球形粒子在聚焦拉盖尔-高斯光束中的散射特性研究*

赵继芝† 江月松 欧军 叶继海

(北京航空航天大学电子信息工程学院, 北京 100191)

(2011 年 5 月 4 日收到; 2011 年 6 月 21 日收到修改稿)

研究了球形粒子在聚焦拉盖尔 - 高斯光束中的散射特性. 根据广义 Mie 理论, 推导出球形粒子在聚焦拉盖尔 - 高斯光束中散射系数的解析公式. 针对光束的电场分布及粒子散射强度进行了数值仿真, 讨论了散射强度随散射角、散射球粒子半径和拓扑荷的变化特性, 并通过散射系数解释了散射强度分布的振荡现象. 结果表明, 在聚焦拉盖尔 - 高斯光束照射下, 球形粒子的后向散射强度随着粒子半径的增大而逐渐增大; 后向散射强度开始增大时对应的粒子半径与拓扑荷有关. 通过与高斯光束的对比, 可以看出球形粒子在聚焦拉盖尔 - 高斯光束中散射特性的差异, 使其在粒径测量、光通信和大气后向散射探测等方面具有潜在应用价值.

关键词: 聚焦拉盖尔 - 高斯光束, 广义 Mie 理论, 球形粒子, 拓扑荷

PACS: 42.25.Fx, 42.68.Mj, 42.50.−p, 42.60.Jf

1 引 言

拉盖尔 - 高斯光束 (Laguerre-Gaussian, LG) 是一种典型的涡旋光束 [1,2], 该光束具有螺旋相位波前, 且每个光子具有 $\hbar l$ 的轨道角动量 [2]. 近年来, 随着对 LG 光束的实验研究, 其应用前景越来越受到人们的关注, LG 光束已经在光学微操控、生物医学、量子信息编码、光通信等领域得到了初步应用 [3−12]. 值得关注的是, 目前针对 LG 光束下粒子散射问题的研究仍然较少, Garbin[12] 等进行了利用粒子的前向散射来推断 LG 光束拓扑荷的实验, 给出前向散射强度分布与拓扑荷的关系; 吕宏等 [10] 研究了具有轨道角动量的光束对粒子的散射, 但是没有给出具体的推导和仿真结果. 在实际应用中, 粒径测量、光学微操控、光通信等应用都会受到粒子散射的影响 [10], 因此研究粒子在 LG 光束中的散射特性具有重要的应用价值.

1980 年, Gouesbet 等根据 Davis 发展的高斯波束的一阶近似 [13], 利用 Bromwich 公式深入研究了均匀球对高斯波束的远区散射场, 提出了广义 Mie 理论 [14], 给出波束因子 g_n 或 g_n^m 的三种算法 [15,16]. 目前, 广义 Mie 理论已成为一种公认的研究球形粒子对有形波束散射的重要方法, 本文据此讨论了在聚焦 LG 光束中球形粒子的散射特性. 文中首先给出 LG 光束经过数值孔径为 NA 的光学成像系统在焦平面得到的聚焦 LG 光束的电磁场表达式, 然后根据广义 Mie 理论推导出球形粒子外部散射场展开系数的表达式, 并对聚焦 LG 光束的电场分布及粒子散射强度进行了数值仿真, 讨论了散射强度随散射角、散射球粒子半径和拓扑荷的变化特性, 并且与高斯光束对球形粒子的散射做了对比.

2 理论分析

2.1 聚焦拉盖尔 - 高斯光束

LG 光束是涡旋光束中最典型的例子, 也是现实中比较容易实现的一种涡旋光束. 其电场表达式为 [1]

$$u_p^l(r,\theta,z) = \frac{C}{\left(1+\frac{z^2}{z_{\mathrm{R}}^2}\right)^{1/2}}\left(\frac{r\sqrt{2}}{w(z)}\right)^l \mathrm{L}_p^l\left(\frac{2r^2}{w^2(z)}\right)$$

* 国家重点基础研究发展计划 (批准号: 2011CB707001) 资助的课题.

† E-mail: bhcd9@163.com

$$\times \exp\left(\frac{-r^2}{w^2(z)}\right)\exp\left(\frac{\mathrm{i}kr^2z}{2(z^2+z_{\mathrm{R}}^2)}\right)$$
$$\times \exp(-\mathrm{i}l\theta)$$
$$\times \exp\left[\mathrm{i}(2p+l+1)\arctan\left(\frac{z}{z_{\mathrm{R}}}\right)\right], \tag{1}$$

其中, $w(z)=(2(z^2+z_{\mathrm{R}}^2)/kz_{\mathrm{R}})^{1/2}$ 是传播距离为 z 处的光束半径, z_{R} 是瑞利长度, l 为拓扑荷, p 为径向指数, L_p^l 是缔合拉盖尔多项式, C 是归一化因子. 相位因子 $\exp(-\mathrm{i}l\theta)$ 表明此模式的光束具有螺旋波前.

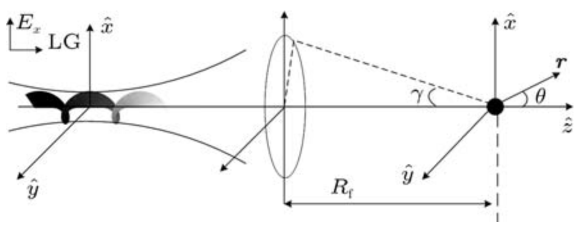

图 1 光学成像系统示意图

如图 1 所示, LG 光束经过一个数值孔径为NA的成像系统, 在焦平面处得到聚焦 LG 光束的电磁场分布, 通常表示为矢量亥姆霍兹方程的三个本征模式的线性组合 [17,18]:

$$\boldsymbol{E}(r)=\frac{1}{2}\boldsymbol{E}_{pl,0}(\boldsymbol{r};\alpha,\beta)$$
$$+\frac{1}{4}\boldsymbol{E}_{pl,2}(\boldsymbol{r};\alpha-\mathrm{i}\beta,-\mathrm{i}\alpha-\beta)$$
$$+\frac{1}{4}\boldsymbol{E}_{pl,-2}(\boldsymbol{r};\alpha+\mathrm{i}\beta,\mathrm{i}\alpha-\beta), \tag{2}$$

$$\boldsymbol{H}(r)=\frac{1}{2}\boldsymbol{H}_{pl,0}(\boldsymbol{r};\alpha,\beta)$$
$$+\frac{1}{4}\boldsymbol{H}_{pl,-2}(\boldsymbol{r};\alpha+\mathrm{i}\beta,\mathrm{i}\alpha-\beta)$$
$$+\frac{1}{4}\boldsymbol{H}_{pl,-2}(\boldsymbol{r};\alpha-\mathrm{i}\beta,-\mathrm{i}\alpha-\beta), \tag{3}$$

其中, 在柱坐标系 (r,φ,z) 中, 电场和磁场本征模式的表达式分别为 [18]

$$\boldsymbol{E}_{pl,j}(\boldsymbol{r};\alpha,\beta)$$
$$=\int_0^{k\mathrm{NA}} E_{pl,j}(k_{\mathrm{r}})\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(l+j)\varphi+\mathrm{i}k_z z}\Big\{(\alpha\hat{\boldsymbol{x}}+\beta\hat{\boldsymbol{y}})$$
$$\times \mathrm{J}_{l+j}(k_{\mathrm{r}}r)+\frac{k_{\mathrm{r}}}{2k_z}\hat{\boldsymbol{z}}\Big[(\mathrm{i}\alpha-\beta)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}\mathrm{J}_{l+j-1}(k_{\mathrm{r}}r)$$
$$-(\mathrm{i}\alpha+\beta)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\mathrm{J}_{l+j+1}(k_{\mathrm{r}}r)\Big]\Big\}\mathrm{d}k_{\mathrm{r}}, \tag{4}$$

$$\boldsymbol{H}_{pl,j}(\boldsymbol{r};\alpha,\beta)$$
$$=\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\int_0^{k\mathrm{NA}}\frac{\boldsymbol{E}_{pl,j}(k_{\mathrm{r}})}{2kk_z}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(l+j)\varphi+\mathrm{i}k_z z}\Big\{(-\beta\hat{\boldsymbol{x}}+\alpha\hat{\boldsymbol{y}})$$
$$\times\left(2k^2-k_{\mathrm{r}}^2\right)\mathrm{J}_{l+j}(k_{\mathrm{r}}r)+\frac{k_{\mathrm{r}}^2}{2}\big[(\hat{\boldsymbol{x}}+\mathrm{i}\hat{\boldsymbol{y}})(\mathrm{i}\alpha-\beta)$$
$$\times\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\varphi}\mathrm{J}_{l+j-2}(k_{\mathrm{r}}r)-(\hat{\boldsymbol{x}}-i\hat{\boldsymbol{y}})(\mathrm{i}\alpha+\beta)$$
$$\times\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\varphi}\mathrm{J}_{l+j+2}(k_{\mathrm{r}}r)\big]-k_{\mathrm{r}}k_z\hat{\boldsymbol{z}}[(\alpha+\mathrm{i}\beta)$$
$$\times\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}\mathrm{J}_{l+j-1}(k_{\mathrm{r}}r)+(\alpha-\mathrm{i}\beta)$$
$$\times\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\mathrm{J}_{l+j+1}(k_{\mathrm{r}}r)]\Big\}\mathrm{d}k_{\mathrm{r}}, \tag{5}$$

其中, $k_z=\left(k^2-k_{\mathrm{r}}^2\right)^{1/2}$, $\mathrm{J}_n(x)$ 是第一类贝塞尔函数, α 和 β 分别表示 x 和 y 方向的偏振态. 函数 $E_{pl,j}(k_{\mathrm{r}})$ 可以自由选择, 只要使其值满足快速地趋向于零以保证场能量有限 [17], 因此本文选取 $E_{pl,j}(k_{\mathrm{r}})$ 如下:

$$E_{pl,j}(k_{\mathrm{r}})=\frac{k_{\mathrm{r}}}{\sqrt{kk_z}}\left(1+(1-|j|)\frac{k_z}{k}\right)u_{pl}$$
$$\times\left(\frac{k_{\mathrm{r}}}{k}k_{\mathrm{s}}R_{\mathrm{f}}\right)^{|l|}\mathrm{L}_p^{|l|}\left(\frac{k_{\mathrm{r}}^2k_{\mathrm{s}}^2R_{\mathrm{f}}^2}{k^2}\right)$$
$$\times\exp\left(-\frac{k_{\mathrm{r}}^2k_{\mathrm{s}}^2R_{\mathrm{f}}^2}{2k^2}\right), \tag{6}$$

其中, $u_{pl}=(-1)^p k_{\mathrm{s}}\sqrt{\dfrac{p!}{\pi(p+|l|)!}}$, R_{f} 为成像系统的焦距.

将 (4), (5) 式分别代入 (2), (3) 式中, 经简化得到聚焦电磁场在 x, y, z 方向的分量表达式

$$E_x(\boldsymbol{r})=\frac{1}{4}\int_0^{k\mathrm{NA}}E(k_{\mathrm{r}})\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}l\varphi+\mathrm{i}k_z z}\Bigg\{2\left(1+\frac{k_z}{k}\right)$$
$$\times\alpha\mathrm{J}_l(k_{\mathrm{r}}r)+\left(1-\frac{k_z}{k}\right)$$
$$\times\left[e^{2\mathrm{i}\varphi}(\alpha-\mathrm{i}\beta)\mathrm{J}_{l+2}(k_{\mathrm{r}}r)\right.$$
$$\left.+\,\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\varphi}(\alpha+\mathrm{i}\beta)\mathrm{J}_{l-2}(k_{\mathrm{r}}r)\right]\Bigg\}\mathrm{d}k_{\mathrm{r}}, \tag{7}$$

$$E_y(\boldsymbol{r})=\frac{1}{4}\int_0^{k\mathrm{NA}}E(k_{\mathrm{r}})\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}l\varphi+\mathrm{i}k_z z}\Bigg\{2\left(1+\frac{k_z}{k}\right)$$
$$\times\beta\mathrm{J}_l(k_{\mathrm{r}}r)+\left(1-\frac{k_z}{k}\right)$$
$$\times\left[\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\varphi}(-\mathrm{i}\alpha-\beta)\mathrm{J}_{l+2}(k_{\mathrm{r}}r)\right.$$
$$\left.+\,\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\varphi}(\mathrm{i}\alpha-\beta)\mathrm{J}_{l-2}(k_{\mathrm{r}}r)\right]\Bigg\}\mathrm{d}k_{\mathrm{r}}, \tag{8}$$

$$E_z(\boldsymbol{r})=\frac{1}{2}\int_0^{k\mathrm{NA}}E(k_{\mathrm{r}})\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}l\varphi+\mathrm{i}k_z z}\frac{k_{\mathrm{r}}}{k}[(\mathrm{i}\alpha-\beta)$$
$$\times\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}\mathrm{J}_{l-1}(k_{\mathrm{r}}r)-(\mathrm{i}\alpha+\beta)$$
$$\times\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\mathrm{J}_{l+1}(k_{\mathrm{r}}r)]\mathrm{d}k_{\mathrm{r}}, \tag{9}$$

$$H_x(\boldsymbol{r})=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\int_0^{k\mathrm{NA}}\frac{E(k_{\mathrm{r}})}{2kk_z}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}l\varphi+\mathrm{i}k_z z}$$
$$\times\left[-2\beta\mathrm{J}_l(k_{\mathrm{r}}r)\left(k^2+kk_z-k_{\mathrm{r}}^2\right)\right.$$
$$+(\mathrm{i}\alpha-\beta)\,\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\varphi}\mathrm{J}_{l-2}(k_{\mathrm{r}}r)$$
$$\times\left(k_{\mathrm{r}}^2-k^2+kk_z\right)-(\mathrm{i}\alpha+\beta)$$

$$\times \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\varphi}\mathrm{J}_{l+2}\left(k_{\mathrm{r}}r\right)\left(k_{\mathrm{r}}^{2}-k^{2}+kk_{z}\right)]$$
$$\times \mathrm{d}k_{\mathrm{r}}, \tag{10}$$

$$\begin{aligned} H_y(\boldsymbol{r}) = & \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\int_0^{k\mathrm{NA}} \frac{E(k_{\mathrm{r}})}{2kk_z}\mathrm{e}^{\mathrm{i}l\varphi+\mathrm{i}k_z z} \\ & \times [2\alpha \mathrm{J}_l(k_{\mathrm{r}}r)\left(k^2+kk_z-k_{\mathrm{r}}^2\right) \\ & -(\alpha+\mathrm{i}\beta)\,\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\varphi}\mathrm{J}_{l-2}(k_{\mathrm{r}}r) \\ & \times\left(k_{\mathrm{r}}^2-k^2+kk_z\right)-(\alpha-\mathrm{i}\beta)\,\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\varphi} \\ & \times \mathrm{J}_{l+2}(k_{\mathrm{r}}r)\left(k_{\mathrm{r}}^2-k^2+kk_z\right)]\mathrm{d}k_{\mathrm{r}}, \end{aligned} \tag{11}$$

$$\begin{aligned} H_z(\boldsymbol{r}) = & \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\int_0^{k\mathrm{NA}} \frac{E(k_{\mathrm{r}})}{2k}\mathrm{e}^{\mathrm{i}l\varphi+\mathrm{i}k_z z}k_{\mathrm{r}} \\ & \times[-(\alpha+\mathrm{i}\beta)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}\mathrm{J}_{l-1}(k_{\mathrm{r}}r) \\ & -(\alpha-\mathrm{i}\beta)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\mathrm{J}_{l+1}(k_{\mathrm{r}}r)]\mathrm{d}k_{\mathrm{r}}, \end{aligned} \tag{12}$$

其中,

$$\begin{aligned} E(k_{\mathrm{r}}) = & \frac{k_{\mathrm{r}}}{\sqrt{kk_z}}u_{pl}\left(\frac{k_{\mathrm{r}}}{k}k_{\mathrm{s}}R_{\mathrm{f}}\right)^{|l|}\mathrm{L}_p^{|l|}\left(\frac{k_{\mathrm{r}}^2k_{\mathrm{s}}^2R_{\mathrm{f}}^2}{k^2}\right) \\ & \times\exp\left(-\frac{k_{\mathrm{r}}^2k_{\mathrm{s}}^2R_{\mathrm{f}}^2}{2k^2}\right). \end{aligned} \tag{13}$$

本文拟采用如图 1 所示的光学成像系统, 系统焦距 $R_{\mathrm{f}}=10$ mm, 数值孔径 NA$=\sin\gamma$. 将球形粒子置于系统焦平面处且位于光轴上, 选取 $p=0$ 和 $l=0, 1, 2, 3$ 四种不同模式的 LG 光束作为入射光源, 分别用 LG_0^0, LG_0^1, LG_0^2 和 LG_0^3 表示, 光束的偏振态为x方向, 波长为 532 nm, 其中 $p=0$, $l=0$ 时 LG 光束即为基模高斯光束 [1].

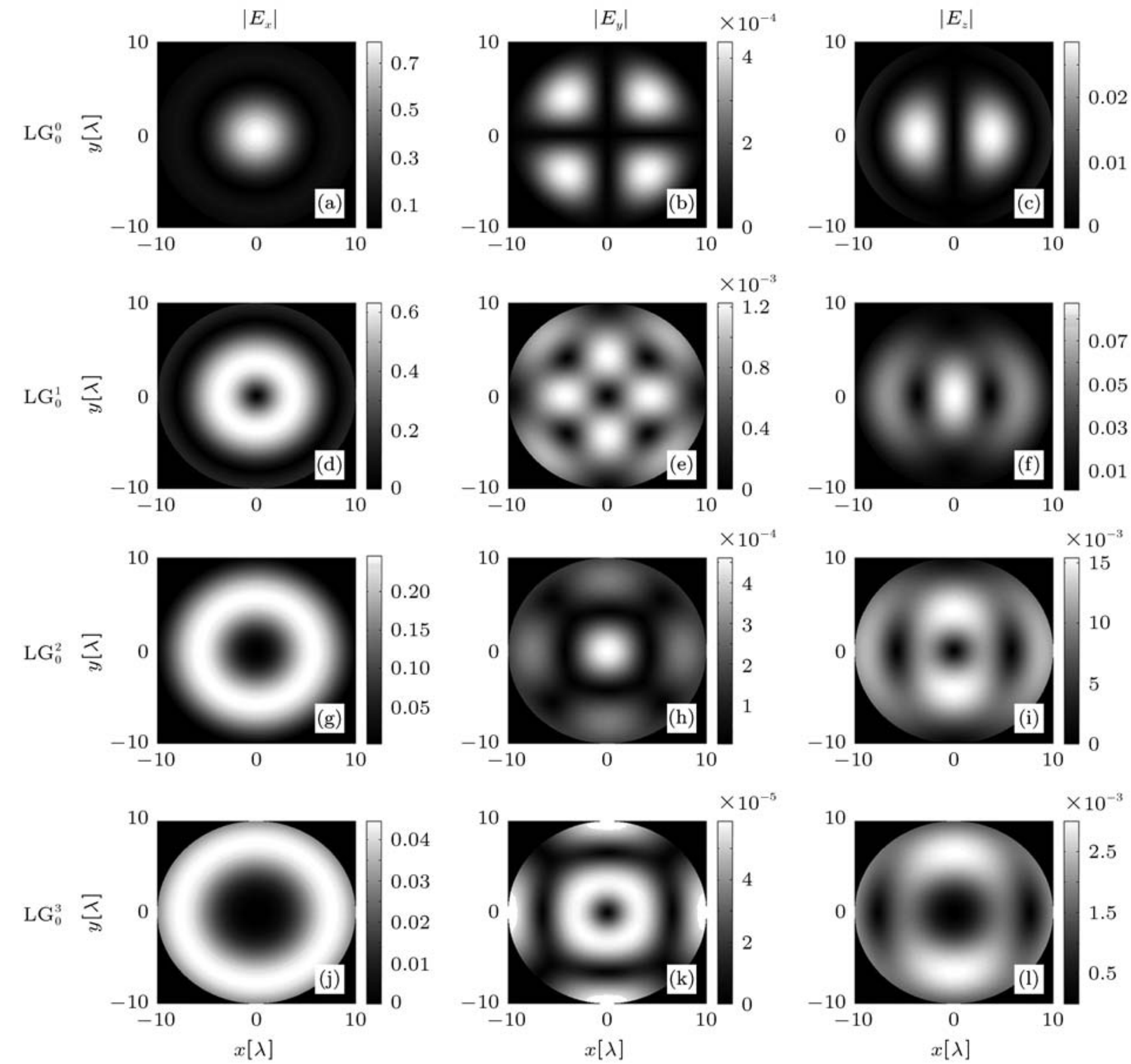

图 2 不同模式聚焦拉盖尔 - 高斯光束在 x, y, z 方向上的电场分布 (a)—(c): $l=0$; (d)—(f): $l=1$; (g)—(i): $l=2$; (j)—(l): $l=3$; 从左至右三列分别为 x, y, z 方向

根据 (7)—(9) 式, 对以上模式的聚焦 LG 光束 x, y, z 方向的电场分布进行仿真, 如图 2 所示. 从图中可以看出, x 方向的聚焦电场分布贡献最大, 最接近于 LG 光束模式. 三种模式的 y 和 z 方向的电场幅度比 x 方向的小 1 到 2 个数量级. 此外, 随着拓扑荷的增大, x 方向分量光束中心强度为零的区域增大, 可用来解释下文中的散射现象.

2.2 散射理论

在均匀介质中, 可以通过求解麦克斯韦方程来分析光束与特殊形状的散射体之间的相互作用 [19,21], 对于球形粒子, 一般利用广义 Mie 理论, 通过分离变量的方法分析粒子的散射特性 [20,22].

本文利用文献 [14] 中广义 Mie 理论的方法推导出球形粒子在聚焦 LG 光束中的散射系数表达式. 根据电磁场理论, 空间中任意电磁场总可以用横电波 (TE 波) 和横磁波 (TM 波) 的叠加场来表示, 利用 Bromwich 公式, 任意的电磁场分布可用 Bromwich 标量势 $U^{\mathrm{e}}(\boldsymbol{r})$ 和 $U^{\mathrm{h}}(\boldsymbol{r})$ 描述 [14]

$$U^{\mathrm{e,h}}(\boldsymbol{r})=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}a_{n,m}^{\mathrm{e,h}}r\mathrm{J}_n(kr)\times\mathrm{P}_n^{|m|}(\cos\theta)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\varphi},\tag{14}$$

其中, m, n 是整数, $a_{n,m}^{\mathrm{e,h}}$ 表示场分布的展开系数, $P_n^{|m|}$ 是第一类缔合勒让德多项式 [19], $\mathrm{J}_n(x)=\sqrt{\pi/2x}\mathrm{J}_{n+1/2}(x)$ 为第一类球形贝塞尔函数. 若用 (14) 式来描述粒子的外部散射场, 则需用球形汉克尔函数 $\mathrm{h}_n(x)$ 替换 $\mathrm{J}_n(x)$[18].

若已知电磁场分布的 Bromwich 标量势, 则电磁场的切向分量可以表示为 [14]

$$E_{\theta}^{\mathrm{e}}=-\frac{\mathrm{i}\omega\mu}{r\sin\theta}\frac{\partial U^{\mathrm{e}}}{\partial\varphi},\tag{15}$$

$$E_{\theta}^{\mathrm{h}}=\frac{1}{r}\frac{\partial^2U^{\mathrm{h}}}{\partial r\partial\theta},\tag{16}$$

$$H_{\theta}^{\mathrm{e}}=\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial^2U^{\mathrm{e}}}{\partial r\partial\varphi},\tag{17}$$

$$H_{\theta}^{\mathrm{h}}=\frac{\mathrm{i}\omega\varepsilon}{r\sin\theta}\frac{\partial U^{\mathrm{h}}}{\partial\varphi}.\tag{18}$$

粒子散射场的展开系数可由散射球粒子表面 ($r=r_{\mathrm{s}}$, r_{s} 为球形粒子的半径) 的电磁场切向分量连续来确定. 将 (14) 式代入 (15) 式 —(18) 式得到入射场、散射场和粒子内部场的电磁场切向分量, 分别用 i, s, ins 表示, 根据边界条件公式

$$E_{\theta,\mathrm{i}}^{\mathrm{e,h}}=E_{\theta,\mathrm{s}}^{\mathrm{e,h}}+E_{\theta,\mathrm{ins}}^{\mathrm{e,h}},\tag{19}$$

$$H_{\theta,\mathrm{i}}^{\mathrm{e,h}}=H_{\theta,\mathrm{s}}^{\mathrm{e,h}}+H_{\theta,\mathrm{ins}}^{\mathrm{e,h}},\tag{20}$$

可以得到粒子的散射场与入射场展开系数的关系表达式 [18]:

$$b_{n,m}^{\mathrm{e}}=\frac{\mu_2\mathrm{j}_n(k_2r_{\mathrm{s}})\left[k_1r_{\mathrm{s}}\mathrm{j}_{n-1}(k_1r_{\mathrm{s}})-n\mathrm{j}_n(k_1r_{\mathrm{s}})\right]-\mu_1\mathrm{j}_n(k_1r_{\mathrm{s}})\left[k_2r_{\mathrm{s}}\mathrm{j}_{n-1}(k_2r_{\mathrm{s}})-n\mathrm{j}_n(k_2r_{\mathrm{s}})\right]}{\mu_1\mathrm{h}_n(k_1r_{\mathrm{s}})\left[k_2r_{\mathrm{s}}\mathrm{j}_{n-1}(k_2r_{\mathrm{s}})-n\mathrm{j}_n(k_2r_{\mathrm{s}})\right]-\mu_2\mathrm{j}_n(k_2r_{\mathrm{s}})\left[k_1r_{\mathrm{s}}\mathrm{h}_{n-1}(k_1r_{\mathrm{s}})-n\mathrm{h}_n(k_1r_{\mathrm{s}})\right]}a_{n,m}^{\mathrm{e}},\tag{21}$$

$$b_{n,m}^{\mathrm{h}}=\frac{\varepsilon_2\mathrm{j}_n(k_2r_{\mathrm{s}})\left[k_1r_{\mathrm{s}}\mathrm{j}_{n-1}(k_1r_{\mathrm{s}})-n\mathrm{j}_n(k_1r_{\mathrm{s}})\right]-\varepsilon_1\mathrm{j}_n(k_1r_{\mathrm{s}})\left[k_2r_{\mathrm{s}}\mathrm{j}_{n-1}(k_2r_{\mathrm{s}})-n\mathrm{j}_n(k_2r_{\mathrm{s}})\right]}{\varepsilon_1\mathrm{h}_n(k_1r_{\mathrm{s}})\left[k_2r_{\mathrm{s}}\mathrm{j}_{n-1}(k_2r_{\mathrm{s}})-n\mathrm{j}_n(k_2r_{\mathrm{s}})\right]-\varepsilon_2\mathrm{j}_n(k_2r_{\mathrm{s}})\left[k_1r_{\mathrm{s}}\mathrm{h}_{n-1}(k_1r_{\mathrm{s}})-n\mathrm{h}_n(k_1r_{\mathrm{s}})\right]}a_{n,m}^{\mathrm{h}},\tag{22}$$

其中, $a_{n,m}^{\mathrm{e,h}}$, $b_{n,m}^{\mathrm{e,h}}$ 为入射场和粒子散射场分布的展开系数, 下标 1 和 2 分别表示粒子外部和内部的参数. 若已知入射场展开系数 $a_{n,m}^{\mathrm{e,h}}$, 则可通过上式得到粒子散射场展开系数.

根据电磁场分布的 Bromwich 标量势 [14], 并利用球形贝赛尔函数的微分方程 [19]

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2}+k^2\right)\left[r\mathrm{j}_n(kr)\right]=\frac{n(n+1)}{r}\mathrm{j}_n(kr),\tag{23}$$

得到入射场分布的径向分量

$$\begin{aligned}E_{\mathrm{r}}&=\frac{\partial^2U^{\mathrm{h}}}{\partial r^2}+k^2U^{\mathrm{h}}\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}\frac{n(n+1)}{r}a_{n,m}^{\mathrm{h}}\mathrm{j}_n(kr)\\&\quad\times P_n^{|m|}(\cos\theta)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\varphi},\end{aligned}\tag{24}$$

$$\begin{aligned}H_{\mathrm{r}}&=\frac{\partial^2U^{\mathrm{e}}}{\partial r^2}+k^2U^{\mathrm{e}}\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}\frac{n(n+1)}{r}a_{n,m}^{\mathrm{e}}\mathrm{j}_n(kr)\\&\quad\times \mathrm{P}_n^{|m|}(\cos\theta)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\varphi}.\end{aligned}\tag{25}$$

为了将入射场展开系数 $a_{n,m}^{\mathrm{e,h}}$ 从 (24) 和 (25) 式中分离出来, 我们利用指数函数、球形贝塞尔函数和连带勒让德函数的正交性 [19], 在等式两边分别乘以相应的积分算子 $\int_0^{2\pi}\exp(-\mathrm{i}m\varphi)\mathrm{d}\varphi$, $\int_0^{\infty}\mathrm{j}_m(kr)\mathrm{d}(kr)$ 和 $\int_0^{\pi}\mathrm{P}_n^{|m|}(\cos\theta)\sin\theta\mathrm{d}\theta$, 从而得到入射场展开系数的积分形式

$$a_{n,m}^{\mathrm{h}}=\frac{(2n+1)^2}{n^2(n+1)^2}\int_0^{\pi}\int_0^{\infty}E_{\mathrm{r}}r\mathrm{j}_n(kr)\,\mathrm{P}_n^{|m|}(\cos\theta)$$

$$\times \mathrm{e}^{-\mathrm{i}m\varphi}\mathrm{d}\theta\mathrm{d}(kr), \tag{26}$$

$$a^{\mathrm{e}}_{n,m} = \frac{(2n+1)^2}{n^2(n+1)^2}\int_0^{\pi}\int_0^{\infty} H_{\mathrm{r}} r \mathrm{j}_n(kr)\mathrm{P}_n^{|m|}(\cos\theta) \times \mathrm{e}^{-\mathrm{i}m\varphi}\mathrm{d}\theta\mathrm{d}(kr). \tag{27}$$

上文中已经由 (7)—(12) 式给出聚焦 LG 光束在 x, y, z 方向的分量, 则其径向场分布可以通过下式得到:

$$E_{\mathrm{r}}(\boldsymbol{r}) = E_x(\boldsymbol{r})\cos\varphi\sin\theta + E_y(\boldsymbol{r})\sin\varphi\sin\theta + E_z(\boldsymbol{r})\cos\theta, \tag{28}$$

$$H_{\mathrm{r}}(\boldsymbol{r}) = H_x(\boldsymbol{r})\cos\varphi\sin\theta + H_y(\boldsymbol{r})\sin\varphi\sin\theta + H_z(\boldsymbol{r})\cos\theta, \tag{29}$$

其中, θ 为 z 轴正方向与球坐标中矢量 $\boldsymbol{r}(r,\theta,\varphi)$ 之间的夹角. 将上式得到的聚焦 LG 光束的径向电磁场表达式代到 (26) 和 (27) 式中, 便可求得入射场展开系数 $a^{\mathrm{e,h}}_{n,m}$, 从而进一步由 (21) 和 (22) 式得到粒子的散射场系数.

3 仿真结果分析

如图 1 所示, LG 光束经过光学成像系统后, 聚焦在置于系统焦平面、半径为 r_{s} 的球形粒子上, 产生散射现象. 由于粒子位于光轴上, 所以只需考虑 $m = l \pm 1$ 时的模式, 所取模式的数量取决于散射粒子的半径和计算机仿真速度, 这里选取半径为 0—5 μm, 折射率 $n_{\mathrm{Al}} = 0.503 + \mathrm{i}4.923$ 的铝粒子, 最大模式数 $N_{\max} = 100$.

图 3(a) 给出不同模式的聚焦 LG 光束照射下, 球形粒子后向散射强度随粒子半径的变化曲线, 图 3(b) 为散射强度开始增大时所对应的粒子半径与拓扑荷的关系, 其中拓扑荷取 0—-10.

从图 3(a) 中可以看出, 随着粒子半径的增大, 后向散射强度增大. 同时, 散射强度曲线随着 LG 光束拓扑荷的增大而不断右移, 即拓扑荷越大, 散射强度开始增大时对应的粒子半径也越大, 两者的对应关系由图 3(b) 给出, 从图中可知当拓扑荷小于 5 时, 对应的半径随拓扑荷增长较快; 当拓扑荷继续增大时, 对应的半径增幅减小, 并逐渐趋于平缓.

从图 3(a) 中还观察到曲线上出现一系列极大、极小值, 这是由于粒子散射系数中存在的贝塞尔函数 $\mathrm{j}_n(kr)$ 因子具有一定的周期变化结构, 因此出现了周期性变化的极大和极小值, 如图 4 所示. 其物理意义则体现了粒子的谐振特性, 球形粒子在谐振峰值附近出现一定的接近于自持的电磁波振荡模式, 当粒子半径符合特定入射光波长的谐振条件时, 其散射强度大于周围的点, 便出现了曲线上的峰值. 此外, 随拓扑荷增大, 散射强度曲线上的振荡幅度减小, 这是由于拓扑荷增大, 聚焦 LG 光束中心强度为零的区域增大, 其强度最大的环状区域半径增大, 需粒子半径达到一定值, 才会出现明显的振荡行为.

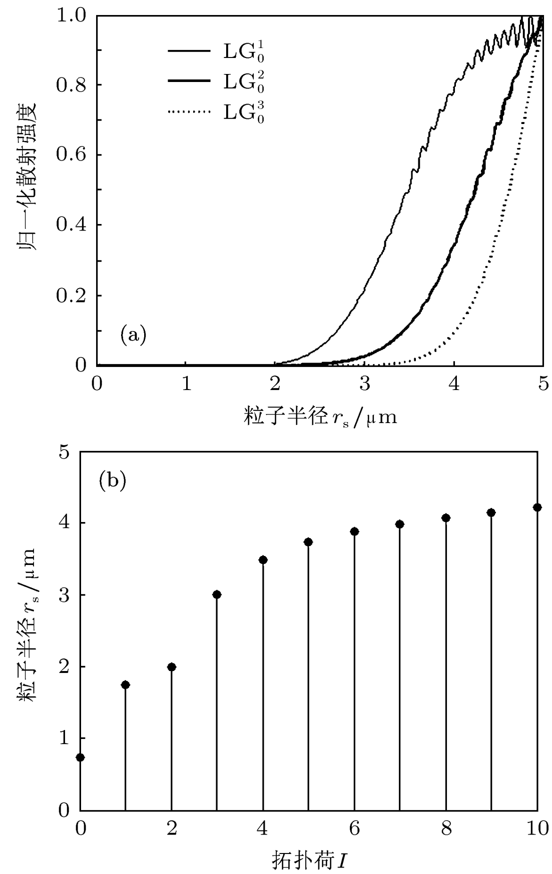

图 3 (a) 后向散射强度随粒子半径变化的曲线图; (b) 散射强度开始增大时对应的粒子半径随拓扑荷变化的离散图

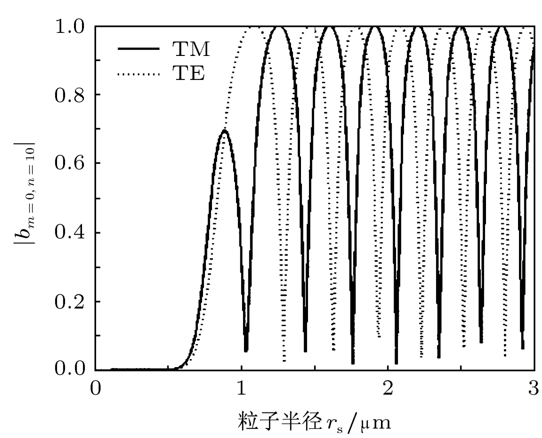

图 4 LG$_0^1$ 作为入射光时散射系数 b_{nm} 随半径变化的曲线图

图 4 是 LG$_0^1$ 作为入射光时散射系数 b_{nm} 随半径变化的曲线图, 模式数 $n = 10$, $m = 0$, 实线表

示 TM 波的散射系数 b^{h}_{nm}, 虚线代表 TE 波的散射系数 b^{e}_{nm}. 从图中可以看到粒子的散射系数呈周期性变化, 而且 TM 波的散射系数与 TE 波的散射系数仅相差相位 π.

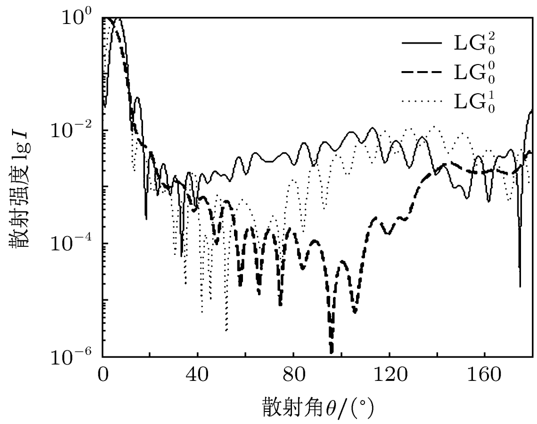

图 5 散射强度随散射角变化曲线

图 5 为 LG_0^0, LG_0^1 和 LG_0^2 三种模式 LG 光束照射下粒子散射强度随散射角的变化曲线, 选取粒子半径为 3 μm, 入射光波长为 532 nm. 从图中可知, 入射光为 LG_0^0 即基模高斯光束时, 球形粒子前向散射强度最大; 散射角为 90° 时散射强度最小, 与理论一致 [23,24]. 当入射光为 LG_0^1 和 LG_0^2 时, 由于 LG 光束中心强度为零, 散射角为 0° 时的散射强度相对于基模高斯光束较小, 而在 90° 左右散射强度大于高斯光束. 此外, 从图中还可以观察到, 随拓扑荷增大, 散射强度最大时对应的散射角逐渐增大, 如拓扑荷为 0 时对应散射角为 0°, 为 1 时对应散射角在 8° 左右, 这是因为随拓扑荷增大, LG 光束中心强度为零的区域逐渐增大. 聚焦 LG 光束对粒子的散射与高斯光束存在一定的差异, 这使得 LG 光束在一些应用中存在其独特之处, 具有潜在的应用价值.

4 结 论

本文利用广义 Mie 理论的方法, 对球形粒子在聚焦 LG 光束中的散射特性进行了研究. 文中给出 LG 光束经过数值孔径为NA的成像系统在焦平面处得到的聚焦 LG 光束的电磁场表达式, 以及球形粒子在聚焦 LG 光束中的散射系数. 通过仿真得到散射强度分布随球形粒子半径和拓扑荷等参数的变化曲线, 利用散射系数分析解释了散射强度分布曲线存在的振荡现象, 仿真结果较好地验证了本文的研究方法. 通过与高斯光束对比, 总结了球形粒子在聚焦 LG 光束中散射特性的差异, 这使得聚焦 LG 光束可以为粒径测量、光通信、大气后向散射探测等领域的发展提供新的方法. 下一步的研究将主要集中于通过实验装置来探测和验证聚焦 LG 光束对球形粒子的散射特性.

[1] Allen L, Padgett M J, Babiker M, Wolf E 1999 *Prog. Optics* **39** 291

[2] Allen L, Beijersbergen M W, Spreeuw R J, Woerdman J P 1992 *Phys. Rev.* A **45** 8185

[3] Simpson N, Dholakia K, Allen L, Padgett M 1997 *Opt. Lett.* **22** 52

[4] O′Neil A, Padgett M 2001 *Opt. Commun.* **193** 45

[5] Mair A, Vaziri A, Weihs G, Zellinger A 2001 *Nature* **412** 313

[6] Bouchal Z, Celechovsky R 2004 *New J. Phys.* **6** 131

[7] Gibson G, Courtial J, Padgett M J, Vasnetsov M, Pas'ko V, Barnett S M, Franke-Arnold S 2004 *Opt. Express* **12** 5448

[8] Li F, Jiang Y S, Tang H, Wang H Y 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 6202 (in Chinese) [黎芳, 江月松, 唐华, 王海洋 2009 物理学报 **58** 6202]

[9] Li F, Tang H, Jiang Y S, Ou J 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 014204 (in Chinese) [黎芳, 唐华, 江月松, 欧军 2011 物理学报 **60** 014204]

[10] Lü H, Ke X Z 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 8302 (in Chinese) [吕宏, 柯熙政 2009 物理学报 **58** 8302]

[11] Gao M W, Gao C Q, He X Y, Li J Z, Wei G H 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 413 (in Chinese) [高明伟, 高春清, 何晓燕, 李家泽, 魏光辉 2004 物理学报 **53** 413]

[12] Garbin V, Volpe G, Ferrari E, Versluis M, Cojoc D, Petrov D 2009 *New J. Phys.* **11** 013046

[13] Davis L W 1979 *Phys. Rev.* A **19** 1177

[14] Gouesbet G, Maheu B, Grehan G 1988 *J. Opt. Soc. Am.* A **5** 1427

[15] Gouesbet G, Grehan G, Maheu B 1988 *Appl. Opt.* **27** 4874

[16] Gouesbet G, Grehan G, Maheu B 1990 *J. Opt. Soc. Am.* A **7** 998

[17] van de Nes A S, Pereira S F, Braat J J M 2006 *J. Mod. Opt.* **53** 677

[18] van de Nes A S, Török P 2007 *Opt. Express* **15** 13360

[19] Abramowitz M, Stegun I A 1970 *Handbook of Mathematical Functions* (New York: Dover Publications) p146–155

[20] van de Hulst H C 1981 *Light Scattering by Small Particles* (New York: Dover publications) p114–128

[21] Poincelot P 1963 *Precis d'Electromagnetisme Theorique* (Paris: Dunod) p89–112

[22] Mie G 1908 *Ann. Phys.* **330** 377

[23] Wu Z S, Yuan Q K, Peng Y, Li Z J 2009 *J. Opt. Soc. Am.* A **26** 1778

[24] Wu P, Han Y P, Liu D F 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 2676 (in Chinese) [吴鹏, 韩一平, 刘德芳 2005 物理学报 **54** 2676]

Scattering of the focused Laguerre-Gaussian beams by a spherical particle*

Zhao Ji-Zhi† Jiang Yue-Song Ou Jun Ye Ji-Hai

(*School of Electronic and Information Engineering, BeiHang University, Beijing* 100191, *China*)

(Received 4 May 2011; revised manuscript received 21 Jane 2011)

Abstract

Scattering of the focused Laguerre-Gaussian beams by a spherical particle is performed. According to the generalized Mie theory, the scattering coefficient expressions are gained. From the numerical simulations of the electric field distribution and scattering intensity of the focused Laguerre-Gaussian beams, the scattering intensities are discussed for different scattering angles, radii of spherical particles and topology changes, and the oscillatory behavior of the scattered intensity distribution is explained by the scattering coefficients. The results show that in the focused Laguerre-Gaussian beams, the backscattering intensity increases with the particle radius; and the particle radius when the scattering intensity begins to increase is related to the topological charge. Comparing with the Gaussian beams, we can see that the focuced Laguerre-Gaussian beams have different the scattering characteristics, so they have potential value for particle size measurement, optical communication, atmospheric backscattering detection, etc.

Keywords: focused Laguerre-Gaussian beam, generalized Mie theory, spherical particle, topological charge

PACS: 42.25.Fx, 42.68.Mj, 42.50.−p, 42.60.Jf

* Project supported by the National Basic Research Program of China (Grant No. 2011CB707001).

† E-mail: bhcd9@163.com