1^2 + \gamma_2 \tilde{b}_1^2, \quad (14)$$

其中  $t_0$  是某一固定的时刻,  $\alpha_i$ ,  $\beta_i$  和  $\gamma_i$  ( $i = 1, 2$ ) 均为正常数. 为了使 (7) 式成立, 即使得  $2\alpha_i e_i + 2\beta_i u_i = 0$ , 则可得到

$$u_i = -\alpha_i e_i / \beta_i (i = 1, 2). \quad (15)$$

接下来证明所设计的非线性反馈控制器  $v$  和最优控制器  $u$ , 能使得误差系统 (11) 在原点渐进稳定.

考虑 Lyapunov 函数为

$$V(e, \tilde{r}, \tilde{b}) = \frac{1}{2} e^T e + \frac{1}{2} (\tilde{r}_1^2 + \tilde{b}_1^2). \quad (16)$$

那么综合 (10)—(12) 和 (15) 式可得

$$\begin{aligned} dV/dt &= e^T \dot{e} + \tilde{r}_1 \dot{\tilde{r}}_1 + \tilde{b}_1 \dot{\tilde{b}}_1 \\ &= e_1 \dot{e}_1 + e_2 \dot{e}_2 + (\tilde{r}_1 \dot{\tilde{r}}_1 + \tilde{b}_1 \dot{\tilde{b}}_1) \\ &= e_1 [\tilde{r}_1(-x_1^3 + x_1^2 + x^3 - x^2) - \alpha_1 e_1 / \beta_1] \\ &\quad + e_2 (\tilde{b}_1 e_1 - \alpha_2 e_2 / \beta_2) + (\tilde{r}_1 \dot{\tilde{r}}_1 + \tilde{b}_1 \dot{\tilde{b}}_1) \\ &= -e_1^2 \alpha_1 / \beta_1 - e_2^2 \alpha_2 / \beta_2 < 0. \end{aligned} \quad (17)$$

由 Lyapunov 理论和最优控制原理可知, 在非线性反馈控制器  $v$  和最优控制器  $u$  的作用下, 两个 Cable 模型达到了全阶最优同步.

## 4.2 HR 神经元模型和 Cable 模型的降阶同步

考虑 HR 神经元模型 (2) 作为驱动系统, Cable 模型 (8) 作为响应系统. 首先需要将系统 (2) 投影到平面  $Q$  上, 使所得投影后的部分驱动系统与响应系统有相同的维度. 令平面  $Q$  为  $x$ - $y$  平面, 则部分驱动系统可描述为

$$\begin{aligned} \dot{x}_2 &= y_2 - a_2 x_2^3 + b_2 x_2^2 - z_2 + I_0, \\ \dot{y}_2 &= c_2 - d_2 x_2 - y_2, \end{aligned} \quad (18)$$

其中  $v_i$  和  $u_i$  ( $i = 1, 2$ ) 分别为待确定的非线性反馈控制器和最优控制器. 定义同步误差  $e_1 = x_1 - x_2$ ,  $e_2 = y_1 - y_2$ , 可以得到 HR 神经元与 Cable 模型的误差动力系统为

$$\begin{aligned} \dot{e}_1 &= r_1(-x_1^3 + x_1^2) - x_1 - y_1 + I_1 - y_2 \\ &\quad + a_2 x_2^3 - b_2 x_2^2 + z_2 - I_2 + v_1 + u_1, \end{aligned}$$

$$\dot{e}_2 = b_1 e_1 - c_2 + d_2 x_2^2 + y_2 + v_2 + u_2. \quad (19)$$

令非线性控制器  $v_i$  为

$$\begin{aligned} v_1 &= -\hat{r}_1(-x_1^3 + x_1^2) + x_1 + y_1 - I_1 + y_2 \\ &\quad - \hat{a}_2 x_2^3 + \hat{b}_2 x_2^2 - z_2 + I_2, \\ v_2 &= -\hat{b}_1 e_1 + \hat{c}_2 - \hat{d}_2 x_2^2 - y_2, \end{aligned} \quad (20)$$

其中  $\hat{r}_1$  和  $\hat{b}_1$  分别是驱动系统参数  $r_1$  和  $b_1$  的估计值,  $\hat{a}_2, \hat{b}_2, \hat{c}_2$  和  $\hat{d}_2$  分别是响应系统参数  $a_2, b_2, c_2$  和  $d_2$  的估计值.

将 (20) 式代入 (19) 式, 误差动力系统就可化为

$$\begin{aligned} \dot{e}_1 &= \tilde{r}_1(-x_1^3 + x_1^2) + \tilde{a}_2 x_2^3 - \tilde{b}_2 x_2^2 + u_1, \\ \dot{e}_2 &= \tilde{b}_1 e_1 - \tilde{c}_2 + \tilde{d}_2 x_2^2 + u_2, \end{aligned} \quad (21)$$

其中  $\tilde{r}_1$  和  $\tilde{b}_1$  分别是驱动系统参数  $r_1$  和  $b_1$  的估计误差,  $\tilde{a}_2, \tilde{b}_2, \tilde{c}_2$  和  $\tilde{d}_2$  分别是响应系统参数  $a_2, b_2, c_2$  和  $d_2$  的估计误差, 即  $\tilde{r}_1 = r_1 - \hat{r}_1, \tilde{b}_1 = b_1 - \hat{b}_1, \tilde{a}_2 = a_2 - \hat{a}_2, \tilde{b}_2 = b_2 - \hat{b}_2, \tilde{c}_2 = c_2 - \hat{c}_2, \tilde{d}_2 = d_2 - \hat{d}_2$ .

可以看出, HR 神经元模型与 Cable 模型的降阶最优同步问题转化为误差系统 (21) 的稳定性问题, 因此在非线性控制器  $v$  的基础上, 需要设计最优控制器  $u$ , 使得系统 (11) 渐进稳定, 并能使消耗能量达到最小.

根据 Lyapunov 稳定性理论, 为了辨识出系统参数, 取参数  $a_2, b_2, c_2$  和  $d_2$  的自适应率为

$$\begin{aligned} \dot{\hat{r}}_1 &= (x_1^3 - x_1^2)e_1, \\ \dot{\hat{b}}_1 &= -x_1 e_2, \\ \dot{\hat{a}}_2 &= -x_2^3 e_1, \\ \dot{\hat{b}}_2 &= x_2^2 e_1, \\ \dot{\hat{c}}_2 &= e_2, \\ \dot{\hat{d}}_2 &= -x_2^2 e_2. \end{aligned} \quad (22)$$

根据最优控制原理, 设最优轨迹由性能指标 (23) 确定

$$\begin{aligned} I &= \int_{t_0}^{\infty} \left\{ \sum_{i=1}^2 [\alpha_i e_i^2 + \beta_i u_i^2] + \gamma_1 \tilde{r}_1^2 + \gamma_2 \tilde{b}_1^2 \right. \\ &\quad \left. + \gamma_3 \tilde{a}_2^2 + \gamma_4 \tilde{b}_2^2 + \gamma_5 \tilde{c}_2^2 + \gamma_6 \tilde{d}_2^2 \right\} dt, \end{aligned} \quad (23)$$

并且

$$\begin{aligned} w &= \sum_{i=1}^2 [\alpha_i e_i^2 + \beta_i u_i^2] + \gamma_1 \tilde{r}_1^2 + \gamma_2 \tilde{b}_1^2 + \gamma_3 \tilde{a}_2^2 \\ &\quad + \gamma_4 \tilde{b}_2^2 + \gamma_5 \tilde{c}_2^2 + \gamma_6 \tilde{d}_2^2, \end{aligned} \quad (24)$$

其中  $t_0$  是某一固定的时刻,  $\alpha_i, \beta_i (i = 1, 2)$  和  $\gamma_i (i = 1, 2, \dots, 6)$  均为正常数. 为了使 (7) 式成立, 即使得  $2\alpha_i e_i + 2\beta_i u_i = 0$ , 则可得到

$$u_i = -\alpha_i e_i / \beta_i \quad (i = 1, 2). \quad (25)$$

接下来证明所设计的非线性反馈控制器  $v$  和最优控制器  $u$ , 能使得误差系统 (21) 在原点渐进稳定.

考虑 Lyapunov 函数为

$$\begin{aligned} V(e, \tilde{r}, \tilde{b}) &= \frac{1}{2} e^T e + \frac{1}{2} (\tilde{r}_1^2 + \tilde{b}_1^2 + \tilde{a}_2^2 \\ &\quad + \tilde{b}_2^2 + \tilde{c}_2^2 + \tilde{d}_2^2), \end{aligned} \quad (26)$$

综合 (20)—(22) 和 (25) 式可得

$$\begin{aligned} dV/dt &= e_1 \dot{e}_1 + e_2 \dot{e}_2 + (\tilde{r}_1 \dot{\tilde{r}}_1 + \tilde{b}_1 \dot{\tilde{b}}_1 + \tilde{a}_2 \dot{\tilde{a}}_2 \\ &\quad + \tilde{b}_2 \dot{\tilde{b}}_2 + \tilde{c}_2 \dot{\tilde{c}}_2 + \tilde{d}_2 \dot{\tilde{d}}_2) \\ &= -e_1^2 \alpha_1 / \beta_1 - e_2^2 \alpha_2 / \beta_2 < 0. \end{aligned} \quad (27)$$

由 Lyapunov 理论和最优控制原理可知, 在非线形反馈控制器  $v$  和最优控制器  $u$  的作用下, HR 神经元模型和 Cable 模型达到了降阶最优同步.

若令平面  $Q$  为  $y-z$  平面或  $x-z$  平面, 则部分驱动系统为系统 (2) 在相应平面的投影. 应用 3.1 节中的理论与本节的推导步骤, 很容易得出  $Q$  平面的部分驱动系统与响应系统 (8) 的降阶最优同步控制器. 故不再赘述.

## 5 数值模拟

### 5.1 两个 Cable 模型的全阶同步

采用 forth-order Runge-Kutta 法对 4.1 节所设计的非线性控制器 (10), 参数自适应律 (12) 以及最优控制器 (15) 进行数值模拟. 选取驱动系统 (1) 和响应系统 (8) 的系统参数为 Cable 模型处于混沌状态时的值, 即  $b_1 = 1, r_1 = 10, A = 0.1, f = 127.1$ ; 驱动与响应系统初始值分别为  $(x(0), y(0)) = (0.2, 0.2), (x_1(0), y_1(0)) = (0.21, 0.21)$ ; 以及估计参数的初值  $\hat{r}_1(0) = 10, \hat{b}_1(0) = 1$ . 当  $t \geq 20s$ , 对响应系统 (8) 施加非线性控制器 (10), 参数自适应律 (12) 以及最优控制器 (15), 图 2 给出了施加控制后驱动系统 (1) 和响应系统 (8) 的同步误差变化图, 以及系统参数的辨识过程.

由图 2(a) 可以看出, 在打开非线性反馈控制器 (10), 参数自适应律 (12) 以及最优控制器 (15) 之

后,同步误差渐进趋向于原点,说明两个 Cable 模型实现了全阶最优同步;从图 2(b)的辨识过程可知,所设计的自适应律在很小的误差范围内能成功辨识出系统参数.

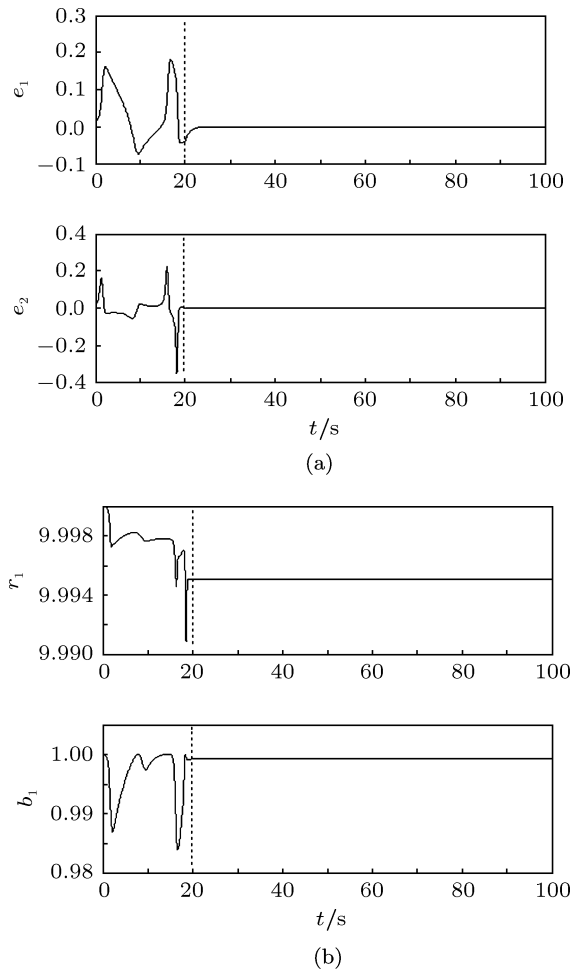


图2 系统(1)和系统(8)全阶同步的模拟结果 (a)同步误差曲线;(b)系统参数  $r_1$  和  $b_1$  的辨识过程

### 5.2 HR 神经元模型和 Cable 模型的降阶同步

为模拟 4.2 节实现的驱动系统 (2) 与响应系统 (8) 的降阶同步,取驱动系统参数为 HR 模型处于混沌状态时的值,即  $a_2 = 1, b_2 = 3, c_2 = 1, d_2 = 5, r_2 = 0.006, s_2 = 4, g_2 = -1.6$ , 状态变量初始值选为  $(x_2(0), y_2(0), z_2(0)) = (0.5, 0.5, 3)$ , 估计参数的初值  $\hat{r}_1(0) = 10, \hat{b}_1(0) = 1, \hat{a}_2(0) = 1, \hat{b}_2(0) = 3, \hat{c}_2(0) = 3, \hat{d}_2(0) = 6$ ; 响应系统参数值及初始值均取为与 4.1 节中相同.  $t \geq 20$  s, 为响应系统施加非线性控制器 (20)、参数自适应律 (22) 以及最优控制器 (25), 图 3 给出了施加控制后的同步误差变化图, 以及系统参数的辨识过程.

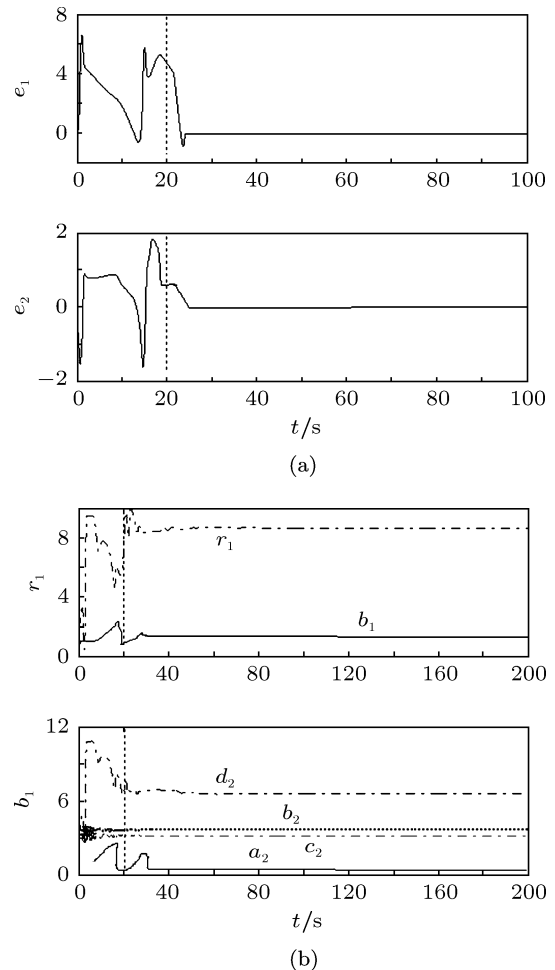


图3 系统(2)和系统(8)降阶同步的模拟结果 (a)同步误差曲线;(b)系统参数  $r_1$  和  $b_1$  的辨识过程

由图 3(a) 可以看出,在打开非线性反馈控制器 (20)、参数自适应律 (22) 以及最优控制器 (25) 之后,同步误差渐进趋向于原点,说明 Cable 模型和 HR 神经元模型实现了降阶最优同步;从图 3(b) 的辨识过程可知,所设计的自适应律在很小的误差范围内能成功辨识出系统参数.

### 6 结论

本文基于 Lyapunov 稳定性理论、最优控制原理以及分步设计方法,主要研究了神经元模型的全阶与降阶最优同步问题,为神经系统设计了非线性反馈控制器,以及最优控制器.其中非线性反馈控制器能使得两个系统之间的误差趋于零,最优控制器使得在同步过程中所花费的能量达到最低.神经元模型能够模拟真实神经元的行为,研究神经元的同步问题对揭示神经系统的通信通道方面有重要的作用.文中以 Cable 模型为例,实现了相同结构神

神经元之间的全阶最优同步; 以 Cable 模型和 HR 神经元模型为例, 实现了不同结构神经元之间的降阶最优同步. 这两种情形代表了真实神经系统中相同或不同结构神经元的同步, 更适合于实际应用. 数值模拟结果证明了该方法的有效性.

本领域在将来的研究重点在于将最优控制方法应用于高维复杂神经网络系统, 以降低其同步所需要的能量消耗. 此外, 分数阶超混沌系统的最优控制方法同步也是将来研究的热点.

- 
- [1] Chay T R 1985 *Physica D* **16** 233
- [2] Thompson C J, Bardos D C, Yang Y S, Joyner K H 1999 *Chaos, Solitons and Fractals* **10** 1825
- [3] Hindmarsh J L, Rose R M 1984 *P. Roy. Soc. Lond. B Biol.* **221** 87
- [4] Glass L 1995 *Chaos in Neural Systems* (Cambridge: MIT) p186
- [5] Roelfsema P R, Engel A K, König P, Singer W 1997 *Nature* **385** 157
- [6] Steriade M, McCormick D A, Sejnowski T J 1993 *Science* **262** 679
- [7] Meister M, Wong R O, Baylor D A, Shatz C J 1991 *Science* **252** 939
- [8] Kreiter A K, Singer W 1996 *J. Neurosci.* **16** 2381
- [9] Shuai J W, Durand D M 1999 *Phys. Lett. A* **264** 289
- [10] Bennett M V L, Verselis V K 1992 *Semin. Cell Biol.* **3** 29
- [11] Liu Y J, Wang W, Tong S C, Liu Y S 2010 *IEEE Trans. Syst. Man Cybern. Syst. Hum.* **40** 170
- [12] Liu Y J, Wen G X, Tong S C 2011 *IEEE Trans. Neural Network* **22** 1162
- [13] Zhang H G, Ma T D, Yu W, Fu J 2008 *Chin. Phys. B* **17** 3616
- [14] Liu Y J, Zheng Y Q 2009 *Nonlin. Dyn.* **57** 431
- [15] Wang Z S, Zhang H G, Wang Z L 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 2687 (in Chinese) [王占山, 张化光, 王智良 2006 物理学报 **55** 2687]
- [16] Dhamala M, Jirsa V K, Ding M 2004 *Phys. Rev. Lett.* **92** 074104
- [17] Wang Q Y, Lu Q S, Chen G R, Guo D 2006 *Phys. Lett. A* **356** 17
- [18] Cornejo-Pérez O, Femat R 2005 *Chaos, Solitons and Fractals* **25** 43
- [19] Zhang H G, Xie Y H, Wang Z L, Zheng C D 2007 *IEEE Trans. Neural Network.* **18** 1841
- [20] Song Y, Chen Z Q, Yuan Z Z 2007 *Chin. J. Chem. Eng.* **15** 539
- [21] Che Y Q, Wang J, Zhou S S, Deng B 2009 *Chaos, Solitons and Fractals* **40** 1333
- [22] Wang Q Y, Lua Q S, Chen G R, Guo D H 2006 *Phys. Lett. A* **356** 17
- [23] Awad E G 2006 *Chaos, Solitons and Fractals* **27** 345
- [24] Terman D, Kopell N, Bose A 1998 *Physica D* **117** 241
- [25] Schäfer C, Rosenblum M G, Abel H H, Kurths J R 1999 *Phys. Rev. E* **60** 857
- [26] Bartsch R, Kantelhardt J W, Penzel T, Havlin S 2007 *Phys. Rev. Lett.* **98** 054102

# Full-order and reduced-order optimal synchronization of neurons model with unknown parameters\*

Wang Xing-Yuan<sup>†</sup> Ren Xiao-Li Zhang Yong-Lei

(School of Electronic & Information Engineering, Dalian University of Technology, Dalian 116024, China)

(Received 18 November 2010; revised manuscript received 1 August 2011)

## Abstract

Based on Lyapunov stability theory, optimal control principle and step design methodology, nonlinear feedback controller and optimal controller are designed, in which the nonlinear feedback controller makes the trajectory error between two neuron systems tend to zero, and the optimal controller makes the spent energy meet minimum, which is spent in the process of synchronizing. In this paper, the uncertain cable model is taken as an example to illustrate the full-order optimal synchronization of two neurons. The uncertain cable model and the uncertain Hindmarsh-Rose (HR) model are taken to illustrate the reduced-order optimal synchronization of two neurons. In addition, the unknown parameters are identified successfully. Numerical Simulation results show the effectiveness of the strategy further.

**Keywords:** optimal synchronization, full-order and reduced-order, step design, neurons

**PACS:** 05.45.Xt, 05.45.Pq, 05.45.Gg

---

\* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 61173183, 60573172, 60973152), the Superior University Doctor Subject Special Scientific Research Foundation of China (Grant No. 20070141014), and the Natural Science Foundation of Liaoning Province, China (Grant No. 20082165).

<sup>†</sup> E-mail: wangxy@dlut.edu.cn