

# 单双模连续压缩真空态及其量子统计性质\*

袁洪春<sup>1)†</sup> 徐学翔<sup>2)</sup>

1) (常州工学院光电工程学院, 常州 213002)

2) (江西师范大学物理与通信电子学院, 南昌 330022)

(2011年5月22日收到; 2011年6月28日收到修改稿)

利用有序算符内的积分技术研究了通过双模压缩算符作用于两个单模压缩态上得到的单双模连续压缩态. 导出了单双模连续压缩算符的正规乘积形式, 并在此基础上研究了单双模连续压缩真空态的量子统计性质. 特别是利用 Weyl 编序算符在相似变换下的不变性, 简洁地导出了单双模连续压缩真空态的 Wigner 函数. 最后, 还简单地提出了单双模连续压缩真空态的实验产生方案.

**关键词:** 单双模连续压缩算符, 压缩效应, Wigner 函数, 有序算符内的积分技术

**PACS:** 42.50.-p, 03.65.-w

## 1 引言

压缩光场是量子光学中的一种非常重要的非经典光场, 该场的一个正交分量的起伏比相干态下相应的起伏小, 即被“压缩”, 相应另一个正交分量的起伏变得更大<sup>[1,2]</sup>. 利用这一特征, 压缩态在光通信、微弱信号检测、高精度干涉测量、引力波探测等方面都有重要的应用<sup>[3-5]</sup>. 在实验上已有几种方法成功地制备了压缩态, 如二次谐波、四波混频、参量下转换等. 此外, 压缩态在量子信息处理中已得到了广泛应用<sup>[6-11]</sup>, 如利用双模压缩真空态实现量子态的远程传输与量子稠密编码. 由于压缩态得到越来越广泛的应用, 压缩算符和压缩态的研究成为量子光学领域的课题之一. 到目前为止, 已提出了很多类型的压缩态, 如光子扣除压缩真空态<sup>[12]</sup>、平移激发压缩真空态<sup>[13]</sup>、单双模组合压缩态<sup>[14]</sup>、广义压缩粒子数态<sup>[15]</sup>、多模压缩真空态<sup>[16-18]</sup>等. 特别地, Fan 等利用有序算符内的积分 (IWOP) 技术<sup>[19,20]</sup>将单模和双模压缩算符表达成坐标表象下的 ket-bra 积分型算符<sup>[21,22]</sup>. 如果将这些单模和双模压缩算符进行组合, 将构造得到不同形式的压缩算符, 且可以展现不同的压缩效果. 本文将研究其中的一种单双模连续压缩算符, 并讨论该算符所产生的压缩态的量子统计性质,

包括压缩效应、关联函数与反聚束效应、Cauchy-Schwartz 不等式的违背、光子数分布以及 Wigner 函数等.

## 2 单双模连续压缩真空态

通过连续作用压缩算符, 理论上可以构造更复杂的压缩算符. 这里, 主要研究这样的一个算符, 先作用于两个单模算符  $S_a(r_1)$  和  $S_b(r_2)$ 、再作用于一个双模压缩算符  $S_{ab}(r)$  而得到的压缩算符  $U$ , 即

$$U = S_{ab}(r) S_b(r_2) S_a(r_1), \quad (1)$$

式中

$$\begin{aligned} S_a(r_1) &= \exp\left[\frac{r_1}{2}(a^{\dagger 2} - a^2)\right], \\ S_b(r_2) &= \exp\left[\frac{r_2}{2}(b^{\dagger 2} - b^2)\right], \\ S_{ab}(r) &= \exp[r(a^{\dagger}b^{\dagger} - ab)]. \end{aligned} \quad (2)$$

且令  $r_1, r_2, r$  都是实压缩参数. 可以验证  $U^{-1}U = 1$ . 与此对应, 将  $U$  作用到双模真空态  $|00\rangle$ , 可以得到单双模连续压缩真空态  $U|00\rangle$ .

为展示  $U|00\rangle$  的明显形式, 首先考虑算符  $U$  的正规乘积展开. 在文献 [21, 22] 中, 将单模压缩算符

\* 国家自然科学基金 (批准号: 11174114)、常州工学院自然科学研究计划 (批准号: YN1106) 和江西省教育厅科学技术研究计划 (批准号: GJJ12171, GJJ11390) 资助的课题.

† E-mail: yuanhch@126.com

表达成坐标表象下的 ket-bra 积分型算符形式,

$$\begin{aligned} S_a(r_1) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx_1}{\sqrt{\mu}} \left| \frac{x_1}{\mu} \right\rangle \langle x_1 |, \mu = e^{-r_1}, \\ S_b(r_2) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx_2}{\sqrt{\nu}} \left| \frac{x_2}{\nu} \right\rangle \langle x_2 |, \nu = e^{-r_2}. \end{aligned} \quad (3)$$

以及双模压缩算符表达成坐标表象下的 ket-bra 积分型算符形式,

$$\begin{aligned} S_{ab}(r) &= \iint_{-\infty}^{\infty} dx_1 dx_2 |x_1 \cosh r \\ &\quad + x_2 \sinh r, x_2 \cosh r \\ &\quad + x_1 \sinh r \rangle \langle x_1, x_2 |, \end{aligned} \quad (4)$$

其中  $|x_1, x_2\rangle = |x_1\rangle_a |x_2\rangle_b$  是双模的坐标本征态, 在 Fock 空间的形式可表示为

$$\begin{aligned} |x_1\rangle &= \pi^{-\frac{1}{4}} \exp\left(-\frac{x_1^2}{2} + \sqrt{2}x_1 a^\dagger - \frac{a^{\dagger 2}}{2}\right) |0\rangle_a, \\ |x_2\rangle &= \pi^{-\frac{1}{4}} \exp\left(-\frac{x_2^2}{2} + \sqrt{2}x_2 b^\dagger - \frac{b^{\dagger 2}}{2}\right) |0\rangle_b. \end{aligned} \quad (5)$$

且满足  $X_1|x_1\rangle = x_1|x_1\rangle$  和  $X_2|x_2\rangle = x_2|x_2\rangle$ , 其中  $X_1 = (a + a^\dagger)/\sqrt{2}$ ,  $X_2 = (b + b^\dagger)/\sqrt{2}$ .

利用 (3) 和 (4) 式, 可以将 (1) 式中的算符  $U$  表示为

$$\begin{aligned} U &= \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{dx_1 dx_2}{\sqrt{\mu\nu}} \left| \frac{x_1}{\mu} \cosh r \right. \\ &\quad \left. + \frac{x_2}{\nu} \sinh r, \frac{x_2}{\nu} \cosh r \right. \\ &\quad \left. + \frac{x_1}{\mu} \sinh r \right\rangle \langle x_1, x_2 |. \end{aligned} \quad (6)$$

注意在计算过程中利用了坐标本征态的正交关系  $\langle x_i | x'_i \rangle = \delta(x_i - x'_i)$ . 将 (5) 式代入 (6) 式中并注意  $|00\rangle \langle 00| =: \exp(-a^\dagger a - b^\dagger b) :$  (“ $:$ ”表示正规乘积的记号), 进一步利用 IWOP 技术就可得到算符  $U$  的正规乘积形式为

$$\begin{aligned} U &= 2\sqrt{\frac{\mu\nu}{M}} \exp(\kappa_1 a^{\dagger 2} + \kappa_2 b^{\dagger 2} + \kappa_3 a^\dagger b^\dagger) \\ &\quad \times : \exp(\omega_1 a^\dagger a + \omega_2 b^\dagger b + \omega_3 a b^\dagger + \omega_4 a^\dagger b) : \\ &\quad \times \exp(\epsilon_1 a^2 + \epsilon_2 b^2 - \epsilon_3 ab), \end{aligned} \quad (7)$$

式中  $M = (\mu^2 + \nu^2) \cosh 2r + \mu^2 \nu^2 + 1$ , 且令

$$\begin{aligned} \kappa_1 &= \frac{(1 - \mu^2)(1 + \nu^2)}{2M}, \\ \kappa_2 &= \frac{(1 + \mu^2)(1 - \nu^2)}{2M}, \\ \kappa_3 &= \frac{\sinh 2r (\mu^2 + \nu^2)}{M}, \\ \omega_1 &= \frac{2\mu(1 + \nu^2) \cosh r}{M} - 1, \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \omega_2 &= \frac{2\nu(1 + \mu^2) \cosh r}{M} - 1, \\ \omega_3 &= \frac{2\mu \sinh r (\nu^2 - 1)}{M}, \\ \omega_4 &= \frac{2\nu \sinh r (\mu^2 - 1)}{M}, \\ \epsilon_1 &= \frac{(\mu^2 - \nu^2) \cosh 2r + \mu^2 \nu^2 - 1}{2M}, \\ \epsilon_2 &= \frac{(\nu^2 - \mu^2) \cosh 2r + \mu^2 \nu^2 - 1}{2M}, \\ \epsilon_3 &= \frac{2\mu\nu \sinh 2r}{M}. \end{aligned} \quad (9)$$

有了算符  $U$  的正规乘积, 这样易知道  $U|00\rangle$  的表达式为

$$U|00\rangle = 2\sqrt{\frac{\mu\nu}{M}} \exp(\kappa_1 a^{\dagger 2} + \kappa_2 b^{\dagger 2} + \kappa_3 a^\dagger b^\dagger) |00\rangle. \quad (11)$$

从 (11) 式看出,  $U|00\rangle$  是展现出明显的纠缠形式. 当  $r_1 = r_2 = 0$ ,  $U|00\rangle$  可以退化为双模压缩真空态  $\text{sech } r \exp(a^\dagger b^\dagger \tanh r) |00\rangle = S_{ab}(r) |00\rangle$ ; 而当  $r = r_2 = 0$ ,  $U|00\rangle$  就退化为单模压缩真空态与另一模真空态的直积  $\sqrt{\text{sech } r_1} \exp\left(\frac{a^{\dagger 2}}{2} \tanh r_1\right) |0\rangle_a |0\rangle_b = S_a(r_1) |0\rangle_a |0\rangle_b$ .

最后, 根据单模压缩算符的变换式

$$\begin{aligned} S_a^{-1}(r_1) a S_a(r_1) &= a \cosh r_1 + a^\dagger \sinh r_1, \\ S_b^{-1}(r_2) b S_b(r_2) &= b \cosh r_2 + b^\dagger \sinh r_2, \end{aligned} \quad (12)$$

与双模压缩算符的变换式

$$\begin{aligned} S_{ab}^{-1}(r) a S_{ab}(r) &= a \cosh r + b^\dagger \sinh r, \\ S_{ab}^{-1}(r) b S_{ab}(r) &= b \cosh r + a^\dagger \sinh r, \end{aligned} \quad (13)$$

就能得到  $U$  算符的变换关系式

$$\begin{aligned} U^{-1} a U &= (a \cosh r + b^\dagger \sinh r) \cosh r_1 \\ &\quad + (a^\dagger \cosh r + b \sinh r) \sinh r_1, \\ U^{-1} b U &= (b \cosh r + a^\dagger \sinh r) \cosh r_2 \\ &\quad + (b^\dagger \cosh r + a \sinh r) \sinh r_2. \end{aligned} \quad (14)$$

并考虑到  $X_1 = \frac{a + a^\dagger}{\sqrt{2}}$ ,  $P_1 = \frac{a - a^\dagger}{\sqrt{2}i}$ ;  $X_2 = \frac{b + b^\dagger}{\sqrt{2}}$ ,  $P_2 = \frac{b - b^\dagger}{\sqrt{2}i}$ , 就能得以下各正交分量的变换关系

$$\begin{aligned} U^{-1} X_1 U &= X_1 e^{r_1} \cosh r + X_2 e^{r_1} \sinh r, \\ U^{-1} P_1 U &= P_1 e^{-r_1} \cosh r - P_2 e^{-r_1} \sinh r, \\ U^{-1} X_2 U &= X_2 e^{r_2} \cosh r + X_1 e^{r_2} \sinh r, \\ U^{-1} P_2 U &= P_2 e^{-r_2} \cosh r - P_1 e^{-r_2} \sinh r. \end{aligned} \quad (15)$$

### 3 单双模连续压缩真空态的量子统计性质

下面研究单双模连续压缩真空态的压缩效应、关联函数与反聚束效应、Cauchy-Schwartz 不等式的违背、光子数分布、Wigner 函数等量子统计性质.

#### 3.1 压缩效应

对于双模量子系统, 其两个正交复振幅分量可定义为<sup>[2]</sup>

$$X = \frac{X_1 + X_2}{\sqrt{2}}, \quad P = \frac{P_1 + P_2}{\sqrt{2}}, \quad (16)$$

由于  $[X, P] = i$ , 可见它们是一对共轭量, 其方均涨落分别为  $(\Delta X)^2 = \langle X^2 \rangle - \langle X \rangle^2$ ,  $(\Delta P)^2 = \langle P^2 \rangle - \langle P \rangle^2$ . 利用  $U$  算符的变换关系式 (14), 可得相应算符在  $U|00\rangle$  中的期望值为

$$\begin{aligned} \langle a^\dagger a \rangle &= \frac{\cosh(2r_1 - 2r) + \cosh(2r + 2r_1)}{4} - \frac{1}{2}, \\ \langle b^\dagger b \rangle &= \frac{\cosh(2r_2 - 2r) + \cosh(2r + 2r_2)}{4} - \frac{1}{2}, \\ \langle ab \rangle &= \langle a^\dagger b^\dagger \rangle = \frac{\sinh 2r \cosh(r_1 + r_2)}{2}, \end{aligned} \quad (17)$$

其中  $\langle a^\dagger a \rangle$  与  $\langle b^\dagger b \rangle$  实际上就是  $a$  模与  $b$  模的平均光子数. 于是, 得到

$$\begin{aligned} (\Delta X)^2 &= \frac{1}{2} (\langle a^\dagger a \rangle + \langle b^\dagger b \rangle + \langle ab \rangle + \langle a^\dagger b^\dagger \rangle + 1) \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{\cosh 2r}{2} (e^{2r_1} + e^{2r_2}) \right. \\ &\quad \left. + e^{r_1+r_2} \sinh 2r \right], \end{aligned} \quad (18)$$

以及

$$\begin{aligned} (\Delta P)^2 &= \frac{1}{2} (\langle a^\dagger a \rangle + \langle b^\dagger b \rangle - \langle ab \rangle - \langle a^\dagger b^\dagger \rangle + 1) \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{\cosh 2r}{2} (e^{-2r_1} + e^{-2r_2}) \right. \\ &\quad \left. - e^{-r_1-r_2} \sinh 2r \right], \end{aligned} \quad (19)$$

从而有

$$\Delta X \Delta P = \frac{1}{2} \sqrt{\cosh^2 2r \cosh^2(r_1 - r_2) - \sinh^2 2r}. \quad (20)$$

很明显, 当  $r_1 = r_2 > 0$ , (18) 和 (19) 式分别退化为

$$\begin{aligned} (\Delta X)^2 &= \frac{1}{4} e^{2r_1} e^{2r} > \frac{1}{4} e^{2r}, \\ (\Delta P)^2 &= \frac{1}{4} e^{-2r_1} e^{-2r} < \frac{1}{4} e^{-2r}. \end{aligned} \quad (21)$$

由根据 Heisenberg 不确定原理可知, 任意一对满足关系式  $[X, P] = i$  的共轭量, 其方均涨落之积

必须大于或等于某一常数, 即  $\Delta X \Delta P \geq \frac{1}{4}$ . 如果光场的正交分量满足  $\Delta X \leq \frac{1}{2}$  或  $\Delta P \leq \frac{1}{2}$ , 则称光场在  $X$  分量上或  $P$  分量上存在压缩效应.

#### 3.2 关联函数与反聚束效应

为进一步展示  $U|00\rangle$  的光子统计属性, 借助双模系统的关联函数  $g_{ab}^{(2)}$  与反聚束效应  $R_{ab}$ , 来反映该量子态的性质. 其中关联函数  $g_{ab}^{(2)}$  的定义为<sup>[23,24]</sup>

$$g_{ab}^{(2)} = \frac{\langle a^\dagger a b^\dagger b \rangle}{\langle a^\dagger a \rangle \langle b^\dagger b \rangle}, \quad (22)$$

如果  $g_{ab}^{(2)} > 1$ , 则反映了双光场的  $a$  模和  $b$  模之间存在关联, 否则它们是反关联; 而双模辐射场存在反聚束效应的判据为<sup>[25]</sup>

$$R_{ab} = \frac{\langle a^{\dagger 2} a^2 \rangle + \langle b^{\dagger 2} b^2 \rangle}{2 \langle a^\dagger a b^\dagger b \rangle} - 1 < 0. \quad (23)$$

利用 (14) 式的变换关系, 同样可以得到

$$\begin{aligned} \langle a^{\dagger 2} a^2 \rangle &= 2 \sinh^4 r \cosh^4 r_1 + 2 \cosh^4 r \sinh^4 r_1 \\ &\quad + \frac{3 \sinh^2 2r \sinh^2 2r_1}{8} \\ &\quad + \frac{(\cosh^4 r + \sinh^4 r) \sinh^2 2r_1}{4}, \end{aligned} \quad (24)$$

和

$$\begin{aligned} \langle b^{\dagger 2} b^2 \rangle &= 2 \sinh^4 r \cosh^4 r_2 + 2 \cosh^4 r \sinh^4 r_2 \\ &\quad + \frac{3 \sinh^2 2r \sinh^2 2r_2}{8} \\ &\quad + \frac{(\cosh^4 r + \sinh^4 r) \sinh^2 2r_2}{4}. \end{aligned} \quad (25)$$

以及

$$\begin{aligned} \langle a^\dagger a b^\dagger b \rangle &= \frac{\sinh^2 2r}{4} \cosh(2r_1 + 2r_2) \\ &\quad + \frac{\sinh^2 2r}{4} (\sinh^2 r_1 \cosh^2 r_2 \\ &\quad + \cosh^2 r_1 \sinh^2 r_2) \\ &\quad + \sinh^4 r \cosh^2 r_1 \cosh^2 r_2 \\ &\quad + \cosh^4 r \sinh^2 r_1 \sinh^2 r_2. \end{aligned} \quad (26)$$

将 (17) 式、(24)—(26) 式代入 (22) 和 (23) 式, 得到  $U|00\rangle$  的关联函数  $g_{ab}^{(2)}$  与反聚束效应  $R_{ab}$  相应的表达式. 图 1 给出了不同  $r_1, r_2$  的情形下  $g_{ab}^{(2)}$  与  $R_{ab}$  随  $r$  的变化数值结果, 可清楚看到关联函数  $g_{ab}^{(2)}$  与反聚束效应  $R_{ab}$  随各压缩参数  $r$  的演化特征. 从图 1(a) 中不难看出单双模连续压缩真空态

中  $a$  模和  $b$  模之间都存在关联除  $r = 0$  的情况之外. 从图 1(b) 中看出, 当  $r_1 = r_2 = 0$ ,  $U|00\rangle$  可以退化为双模压缩真空态,  $R_{ab, r_1=r_2=0} = -\text{sech} 2r < 0$ , 这意味着双模压缩真空态总是存在反聚束效应; 而对于其他情况, 相应的光场并不总是反聚束的, 对于给定的  $r_1, r_2$ , 当压缩参数  $r$  处在一定范围内量子态才表现出反聚束效应.

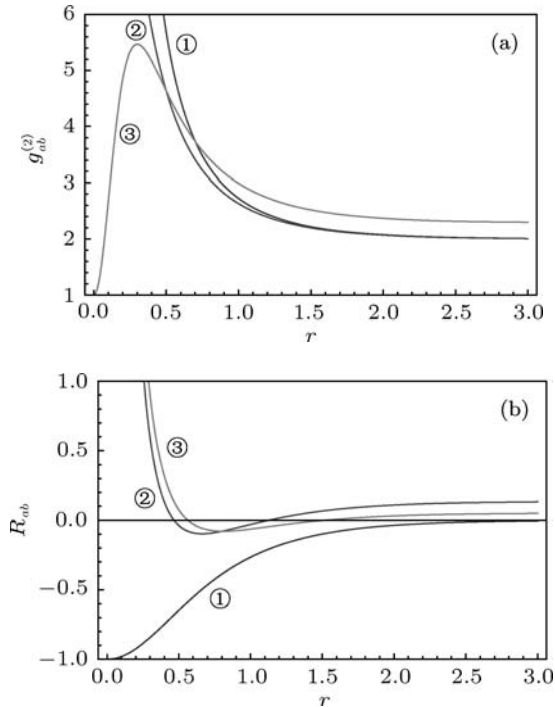


图 1 (a) 关联函数  $g_{ab}^{(2)}$ ; (b) 反聚束效应  $R_{ab}$  随压缩参数  $r$  演化的曲线图, 其中 ①  $r_1 = r_2 = 0$ ; ②  $r_1 = 0.3, r_2 = 0$  或  $r_1 = 0, r_2 = 0.3$ ; ③  $r_1 = r_2 = 0.3$

### 3.3 Cauchy-Schwartz 不等式的违背

双模光场的 Cauchy-Schwartz 不等式定义为 [26,27]

$$\langle a^{\dagger 2} a^2 \rangle \langle b^{\dagger 2} b^2 \rangle \geq \langle a^{\dagger} a b^{\dagger} b \rangle^2, \quad (27)$$

对 Cauchy-Schwartz 不等式的违背表示场模之间存在强烈的非经典关联, 作为对这种违背的测量, 引入  $I_0$  参量

$$I_0 = \frac{|\langle a^{\dagger 2} a^2 \rangle \langle b^{\dagger 2} b^2 \rangle|^{1/2}}{\langle a^{\dagger} a b^{\dagger} b \rangle} - 1, \quad (28)$$

若  $I_0 > 0$ , 则说明两模间的相关性满足经典理论中的 Cauchy-Schwartz 不等式, 为经典相关; 反之, 若  $I_0 < 0$ , 则表明 Cauchy-Schwartz 不等式受到破坏, 光场两模之间的相关为非经典相关.

根据 (24)–(26) 式的结果代入到 (28) 式便得到  $I_0$  的表达式, 并绘制了  $I_0$  的随压缩参数  $r$  的变

化曲线, 如图 2 所示. 当  $r_1 = r_2 = 0$  时, 即双模压缩真空态, 违背了 Cauchy-Schwartz 不等式, 而当  $r$  比较大的时,  $I_0$  趋于零, 如图曲线 ① 所示. 对于给定的  $r_1$  与  $r_2$  的值, 当压缩参数  $r$  大于某一阈值,  $I_0 > 0$ , 没有违背 Cauchy-Schwartz 不等式, 此时光场的两模之间为经典相关, 但该阈值随着  $r_1$  或  $r_2$  值的增加而减小.

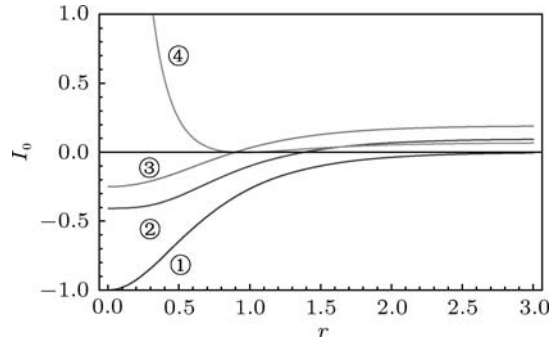


图 2  $I_0$  随压缩参数  $r$  变化的曲线图 其中 ①  $r_1 = r_2 = 0$ ; ②  $r_1 = 0.3, r_2 = 0$ ; ③  $r_1 = 0, r_2 = 0.6$ ; ④  $r_1 = 0.3, r_2 = 0.6$

### 3.4 光子数分布

为了求得  $U|00\rangle$  的光子数分布, 即

$$P(n_a, n_b) = |\langle n_a, n_b | U|00\rangle|^2, \quad (29)$$

首先计算内积

$$\begin{aligned} & \langle n_a, n_b | U|00\rangle \\ &= 2\sqrt{\frac{\mu\nu}{M}} \langle n_a, n_b | \exp(\kappa_1 a^{\dagger 2} + \kappa_2 b^{\dagger 2} \\ & \quad + \kappa_3 a^{\dagger} b^{\dagger}) |00\rangle \end{aligned} \quad (30)$$

即可. 借助非归一化相干态  $|z\rangle = \exp(za^{\dagger})|0\rangle$ , 由于  $\langle n| = \frac{1}{\sqrt{n!}} \frac{\partial^n}{\partial z^{*n}} \langle z|_{z^*=0}$ , (30) 式可以表示为

$$\begin{aligned} & \langle n_a, n_b | U|00\rangle \\ &= 2\sqrt{\frac{\mu\nu}{n_a! n_b! M}} \times \frac{\partial^{n_a+n_b}}{\partial z_a^{*n_a} \partial z_b^{*n_b}} \\ & \quad \times \exp(\kappa_1 z_a^{*2} + \kappa_2 z_b^{*2} + \kappa_3 z_a^* z_b^*) \Big|_{z_a^*=z_b^*=0}, \end{aligned} \quad (31)$$

将上式中各指数项展开为级数形式, 并利用关系  $\frac{d^n x^m}{dx^n} \Big|_{x=0} = n! \delta_{m,n}$  ( $\delta$  是 Kronecker 符号), 可以得到

$$\begin{aligned} & \langle n_a, n_b | U|00\rangle \\ &= 2\sqrt{\frac{\mu\nu n_a! n_b!}{M}} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n_a}{2} \rfloor} \sum_{l=0}^{\lfloor \frac{n_b}{2} \rfloor} \frac{\kappa_1^k \kappa_2^l \kappa_3^{(n_b-2l)} \delta_{n_a-2k, n_b-2l}}{k! l! (n_b-2l)!}, \end{aligned} \quad (32)$$

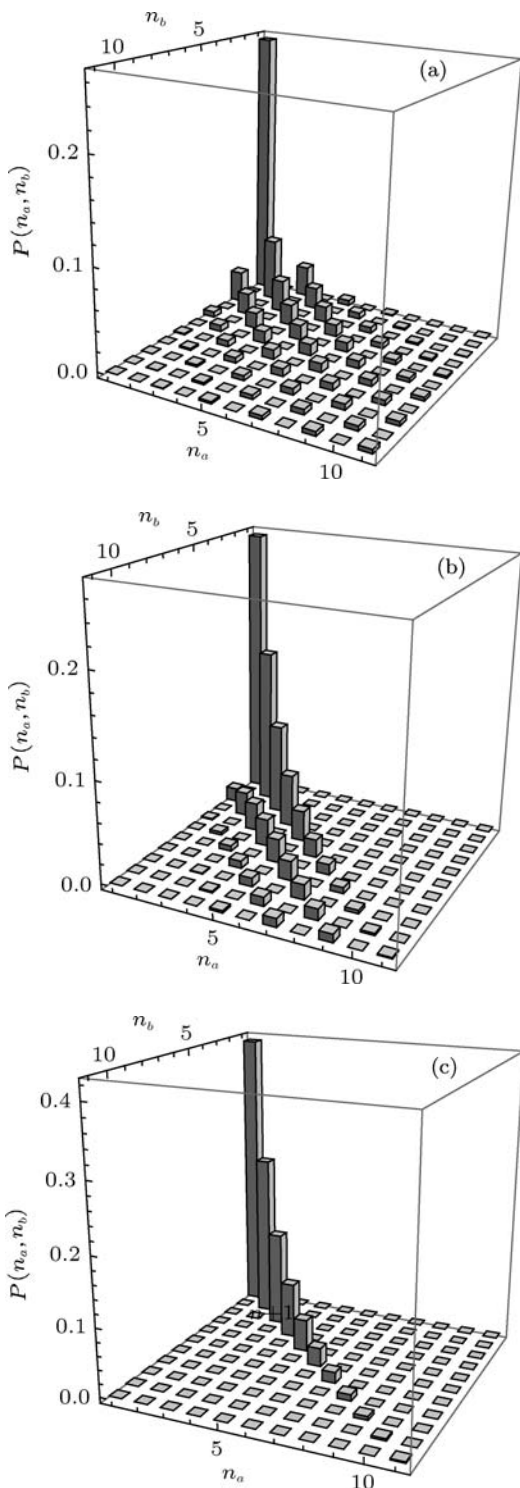


图3  $U|00\rangle$  的光子数  $P(n_a, n_b)$  分布图 (a)  $r = r_1 = r_2 = 1$ ; (b)  $r = r_1 = 1, r_2 = 0$ ; (c)  $r = 1, r_1 = r_2 = 0$ .

容易得到  $U|00\rangle$  的光子数分布为

$$P(n_a, n_b) = \frac{4\mu\nu n_a! n_b!}{M} \left| \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n_a}{2} \rfloor} \sum_{l=0}^{\lfloor \frac{n_b}{2} \rfloor} \frac{\kappa_1^k \kappa_2^l \kappa_3^{(n_b-2l)} \delta_{n_a-2k, n_b-2l}}{k! l! (n_b-2l)!} \right|^2. \quad (33)$$

特别地, 当  $r_1 = r_2 = 0$ , (33) 式退化为

$$P_{r_1=r_2=0}(n_a, n_b) = (\operatorname{sech} r \tanh^{n_a} r)^2 \delta_{n_a, n_b}, \quad (34)$$

这正是双模压缩真空态的光子数分布<sup>[28]</sup>.

为清楚地展示不同压缩参数  $r, r_1, r_2$  对光子数分布的影响, 在 Fock 空间  $(n_a, n_b)$  中绘制了光子数  $P(n_a, n_b)$  分布情况. 其中图 3(c) 就是双模压缩真空态的光子数分布图, 由 (34) 式可知随着压缩参数  $r$  的增加, 光子数分布变得越来越扁平, 这是因为  $\operatorname{sech} r$  减少了粒子数的分布权重.

### 3.5 Wigner 函数

Wigner 相空间分布函数是量子相空间理论中最重要的组成部分, 它既是相空间理论的基础, 也是实际应用中主要的工具之一<sup>[29,30]</sup>. 此外, Wigner 函数的负定性也是研究量子态非经典性的一个重要手段<sup>[15,31-33]</sup>. 下面, 我们采用一种新的方法导出  $U|00\rangle$  的 Wigner 函数的表达式. 为了求得  $U|00\rangle$  的 Wigner 函数, 只要计算

$$\begin{aligned} W(x_1, p_1; x_2, p_2) &= \operatorname{tr} [U|00\rangle \langle 00| U^{-1} \Delta_1(x_1, p_1) \Delta_2(x_2, p_2)] \\ &= \langle 00| U^{-1} \Delta_1(x_1, p_1) \Delta_2(x_2, p_2) U |00\rangle, \end{aligned} \quad (35)$$

式中  $\Delta_1(x_1, p_1)$  和  $\Delta_2(x_2, p_2)$  是两个单模 Wigner 算符. 以  $\Delta_1(x_1, p_1)$  为例, 其 Weyl 编序形式为 (引进 “ $\vdots$ ” 作为 Weyl 编序的记号)

$$\Delta_1(x_1, p_1) = \vdots \delta(x_1 - X_1) \delta(p_1 - P_1) \vdots, \quad (36)$$

这是一个重要的算符恒等式, 即 Wigner 算符的 Weyl 编序是  $\delta$  函数<sup>[34]</sup>. 并注意到算符的 Weyl 编序具有如下独特的性质: Weyl 编序在相似变换操作下具有 “不变性”<sup>[34]</sup>, 即

$$S^{-1} \vdots f(a^\dagger, a) \vdots S = \vdots f(S^{-1} a^\dagger S, S^{-1} a S) \vdots, \quad (37)$$

即相似变换算符  $S$  的作用可以穿过 Weyl 编序记号 “ $\vdots$ ”. 根据这个性质, 可方便地导出  $U|00\rangle$  的 Wigner 函数. 根据变换关系 (15) 式, 则双模 Wigner 算符在  $U$  算符下的变换为

$$\begin{aligned} &U^{-1} \Delta_1(x_1, p_1) \Delta_2(x_2, p_2) U \\ &= U^{-1} \vdots \delta(x_1 - X_1) \delta(p_1 - P_1) \\ &\quad \times \delta(x_2 - X_2) \delta(p_2 - P_2) \vdots U \\ &= \vdots \delta[(x_1 e^{-r_1} \cosh r - x_2 e^{-r_2} \sinh r) - X_1] \\ &\quad \times \delta[(p_1 e^{r_1} \cosh r + p_2 e^{r_2} \sinh r) - P_1] \\ &\quad \times \delta[(-x_1 e^{-r_1} \sinh r + x_2 e^{-r_2} \cosh r) - X_2] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \times \delta [(p_1 e^{r_1} \sinh r + p_2 e^{r_2} \cosh r) - P_2] \Big| \cdot \\ & = \Delta_1(\bar{x}_1, \bar{p}_1) \Delta_2(\bar{x}_2, \bar{p}_2), \end{aligned} \quad (38)$$

其中

$$\begin{aligned} \bar{x}_1 & \equiv x_1 e^{-r_1} \cosh r - x_2 e^{-r_2} \sinh r, \\ \bar{p}_1 & \equiv p_1 e^{r_1} \cosh r + p_2 e^{r_2} \sinh r, \\ \bar{x}_2 & \equiv -x_1 e^{-r_1} \sinh r + x_2 e^{-r_2} \cosh r, \\ \bar{p}_2 & \equiv p_1 e^{r_1} \sinh r + p_2 e^{r_2} \cosh r. \end{aligned} \quad (39)$$

在文献 [29] 中已给出了真空态  $|0\rangle$  的 Wigner 函数为

$$W_1(x_1, p_1) = \langle 0 | \Delta_1(x_1, p_1) | 0 \rangle = \frac{e^{-x_1^2 - p_1^2}}{\pi}, \quad (40)$$

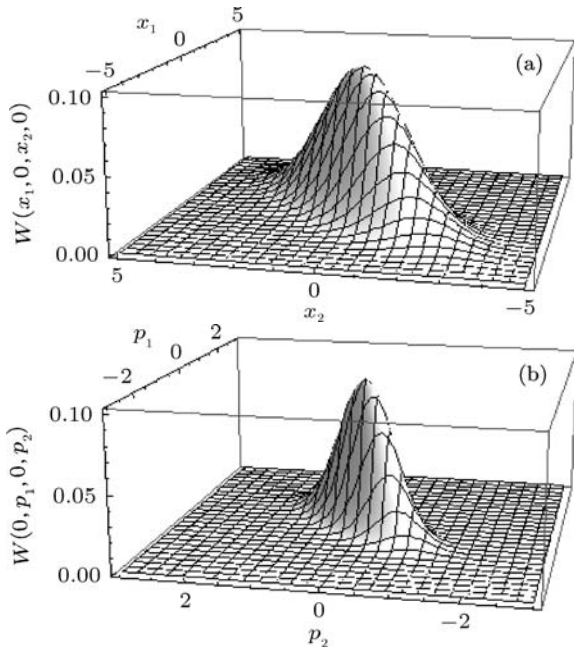


图 4  $U|00\rangle$  的 Wigner 函数分布图 其中  $r = r_1 = r_2 = 0.5$

根据 (38) 式的形式容易得到  $U|00\rangle$  的 Wigner 函数为

$$\begin{aligned} & W(x_1, p_1; x_2, p_2) \\ & = \frac{1}{\pi^2} \exp \left[ -x_1^2 e^{-2r_1} \cosh 2r - p_1^2 e^{2r_1} \cosh 2r \right. \\ & \quad \left. - x_2^2 e^{-2r_2} \cosh 2r - p_2^2 e^{2r_2} \cosh 2r \right. \\ & \quad \left. + 2(x_1 x_2 e^{-r_1} e^{-r_2} - p_1 p_2 e^{r_1} e^{r_2}) \sinh 2r \right]. \end{aligned} \quad (41)$$

特别地, 当  $r_1 = r_2 = 0$  时, (41) 式就退化为

$$\begin{aligned} & W(x_1, p_1; x_2, p_2) \Big|_{r_1=r_2=0} \\ & = \frac{1}{\pi^2} \exp \left[ - (x_1^2 + p_1^2 + x_2^2 + p_2^2) \cosh 2r \right] \end{aligned}$$

$$+ 2(x_1 x_2 - p_1 p_2) \sinh 2r], \quad (42)$$

这正是双模压缩真空态的 Wigner 函数 [29]. 从 (41) 式形式上可以判断,  $U|00\rangle$  的 Wigner 函数实际上也是高斯形式, 不可能出现负值 (见图 4). 当然, 没有负值并不能说明  $U|00\rangle$  就不是非经典态.

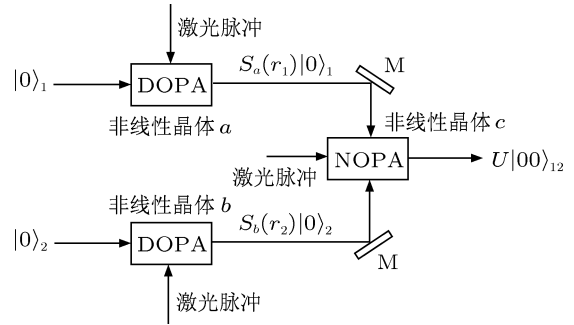


图 5  $U|00\rangle$  的实验产生方案示意图

### 4 结论与讨论

本文研究了一种连续单双模压缩真空态. 借助有序算符内的积分技术, 很容易地导出单双模连续压缩算符的正规乘积形式, 并在此基础上得到了单双模连续压缩真空态的表达式. 为展现连续单双模压缩真空态的非经典特性, 计算其压缩效应、关联函数与反聚束效应、Cauchy-Schwartz 不等式的违背、光子数分布等量子统计属性. 特别是, 利用算符的 Weyl 编序在相似变换操作下具有“不变性”, 导出了单双模连续压缩真空态的 Wigner 函数的解析式, 该方法非常简洁. 在实验上产生单双模连续压缩真空态  $U|00\rangle$  的方案如图 5 所示, 分别利用三束激光源去抽运三种非线性晶体  $a, b, c$ . 当真空态与抽运光同时分别作用非线性晶体  $a, b$ , 产生两个单模压缩真空态, 其过程视为简并参量放大 (DOPA). 然后将两个单模压缩光同时耦合在非线性晶体  $c$ , 作用后就能产生单双模连续压缩真空态  $U|00\rangle$ , 这可视为非简并参量放大 (NOPA) 过程 [35]. 实际上, 由两个单模算符  $S_a(r_1), S_b(r_2)$  和一个双模压缩算符  $S_{ab}(r)$  所构造得到的压缩算符除了以上讨论的算符  $U$  外, 还可以有  $S_a(r_1) S_{ab}(r) S_b(r_2), S_b(r_2) S_{ab}(r) S_a(r_1), S_b(r_2) S_a(r_1) S_{ab}(r)$  等多种组合形式, 这些算符当然也会呈现不同的压缩效果, 作用到同一量子态上所得量子态将具有不同的量子统计属性. 如果对这些态继续进行非高斯操作 [36], 可以得到一系列的双模非高斯量子态, 这也是我们将进一步研究的课题.

- [1] Dodonov V V 2002 *J. Opt. B: Quantum Semiclass. Opt.* **4** R1
- [2] Loudon R, Knight P L 1987 *J. Mod. Opt.* **34** 709
- [3] Walls D F 1983 *Nature* **306** 141
- [4] Collet M J, Walls D F 1985 *Phys. Rev. A* **32** 2887
- [5] Lakshmi P A, Agarwal G S 1984 *Phys. Rev. A* **29** 2260
- [6] Milburn G J, Braunstein S L 1999 *Phys. Rev. A* **60** 937
- [7] Zhang J, Peng K C 2000 *Phys. Rev. A* **62** 064302
- [8] Song T Q 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 3358 (in Chinese) [宋同强 2004 物理学报 **53** 3358]
- [9] Ban M 1999 *J. Opt. B: Quantum Semiclass. Opt.* **1** L9
- [10] He G Q, Yi Z, Zhu J, Zeng G H 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 6427 (in Chinese) [何广强, 易智, 朱俊, 曾贵华 2007 物理学报 **56** 6427]
- [11] Yi Z, He G Q, Zeng G H 2007 *Acta Phys. Sin.* **58** 3166 (in Chinese) [易智, 何广强, 曾贵华 2009 物理学报 **58** 3166]
- [12] Hu L Y, Fan H Y 2008 *J. Opt. Soc. Am. B* **25** 1955
- [13] Sun Z H, Fan H Y 2000 *Acta Phys. Sin.* **49** 74 (in Chinese) [孙治湖, 范洪义 2000 物理学报 **49** 74]
- [14] Fan H Y 1990 *Phys. Rev. A* **41** 1526
- [15] Xu X X, Yuan H C, Hu L Y 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 4661 (in Chinese) [徐学翔, 袁洪春, 胡利云 2010 物理学报 **59** 4661]
- [16] Jiang N Q, Zheng Y Z 2006 *Phys. Rev. A* **74** 012306
- [17] Jiang N Q, Jing N Q, Zhang Y, Cai G C 2008 *Europhys. Lett.* **84** 14002
- [18] Jiang N Q, Fan H Y 2008 *Commun. Theor. Phys.* **49** 225
- [19] Fan H Y 2003 *J. Opt. B: Quantum Semiclass. Opt.* **5** R147
- [20] Fan H Y, Lu H L, Fan Y 2006 *Ann. Phys.* **321** 480
- [21] Fan H Y, VanderLinde J 1989 *Phys. Rev. A* **39** 1552
- [22] Fan H Y, Zaidi H R, Klauder J R 1987 *Phys. Rev. D* **35** 1831
- [23] Lai W K, Buek V, Knight P L 1991 *Phys. Rev. A* **44** 6043
- [24] Meng X G, Wang J S 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 4578 (in Chinese) [孟祥国, 王继锁 2007 物理学报 **56** 4578]
- [25] Lee C T 1990 *Phys. Rev. A* **41** 1569
- [26] Buek V, Barranco A, Knight P L 1992 *Phys. Rev. A* **45** 6570
- [27] Zhao J Q, Lu H X 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 7875 (in Chinese) [赵加强, 逯怀新 2010 物理学报 **59** 7875]
- [28] Lee C T 1990 *Phys. Rev. A* **42** 1608
- [29] Schleich P W 2001 *Quantum Optics in Phase Space* (Berlin: Wiley-Vch)
- [30] Zhang Z M 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 70 (in Chinese) [张智明 2004 物理学报 **53** 70]
- [31] Meng X G, Wang J S, Liang B L 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 2160 (in Chinese) [孟祥国, 王继锁, 梁宝龙 2007 物理学报 **56** 2160]
- [32] Hu L Y, Fan H Y 2009 *Chin. Phys. B* **18** 4657
- [33] Xu X X, Yuan H C, Fan H Y 2011 *Chin. Phys. B* **20** 024203
- [34] Fan H Y 2008 *Ann. Phys.* **323** 500
- [35] Bachor H A, Ralph T C 2003 *A Guide to Experiments in Quantum Optics* (Berlin: Wiley-Vch)
- [36] Yang Y, Li F L 2009 *Phys. Rev. A* **80** 022315

# One- and two-mode successively squeezed state and its statistical properties\*

Yuan Hong-Chun<sup>1†</sup> Xu Xue-Xiang<sup>2)</sup>

1) (College of Optoelectronic Engineering, Changzhou Institute of Technology, Changzhou 213002, China)

2) (College of Physics and Communication Electronics, Jiangxi Normal University, Nanchang 330022, China)

(Received 22 May 2011; revised manuscript received 28 June 2011)

## Abstract

One- and two-mode successively squeezed state, obtained through re-squeezing two single mode squeezed states by the two-mode squeezing operator, is studied in terms of the technique of integration within an ordered product (IWOP) of operators. We first derive the normally ordered form of this one- and two-mode successively squeezing operator, and then investigate the quantum statistical properties of the corresponding squeezed state. Particularly, we use the Weyl ordering invariance under a similar transformation to derive the analytical expression of its Wigner function, which seems very easy and concise. Finally, the experimental generation of one- and two-mode successively squeezed state is also proposed simply.

**Keywords:** one- and two-mode successively squeezing operator, squeezing effect, Wigner function, the IWOP technique

**PACS:** 42.50.-p, 03.65.-w

---

\* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 11174114), the Research Foundation of Changzhou Institute of Technology, China (Grant No. YN1106) and the Research Foundation of Education Department of Jiangxi Province, China (Grant Nos. GJJ12171, GJJ11390).

† E-mail: yuanhch@126.com