

新的对角形式快速多极边界元法求解声学 Helmholtz 方程*

李善德¹⁾ 黄其柏^{1)†} 李天匀²⁾

1) (华中科技大学数字制造装备与技术国家重点实验室, 武汉 430074)

2) (华中科技大学船舶与海洋工程学院, 武汉 430074)

(2011年9月27日收到; 2011年11月4日收到修改稿)

传统外部声学 Helmholtz 边界积分方程无法在个人计算机上求解大规模工程问题. 为了有效解决这个问题, 将快速多极方法引入到边界积分方程中, 加速系统矩阵方程组的迭代求解. 由于在边界积分方程中引入基本解的对角形式多极扩展, 新的快速多极边界元法的计算效率与传统边界元相比显著提高, 计算量和存储量减少到 $O(N)$ 量级 (N 为问题的自由度数). 包括含有 420000 个自由度的大型潜艇模型数值算例验证了快速多极边界元法的准确性和高效性, 清楚表明新算法在求解大规模声学问题中的优势, 具有良好的工程应用前景.

关键词: 快速多极方法, 边界元法, 对角形式, Helmholtz 方程

PACS: 43.20.+g, 02.70.Pt

1 引言

在很多工程和科学问题计算中, 边界元方法 (boundary element method, 简记为 BEM) 是一种有效的数值工具, 它具有降维、求解精度高、适合处理复杂结构及无限域问题等优点, 被广泛应用于力学、电学、声学等领域的研究^[1-4]. 但是传统边界元法形成的系数矩阵是非对称满阵, 对该矩阵的求解需要消耗大量的计算机资源, 如采用直接法 (如 Gauss 消元法) 进行求解, 计算量和存储量的量级分别为 $O(N^3)$ 和 $O(N^2)$, 其中 N 为问题自由度数. 如果采用迭代算法, 如广义极小残差法 (GMRES)^[5], 边界元法的计算量可以降低到 $O(N^2)$ 量级. 然而, 即使具有 $O(N^2)$ 量级计算效率的边界元迭代求解法, 在个人计算机上仍然难以计算自由度数超过一万的工程问题. 对于工程中广泛存在的飞机、潜艇、汽车、大型机电系统等声辐射或散射问题, 需要将这些模型表面离散成几十万甚至上百万个自由度, 显然传统边界元法无法求解这类大规模工程声学问题. 目前, 发展高效、准确的快速边界元法是国际上的一个热点研究领域.

1985 年, Rokhlin 和 Greengard^[6,7] 首先提出快速多极方法 (fast multipole method, 简记为 FMM), 并用于模拟计算大规模物理场粒子问题, 可以有效提高边界积分方程的计算效率至 $O(N)$ 量级. 快速多极方法的核心思想是对核函数 (基本解) 引入多极扩展, 将源点与场点分离, 用单元集合作用取代粒子间作用, 加速积分方程的矩阵与向量乘积, 从而使计算量和存储量量级从 $O(N^2)$ 减少到 $O(N)$. 可见, 快速多极方法非常适合大规模计算. 快速多极方法一出现, 就受到广泛关注, 对科学界和工程界产生了巨大影响, 并被评为 20 世纪十大算法之一, 逐渐被应用到电磁场、力学等领域^[8-10] 的大规模工程计算, 在个人计算机上成功求解自由度超过一百万的工程问题. 文献 [11] 详细介绍了快速多极方法的发展及在各个领域的应用. 目前, 在国际上快速多极边界元法已初步应用到声学领域^[12-16], 并在计算大规模声学问题方面表现出广阔的工程应用前景, 而在国内, 这一研究领域刚刚起步.

本文基于平面波扩展方法的对角形式, 提出一种新的快速多极边界元法加速求解 Helmholtz 方

* 国家自然科学基金 (批准号: 51175195) 资助的课题.

† E-mail: lishande@gmail.com; qbhuang@mail.hust.edu.cn

程,用于计算大规模三维(3D)声学问题.这是对最近二维(2D)研究工作的进一步延伸^[17].新算法在如下三个方面有重要改进:首先,快速多极方法引入基本解的对角形式多极扩展转换,非常适合求解宽频和低频声学问题;其次,利用Burton-Miller公式有效去除传统边界元法求解外部声学的非唯一解问题;此外,采用GMRES求解器和稀疏近似求逆预处理技术有效加速线性系统方程组的迭代收敛.因此,新算法的计算效率全面提高,计算量和存储量仅为 $O(N)$ 量级.数值算例验证了快速多极边界元方法的准确性,表明快速多极边界元方法的计算效率与传统边界元方法相比有数量级的提高,能够有效求解超过420000个自由度的大型复杂潜艇模型的声学问题.

2 传统边界元法

声场分析中通常研究随时间简谐变化的声波.在无限或有限声域内,简谐声波在均匀各向同性介质中传播的控制方程如下

$$\nabla^2 \phi(x) + k^2 \phi(x) = 0, \quad x \in E, \quad (1)$$

其中 ϕ 为声压, $k = \omega/c$ 为波数, ω 为角频率, c 为介质中的声速.(1)式就是著名的Helmholtz方程,通常存在如下三类边界条件:Dirichlet边界条件(声压值给定),Neumann边界条件(法向速度给定)和阻抗边界条件(阻抗给定).对于外部无限域声学问题,辐射或散射声波自动满足Sommerfeld辐射条件

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r \left(\frac{\partial \phi}{\partial r} - ik\phi \right) = 0, \quad (2)$$

其中 r 为源点到场点的距离, $i = \sqrt{-1}$.

应用Green第二定理可得到Helmholtz方程(1)的积分表达式

$$\begin{aligned} & C(x)\phi(x) \\ &= \int_S \left[-\frac{\partial G_k(x,y)}{\partial n_y} \phi(y) + G_k(x,y)q(y) \right] dS_y \\ &+ \phi_{in}(x), \end{aligned} \quad (3)$$

其中 x 为源点, y 为场点, $q(y)$ 为声压 ϕ 在点 y 处的法向导数, S_y 表示结构边界 S 的子边界, $\phi_{in}(x)$ 表示入射波(仅用于声散射问题), n_y 为 y 点处的边界外法线方向.系数 $C(x)$ 与源点 x 所处的位置有关,一般分为如下三种情况:当源点 x 位于外部声域, $C(x) = 1$;当源点 x 位于结构内部, $C(x) = 0$;当源

点 x 位于光滑的边界 S 上, $C(x)=1/2$. G_k 为自由空间Green函数的基本解:

$$G_k(x,y) = \frac{e^{ikr}}{4\pi r}, \quad (4)$$

其中 $r = |x - y|$.

(3)式是传统边界元法求解声学问题的一般积分表达式.如果边界 S 的法向导数 $q(y)$ 已知,则通过方程(3)可以求解出声域内任意点的声压值.然而,对于求解外部声波问题,传统边界元法有一个重要缺陷,即在某些相应于内部问题的特征频率(eigen-frequencies),方程(3)无法求得唯一解,这些频率称为伪频率(fictitious frequencies).这个非唯一解问题并不是声学问题本身的物理特性,而是一个纯数学问题,是由于边界积分公式无效引起的.目前,关于如何有效去除传统边界元法求解外部声学的非唯一解问题仍然是一个热点研究方向.如今已有很多方法^[18]用于克服传统边界元法的非唯一解缺陷,其中Burton-Miller公式^[19]是被公认为最有效及鲁棒性的方法.因此,本文运用Burton-Miller公式来克服传统边界元法的非唯一解问题.

将(3)式对源点 x 处的边界外法线方向 n_x 求导,即得到一个新方程.把这个新方程与(3)式线性结合,即可得到Burton-Miller公式:

$$\begin{aligned} & \int_S \frac{\partial G_k(x,y)}{\partial n_y} \phi(y) dS_y - \int_S G_k(x,y)q(y) dS_y \\ &+ \beta \left[\int_S \frac{\partial G_k^2(x,y)}{\partial n_y \partial n_x} \phi(y) dS_y \right. \\ & \left. - \int_S \frac{\partial G_k(x,y)}{\partial n_x} q(y) dS_y \right] \\ &= -\frac{1}{2}\phi(x) - \frac{\beta}{2}q(x) + \phi_{in} + \beta \frac{\partial \phi_{in}}{\partial n_x}, \quad x \in S, \end{aligned} \quad (5)$$

其中 β 为非零耦合常数,通常虚部非零,一般可取为 $\beta = i/k$.Burton和Miller证明了(5)式在全频率范围内具有唯一解.然而,(5)式存在一个问题,即Helmholtz积分方程的法向导数方程包含了一个超奇异边界积分算子

$$\int_S \frac{\partial G_k^2(x,y)}{\partial n_y \partial n_x} \phi(y) dS_y$$

具有 $1/r^3$ 的奇异性,数值处理超奇异边界积分算子非常困难,需要花费高昂的计算机资源.目前,如何有效处理超奇异边界积分算子仍然是众多学者研究的一个热点方向,很多特别的规划技术用于降低超奇异边界积分算子的奇异性,包括Hadamard有限项积分、高阶Galerkin方法、奇异性减少技术等方法.本文利用作者最近提

出的新奇异减少技术改进 Burton-Miller 公式^[18], 新的公式仅仅包含弱奇异边界积分算子, 避免了计算超奇异和强奇异边界积分算子的困难, 数值处理变得更加有效和直接.

应用每个单元节点的边界条件, 将 (5) 式形成的系数矩阵做列变换, 即得到传统边界元法的标准线性方程组

$$\mathbf{A}x = b, \quad (6)$$

其中 \mathbf{A} 为系统方阵, x 为未知向量, b 为已知向量. 通常边界元法形成的系数矩阵 \mathbf{A} 是一个非对称满阵, 因此构造系数矩阵 \mathbf{A} 需要的计算量和存储量都为 $O(N^2)$ 量级, 这便是传统边界元法无法求解大规模声学问题的原因. 然而, 将快速多极方法引入到边界元法中, 可以将算法的计算量和存储量量级从 $O(N^2)$ 减少到 $O(N)$, 有效克服传统边界元无法求解大规模声学问题的技术瓶颈. 下面基于平面波扩展方法的对角形式, 具体推导快速多极方法运用于 Helmholtz 方程的基本原理.

3 快速多极边界元法

3.1 对角形式快速多极方法

快速多极方法主要包含两个扩展及三个转移关系, 分别是基本解的多极扩展、多极扩展系数转移 (M2M)、多极扩展系数向局部扩展系数转移 (M2L)、局部扩展系数转移 (L2L).

根据平面波扩展理论^[12,20], 自由空间 Green 函数的基本解 $G_k(x, y)$ 可以表示为单位球上的积分形式

$$G_k(x, y) = \frac{ik}{16\pi^2} \oint e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{y}_c\mathbf{y}} T(\mathbf{k}, \mathbf{y}_c\mathbf{x}) d(\hat{\mathbf{k}}), \quad \mathbf{y}_c\mathbf{x} > \mathbf{y}_c\mathbf{y}, \quad (7)$$

其中 $\hat{\mathbf{k}} = \mathbf{k}/|\mathbf{k}|$, \mathbf{k} 表示波数向量, $|\mathbf{k}| = k$. $\oint d(\hat{\mathbf{k}})$ 表示单位球上的积分, 对角转移算子 $T(\mathbf{k}, \mathbf{y}_c\mathbf{x})$ 定义为

$$T(\mathbf{k}, \mathbf{y}_c\mathbf{x}) = \sum_{n=0}^p i^n (2n+1) h_n^{(1)}(k|\mathbf{y}_c\mathbf{x}|) P_n(\hat{\mathbf{k}} \cdot \widehat{\mathbf{y}_c\mathbf{x}}), \quad (8)$$

其中 $h_n^{(1)}(k|\mathbf{y}_c\mathbf{x}|)$ 为第一类 Hankel 函数, P_n 为相关的 Legendre 多项式, $\widehat{\mathbf{y}_c\mathbf{x}} = \mathbf{y}_c\mathbf{x}/|\mathbf{y}_c\mathbf{x}|$, p 为截断项数.

(5) 式对于远离源点 x 的边界子集 S_y 上的边界积分, 如图 1, 满足条件 $|\mathbf{y}_c\mathbf{x}| > |\mathbf{y}_c\mathbf{y}|$, 可在 y_c 点

多极扩展为

$$\begin{aligned} & \int_S \frac{\partial G_k(x, y)}{\partial n_y} \phi(y) dS_y - \int_S G_k(x, y) q(y) dS_y \\ & + \beta \left[\int_S \frac{\partial G_k^2(x, y)}{\partial n_y \partial n_x} \phi(y) dS_y - \int_S \frac{\partial G_k(x, y)}{\partial n_x} q(y) dS_y \right] \\ & = \frac{ik}{16\pi^2} \left[\oint T(\mathbf{k}, \mathbf{y}_c\mathbf{x}) M(\mathbf{k}, y_c) d(\hat{\mathbf{k}}) + \beta \oint \frac{\partial T(\mathbf{k}, \mathbf{y}_c\mathbf{x})}{\partial n_x} M(\mathbf{k}, y_c) d(\hat{\mathbf{k}}) \right], \quad (9) \end{aligned}$$

其中 $M(\mathbf{k}, y_c)$ 表示中心在 y_c 的多极扩展系数, 定义如下

$$M(\mathbf{k}, y_c) = \int_{S_y} \frac{\partial e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{y}_c\mathbf{y}}}{\partial n_y} \phi(y) - e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{y}_c\mathbf{y}} q(y) dS_y. \quad (10)$$

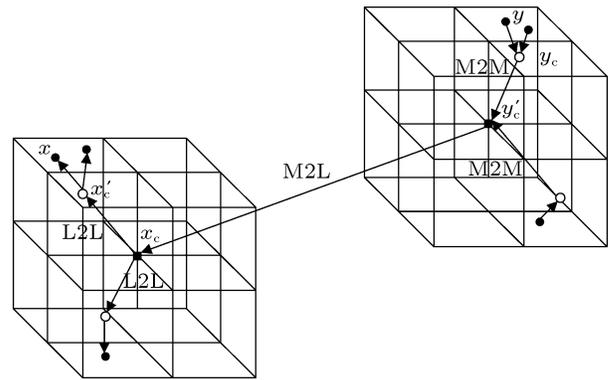


图 1 快速多极方法的 M2M, M2L 和 L2L 转移关系

如图 1 所示, 当多极扩展中心由子正方体中心 y_c 转移到父正方体中心 y_c' 时, 使用多极扩展系数转移 (M2M)

$$M(\mathbf{k}, y_c') = e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{y}_c'\mathbf{y}_c} M(\mathbf{k}, y_c), \quad (11)$$

其中 $M(\mathbf{k}, y_c')$ 表示中心在 y_c' 的多极扩展系数.

在局部扩展中, 当满足条件 $|\mathbf{x}_c\mathbf{y}| > |\mathbf{x}_c\mathbf{x}|$ 及 $|\mathbf{y}_c'\mathbf{x}| > |\mathbf{y}_c'\mathbf{y}|$, 如图 1, (5) 式可在配置点 x 周围的结点中心 x_c 局部扩展为

$$\begin{aligned} & \int_S \frac{\partial G_k(x, y)}{\partial n_y} \phi(y) dS_y - \int_S G_k(x, y) q(y) dS_y \\ & + \beta \left[\int_S \frac{\partial G_k^2(x, y)}{\partial n_y \partial n_x} \phi(y) dS_y - \int_S \frac{\partial G_k(x, y)}{\partial n_x} q(y) dS_y \right] \\ & = \frac{ik}{16\pi^2} \left[\sum \omega_\varsigma e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}_c\mathbf{x}_i} L(\mathbf{k}, x_c) \right] \end{aligned}$$

$$+ \beta \sum_{\varsigma} \omega_{\varsigma} \left[\frac{\partial e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_c \mathbf{x}_i}}{\partial n_x} L(\mathbf{k}, x_c) \right], \quad (12)$$

其中 ς 上的总和通过全波数向量 \mathbf{k} 计算得到, ω_{ς} 表示在单位球上的 Gauss 积分权系数, $L(\mathbf{k}, x_c)$ 表示中心在 x_c 的局部扩展系数, 通过对角转移算子 $T(\mathbf{k}, \mathbf{y}_c \mathbf{x}_c)$ 得到

$$L(\mathbf{k}, x_c) = T(\mathbf{k}, \mathbf{y}_c \mathbf{x}_c) M(\mathbf{k}, y_c), \quad (13)$$

(13) 式即表示多极扩展系数向局部扩展系数转移 (M2L).

如图 1, 当局部扩展中心由父正方体中心 x_c 转移到子正方体中心 $x_{c'}$ 时, 使用局部扩展系数转移 (L2L)

$$L(\mathbf{k}, x_{c'}) = e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_c \mathbf{x}_{c'}} L(\mathbf{k}, x_c), \quad (14)$$

其中 $L(\mathbf{k}, x_{c'})$ 表示中心在 $x_{c'}$ 的局部扩展系数, 满足条件 $|\mathbf{x}_{c'} \mathbf{y}| > |\mathbf{x}_{c'} \mathbf{x}|$.

最后, (5) 式的总积分计算分为两部分: 远离源点 x 的场点贡献从 (12) 式的局部扩展系数得到; 邻近源点 x 的场点贡献直接利用 (5) 式按传统边界元法计算得到.

在实际计算中, (8) 式中的无穷级数必须采用合适的项数 p 截断. 通常 p 值根据现有的经验公式^[9] 确定,

$$p = kD_l + c_0 \log(kD_l + \pi), \quad (15)$$

其中 D_l 表示包含第 l 层结点的直径, c_0 是一个和算法精度相关的常数, k 为计算波数. (15) 式可在快速多极方法中用于自适应确定树结构不同层中的多极和局部扩展截断项数 p , 有效克服对角形式的低频不稳定缺点.

在平面波扩展中, M2M 和 L2L 转移由单位球表示的平面波得到. 对于树结构每个细化的层, 随着 M2M 转移波的样本数增加, 而随着 L2L 转移波的样本数减少. 因此, 多极和局部扩展的插值 (interpolation) 及滤波 (filtering) 可以通过球表面得到. 本文使用文献 [21] 提出的球截断法作为插值和滤波方法.

3.2 快速多极边界元方法的计算程序

文献 [9] 和 [11] 详细地说明了快速多极边界元法的算法程序, 这里简要介绍其基本计算流程如下.

第一步: 使用传统边界元法将计算模型的边界离散成单元.

第二步: 建立分层树结构. 用一个立方体包含模型的所有边界单元, 表示树结构的根结点; 将大立方体分解成八个相同的子立方体, 每个子立方体又进一步递归分解成八个相同的更小的子立方体, 直到子立方体所包含的边界单元的数量小于一个预先设定的值就停止分解. 这样就建立了包含所有边界单元的分层树结构, 用来存储多极扩展系数和局部扩展系数.

第三步: 上行遍历计算多极扩展系数. 该步骤用来计算树结构每个叶子结点包含的边界单元形成的多极扩展系数, 从树结构的叶子结点开始, 一层一层地向上递归计算, 直到根结点.

第四步: 下行遍历计算局部扩展系数. 该步骤通过多极扩展系数计算局部扩展系数, 从树结构的根结点开始, 一层一层地向下递归计算, 直到叶子结点.

第五步: 利用树结构计算总积分.

第六步: 迭代求解. 迭代过程重复进行, 直到未知的解收敛于设定的合理精度, 求解过程结束.

3.3 迭代求解方法及预处理技术

在很多实际计算问题中, 边界元法形成的线性系统方程组的性态不好, 导致迭代求解器收敛缓慢, 有时甚至不能收敛, 计算效率很低. 因此需要预处理技术改善线性系统方程组的性态, 即降低系数矩阵 \mathbf{A} 的条件数, 加速收敛, 提高求解效率. 本文发展的快速多极边界元法采用 GMRES 求解器^[5], 并结合稀疏近似求逆预处理技术^[22] 迭代求解线性方程系统. 使用这种预处理技术有个优点, 即预处理后的 GMRES 求解器可以把使用后的系数存储起来, 并可以直接在计算近场贡献时重复使用, 因此不必在每个求解迭代步时重复计算这些系数, 可以进一步加快算法的迭代速度和提高收敛效率.

4 数值分析

本文使用 Fortran 90 编写数值算例的计算程序, 所有计算在配置为 Intel (R) Core (TM) 2 Duo CPU 2.2 GHz 和 RAM 2 GB 的个人计算机上进行. 在所有算例中, 使用常单元离散模型的边界. 叶子最多包含的边界单元数目设为 50, 截断项数 p 由 (15) 式自适应确定, GMRES 迭代求解器的收敛残差设为 10^3 . 4.1 和 4.2 小节算例的声学介质为空气, 其中空气密度为 1.29 kg/m^3 , 空气中声波波速为 344

m/s. 4.3 小节算例的声学介质为海水, 其中海水的密度为 1030 kg/m^3 , 海水中声波波速为 1530 m/s .

4.1 准确性验证

首先利用具有解析解的刚性球声散射算例 [23] 验证快速多极边界元法计算声学问题的准确性. 设球半径为 $a = 1 \text{ m}$, 球心位于坐标原点, 球面为刚性 (法向速度 $\partial\phi/\partial n = 0$), 即 Neumann 边界条件给定. 单位幅值的平面入射波沿 x 轴正向入射, 碰撞到刚性球表面将产生声散射现象. 将球面离散为单元, 自由度数为 4224. 图 2 表示使用快速多极边界元法、传统边界元法 (迭代求解 Burton-Miller 公式) 和解析计算三种方法, 分别计算样本点 $(0,0,2)$ 处的声压绝对值 $|\phi|$, 且波数 k 在 0—10 之间步进, 共平分 100 个频率计算点. 从图 2 可以清楚地看出, 两种边界元法在计算频域范围内与解析解符合良好, 这就证明了 Burton-Miller 公式有效克服传统边界元法求解外部声学问题时的非唯一解难题. 此外,

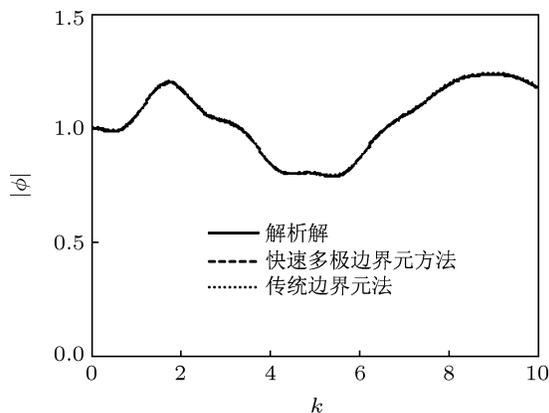


图 2 计算样本点的声压

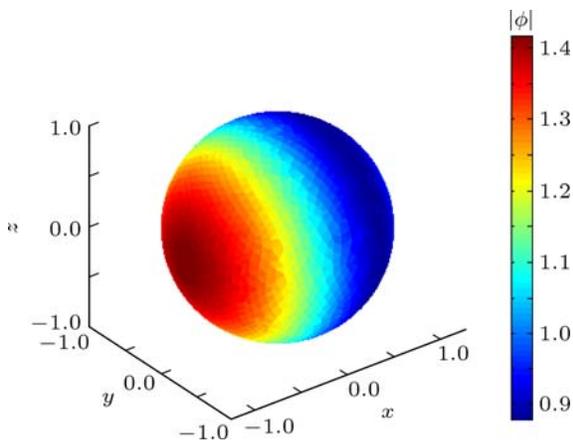


图 3 使用快速多极边界元法计算刚性球表面声压分布 ($k = 1$)

从图 2 还可以看出, 快速多极边界元法的计算结果与传统边界元法十分接近, 表明快速多极方法引入的截断误差在整个宽频范围内都非常小. 图 3 和图 4 分别表示使用快速多极边界元法和传统边界元法计算刚性球表面的声场分布情况, 计算波数为 $k = 1$. 从这两个图可以看出, 两种边界元法的计算结果符合良好. 这个数值算例有效证明了本文发展的快速多极边界元法在宽频范围内求解声学问题的可靠性和准确性.

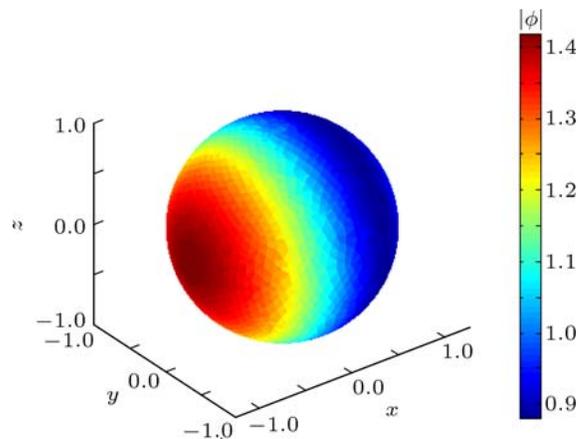


图 4 使用传统边界元法计算刚性球表面声压分布 ($k = 1$)

4.2 计算效率分析

继续以 4.1 小节中的散射球为例, 分析快速多极边界元法的计算效率随自由度变化的关系. 分别将刚性球表面离散为 $N = 712—17346$ 个自由度, 计算波数为 $k = 1$, 其他参数条件不变. 计算样本点设在点 $(0, 0, 2)$, 分别使用快速多极边界元法及传统边界元法进行计算, 并比较两种方法的计算效率. 图 5 和图 6 表示分别使用两种方法求解各不同自由度数的模型, 所需的计算时间和存储量随自由度变化的关系.

从图 5 可以看出, 当自由度达到 1000 左右, 快速多极边界元法的计算速度明显快于传统边界元法; 随着自由度不断增大, 快速多极边界元法的计算优势充分体现出来, 其计算速度远远高于传统边界元法. 这清楚表明, 对于声学问题, 在较小规模的自由度时, 快速多极边界元法就具备比传统边界元法更高的计算效率. 当自由度规模达到 17346, 由于受计算机的存储量限制, 传统边界元法变得非常低效, 甚至无法运行, 而快速多极边界元法完成计算所需的时间仅为 53 s. 可见, 快速多极边界元法的计算速度比传统边界元法有数量级的提

高. 从图 5 中的曲线趋势上看, 快速多极边界元法的计算时间与自由度成线性关系, 是 $O(N)$ 量级, 而传统边界元法的计算时间与自由度的关系是 $O(N^2)$ 量级.

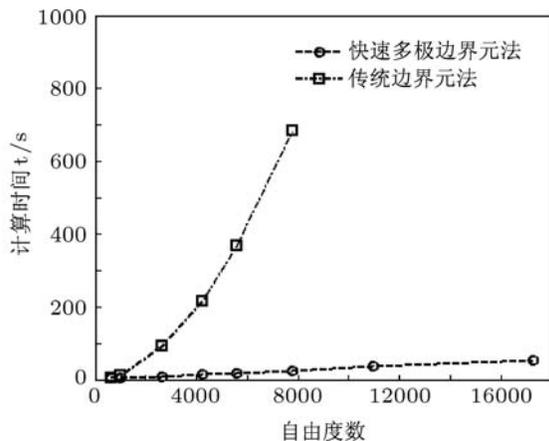


图 5 快速多极边界元法与传统边界元法的计算时间比较

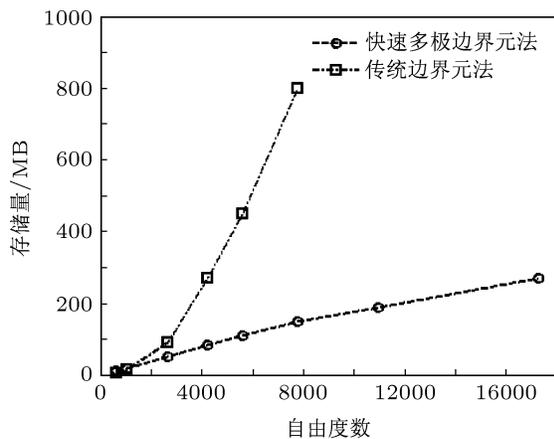


图 6 快速多极边界元方法与传统边界元法的存储量比较

从图 6 可以看出, 当自由度数达到 1000 以后, 随着自由度的增大, 快速多极边界元法的存储量远远低于传统边界元法. 这表明, 快速多极边界元法比传统边界元法具备更高的存储效率. 当计算规模超过 10000 个自由度时, 传统边界元法所需的存储量接近个人计算机的物理内存极限, 几乎很难完成求解, 而快速多极边界元法求解 17346 个自由度的模型时, 轻易便完成计算, 所需的存储量仅为 270 MB. 从图 6 中曲线趋势上看, 快速多极边界元法及传统边界元法的存储量与自由度的关系分别为 $O(N)$ 及 $O(N^2)$ 量级. 这个数值算例有效证明了快速多极边界元法的 $O(N)$ 量级计算效率比传统边界元法有数量级的提高. 同时表明, 快速多极边界元法具有求解大规模声学问题的潜在优势.

4.3 大规模声学问题应用

实际工程中广泛存在大规模的声学计算问题, 如飞机、潜艇、高速公路等模型的噪声预报, 需要将这些模型离散成几十万甚至上百万个自由度, 传统边界元法无力解决这些问题. 这里通过一个包含几十万个自由度的实际算例, 进一步揭示本文提出的快速多极边界元法求解大规模声学问题的优越性能及工程应用潜力.

使用快速多极边界元法预测潜艇噪声辐射问题是一个非常具有意义的工程实例. 总长度为 80 m 的潜艇在巡航, 由于推进器振动向外辐射噪声, 假设推进器振速为 1 m/s, 振动频率为 200 Hz, 潜艇外壁为刚性. 总共使用 427222 个自由度离散潜艇表面, GMRES 迭代求解器的收敛残差为 10^{-3} . 图 7 表示潜艇表面的计算声压级 SPL(dB) 分布情况. 完成整个计算仅用时 5234 s, 表现出快速多极边界元法的高效计算性能. 对于其他的域基方法, 如有限元法、有限差分法等, 求解这种大规模无限域声学问题是非常具有挑战性的. 这个数值算例表明了本文发展的快速多极边界元法能够有效求解潜艇等复杂结构的大规模声学问题, 具有潜在的工程应用价值.

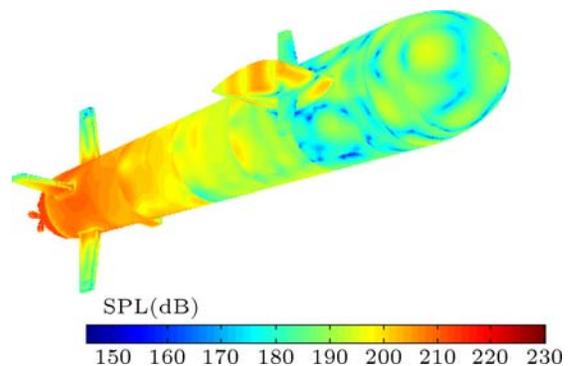


图 7 潜艇表面声压级 SPL(dB) 分布

5 结论

本文提出一种新的快速多极边界元法加速求解声学 Helmholtz 方程. 快速多极边界元法利用 Burton-Miller 公式, 不仅有效克服了传统边界元法求解外部声时遭遇的非惟一解问题, 而且还避免了计算超奇异及强奇异积分的困难, 数值处理变得更加直接、有效. 由于在快速多极边界元法中引入基本解的对角形式多极及局部扩展, 全面加速了矩阵与向量的乘积过程. 此

外,快速多极边界元法采用 GMRES 求解器和稀疏近似求逆预处理技术迭代求解线性方程系统,进一步加快了算法的求解效率.数值算例验证了快速多极边界元法的准确性和高效性,证明了本文发展的算法具有 $O(N)$ 量级的计算效率,比传统边界元法的计算效率有数量级的提高.

大型潜艇的辐射噪声预测算例进一步表明快速多极边界元法的优越性,可以有效分析大规模复杂工程声学问题,具有潜在的工程应用前景.接下来的研究工作包括对树结构的优化、阻抗边界条件的有效处理、高阶单元的运用等,将进一步提高快速多极边界元法的计算效率及工程实用性.

-
- [1] Ciskowski R D, Brebbia C A 1991 *Boundary Element Methods in Acoustics* (Southampton: Elsevier)
- [2] Mao Y J, Qi D T 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 6764 (in Chinese) [毛义军, 祁大同 2009 物理学报 **58** 6764]
- [3] Li X G, Dai B D, Wang L H 2010 *Chin. Phys. B* **19** 120202
- [4] Zhang H Y, Yu J B 2011 *Chin. Phys. B* **20** 094301
- [5] Saad Y, Schultz M H 1986 *SIAM J. Sci. Statist. Comput.* **7** 856
- [6] Rokhlin V 1985 *J. Comput. Phys.* **60** 187
- [7] Greengard L, Rokhlin V 1987 *J. Comput. Phys.* **73** 325
- [8] Yoshida K, Nishimura N, Kobayashi S 2001 *Eng. Anal. Bound. Elem.* **25** 239
- [9] Liu Y J 2006 *Int. J. Numer. Methods Eng.* **65** 863
- [10] Tong M S, Chew W C 2009 *J. Comput. Phys.* **228** 921
- [11] Nishimura N 2002 *Appl. Mech. Rev.* **55** 299
- [12] Rokhlin V 1993 *Appl. Comput. Harmon. Anal.* **1** 82
- [13] Epton M, Dembart B 1995 *SIAM J. Sci. Comput.* **16** 865
- [14] Sakuma T, Yasuda Y 2002 *Acust. Acta Acust.* **89** 28
- [15] Bapat M S, Shen L, Liu Y J 2009 *Eng. Anal. Bound. Elem.* **33** 1113
- [16] Kropinski M C, Quaife B D 2011 *J. Comput. Phys.* **230** 425
- [17] Li S D, Huang Q B 2011 *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.* **200** 1333
- [18] Li S D, Huang Q B 2010 *Eng. Anal. Bound. Elem.* **34** 89
- [19] Burton A J, Miller G F 1971 *Proc. R. Soc. London. A* **323** 201
- [20] Abramowitz M, Stegun I A 1964 *Handbook of Mathematical Function* (New York: Dover)
- [21] Jakob C R, Alpert B K 1997 *J. Comput. Phys.* **136** 580
- [22] Chen K, Harris P J 2001 *Appl. Numer. Math.* **36** 475
- [23] Chien C C, Rajiyah H, Atluri S N 1990 *J. Acoust. Soc. Am.* **88** 918

A new diagonal form fast multipole boundary element method for solving acoustic Helmholtz equation*

Li Shan-De¹⁾ Huang Qi-Bai^{1)†} Li Tian-Yun²⁾

1) (State Key Laboratory of Digital Manufacturing Equipment and Technology, Huazhong University of Science and Technology, Wuhan 430074, China)

2) (Department of Naval Architecture and Ocean Engineering, Huazhong University of Science and Technology, Wuhan 430074, China)

(Received 27 September 2011; revised manuscript received 4 November 2011)

Abstract

The conventional exterior acoustic Helmholtz boundary integral equation is prohibitively expensive for solving large-scale engineering problems. In order to effectively overcome this problem, the fast multipole method is introduced to the BIE, and accelerates the iterative solution for the system matrix equation. Due to using the diagonal form multipole expansions of the fundamental solution in the BIE, the computational efficiency of the new fast multipole boundary element method (FMBEM) is improved significantly compared to the conventional BEM. Both the computational complexity and memory requirement of the FMBEM are drastically reduced to $O(N)$, where N is the number of degrees of freedom (DOFs). Numerical examples including a large submarine model with more than 420000 DOFs demonstrate the accuracy and efficiency of the FMBEM, and clearly show the advantage of the new algorithm for solving the large-scale acoustic problems. The developed FMBEM would be potential for engineering applications.

Keywords: fast multipole method, boundary element method, diagonal form, Helmholtz equation

PACS: 43.20.+g, 02.70.Pt

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 51175195).

† E-mail: lishande@gmail.com; qbhuang@mail.hust.edu.cn