

耦合小世界神经网络的随机共振*

于海涛 王江[†] 刘晨 车艳秋 邓斌 魏熙乐

(天津大学电气与自动化工程学院, 天津 300072)

(2011 年 5 月 1 日收到; 2011 年 8 月 8 日收到修改稿)

噪声广泛存在于生物神经网络中, 对系统功能具有重要作用. 采用神经元二维映射模型构建一个复杂神经网络, 由多个小世界子网络构成, 研究了 Gaussian 白噪声诱导的随机共振现象. 研究发现, 只有合适的噪声强度才能使神经网络对输入刺激信号的频率响应达到峰值. 另外, 网络结构对系统随机共振特性有重要影响. 在固定的耦合强度下, 存在一个最优的局部小世界子网络结构, 使得整个系统的频率响应最佳.

关键词: 神经元二维映射模型, Gaussian 白噪声, 随机共振, 小世界网络

PACS: 87.19.Lc, 87.10.Mn

1 引言

近年来, 人们对噪声在非线性复杂动力学系统中的影响进行了广泛而深入的研究, 并取得了许多有意义的成果, 其中一个重要方面就是发现了噪声诱导的随机共振 (stochastic resonance, 简记为 SR) 现象^[1,2]. 随机共振概念最早是由 Benzi 等^[3]于 1981 年在研究周期循环的冰期气候问题时提出来的, 是指在弱噪声和外界输入信号的协同作用下, 非线性系统输出的信噪比在某一噪声强度下达到最大. 随机共振理论的提出, 使人们意识到噪声对非线性复杂动力学系统具有积极的调控作用^[4,5].

在生物神经网络中, 神经元在产生动作电位的过程中总是不可避免地要受到各种环境噪声的影响, 这些噪声主要来源于系统内部参数的涨落以及外部环境的变化, 例如细胞离子通道打开和关闭的随机性, 化学突触随机地释放神经递质以及来源于其他神经元的随机突触输入电流等^[6-8]. 研究表明噪声的涨落影响是不能忽略的, 它与神经系统的实际功能有着密切的联系, 其中噪声对生物神经系统的积极作用主要体现在随机共振现象的出现^[9-12]. 事实上, 神经元可借助噪声而达到放电阈值, 并在一定的噪声强度

作用下, 系统对外界输入信号的峰电位响应达到最佳, 即产生随机共振. 在很多神经系统, 如神经元的 Hodgkin-Huxley (HH) 模型^[13,14]、FitzHugu-Nagumo (FN) 模型^[15-17]、Integrate-Fire (IF) 模型^[18,19]和离散的 Rulkov 模型^[20], 以及单个小世界神经网络^[21-23]中都可以观察到随机共振现象. 然而对于由多个子网络构成的复杂神经系统, 其随机共振现象一直未得到深入的研究.

最近的研究表明, 生物神经网络普遍具有模块化特点, 也就是一个大规模的神经网络往往是由多个子网络 (模块) 构成的, 而这些子网络又具有小世界连接特性^[24,25]. 因此, 本文基于神经元二维映射模型^[26,27], 构建一个由多个小世界神经网络组成的复杂系统, 用 Gaussian 白噪声模拟神经网络中的环境噪声, 通过数字仿真研究噪声对网络动力学特性的影响, 以及噪声诱导的随机共振现象, 并进一步研究网络结构对系统随机共振特性的影响.

2 模型和方法

本文研究由 M 个子网络构成的复杂神经系统, 结构如图 1 所示, 每个子网络只与位置最近的两个子网络相连构成一个环形. 另外, 每个子网络都是包含 N 个神经元的 WS 型小世界网络^[28], 其构

* 国家自然科学基金 (批准号: 61072012) 和国家自然科学基金青年科学基金 (批准号: 50907044, 60901035) 资助的课题.

[†] E-mail: jiangwang@tju.edu.cn

造规则如下: 1) 从具有 N 个节点的环形规则网络开始, 其中每个节点都与它最相近的 K 个节点相连 (每侧各有 $K/2$ 个); 2) 以概率 p 随机地重新连接网络中的每条边, 即将边的一个端点保持不变, 另一个端点为网络中随机选择的一个新节点, 同时保证没有自连接和重复连接. 相邻子网络中神经元之间的连接概率为 P , 即两个子网络间共有 PN^2 条突触相连, 这样通过改变概率 P 就可以改变子网络之间连接突触的数目.

本文采用 Rulkov 提出的神经元二维映射模型 [26] 来描述该神经网络中的节点, 其动力学方程为

$$x_{I,i}(n+1) = \frac{\alpha}{1 + x_{I,i}^2(n)} + y_{I,i}(n) + I_{I,i}^{\text{ext}}(n) + I_{I,i}^{\text{syn}}(n) + \xi_{I,i}(n), \quad (1a)$$

$$y_{I,i}(n+1) = y_{I,i}(n) - \beta x_{I,i}(n) - \sigma, \quad (1b)$$

其中下标 (I, i) 表示第 I ($I = 1, 2, \dots, M$) 个子网络中的第 i ($i = 1, 2, 3, \dots, N$) 个神经元, x 为快动力学变量, 表示神经元的跨膜电压; y 为慢动力学变量, 表示神经元细胞膜上离子通道的门控离子 (通常是指 Ca^{2+}) 的浓度; α 决定神经元的放电幅值和放电模式 (峰放电或者簇放电); β 和 σ 描述外部对系统的输入或影响. $I_{I,i}^{\text{ext}}(n)$ 为外部刺激电流, 具体形式为 $I_{I,i}^{\text{ext}}(n) = A \sin(\omega n)$, A 和 ω 分别为正弦信号的幅值和角频率. $I_{I,i}^{\text{syn}}(n)$ 为耦合项, 描述了神经元的突触电流, 其具体形式为:

$$I_{I,i}^{\text{syn}}(n) = \varepsilon_{\text{in}} \sum_j A_I(i, j)(x_{I,j}(n) - x_{I,i}(n)) + \varepsilon_{\text{ex}} \sum_J \sum_j B_{I,J}(i, j)(x_{J,j}(n) - x_{I,i}(n)), \quad (2)$$

其中 ε_{in} 表示子网络内神经元之间的耦合强度, ε_{ex} 表示子网络间神经元之间的耦合强度, $A_I = (A_I(i, j))$ 为第 I 个子网络内神经元连接矩阵, 如果神经元 $i \in I$ 和神经元 $j \in I$ 之间有突触相连, 则 $A_I(i, j) = A_I(j, i) = 1$, 否则 $A_I(i, j) = A_I(j, i) = 0$. $B_{I,J} = (B_{I,J}(i, j))$ 为两个子网络 (I, J) 之间神经元的连接矩阵, 如果神经元 $i \in I$ 和神经元 $j \in J$ 之间有突触相连, 则 $B_{I,J}(i, j) = B_{J,I}(j, i) = 1$, 否则 $B_{I,J}(i, j) = B_{J,I}(j, i) = 0$. $\xi_{I,i}(n)$ 是均值为零、方差为 D 的 Gauss 白噪声, D 的大小表征了噪声强弱, 可以视为噪声强度.

根据参数 α, β 和 σ 取值的不同, 该映射模型可以模拟神经元的静息 (silence)、周期峰放电 (periodic spikes)、混沌簇放电 (chaotic bursts) 和混沌峰放电 (chaotic spikes) 等不同的动力学行为, 如图 2 所示. 本文中设定参数 $\alpha = 1.95, \beta = \sigma = 0.001, \varepsilon_{\text{in}} = \varepsilon_{\text{ex}} = 0.005, A = 0.008, \omega = 0.006, p = 0.1, P = 0.05, N = 100$, 当噪声强度 $D = 0$ 时所有神经元都处于静息状态.

为了定量刻画系统输出对刺激信号的响应, 参照文献 [20] 我们计算输出信号对输入信号频率的线性响应, 其定义为

$$Q_{\sin} = \frac{1}{NT} \sum_{n=1}^{NT} 2x_n \sin(\omega n), \quad (3a)$$

$$Q_{\cos} = \frac{1}{NT} \sum_{n=1}^{NT} 2x_n \cos(\omega n), \quad (3b)$$

$$Q = \sqrt{Q_{\sin}^2 + Q_{\cos}^2}, \quad (3c)$$

其中 NT 为神经元的动力学演化迭代的总步数. 在后面的计算中, 我们取 $NT = 100000$, 对每个相同的参数条件计算 10 次动力学演化, 取其平均 Q 值为最终结果.

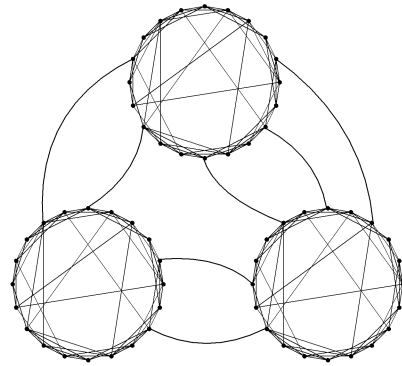


图1 网络结构示意图 $M = 3, N = 20, K = 6$

3 结果

我们首先对由 $M = 2$ 个小世界子网络构成的神经网络进行分析. 图 3 给出了不同噪声强度 D 下, 网路中所有神经元的放电时间分布. 可见, 噪声的存在会影响神经元的动力学行为, 使原来处于静息状态的神经元超过放电阈值而产生动作电位, 并且噪声强度越大, 放电频率越高. 从动作电位的分布角度看, 当噪声强度很小时, 不足以触发神经元产生动作电位, 神经元的膜电压只是在平衡点附

近出现小幅的随机振荡(图3中未给出);随着噪声强度的增加,如 $D = 0.005$ 时,神经元会产生少数动作电位,但基本上是随机分布的;噪声强度进一步增加,如 $D = 0.01$ 和 $D = 0.015$ 时,动作电位

数目不断增多,且时间分布变得基本均匀,类似周期放电状态;但是当噪声强度超过某一个阈值后,如 $D = 0.05$ 时,动作电位的时间规整性就会逐渐变差,趋于不规则分布。

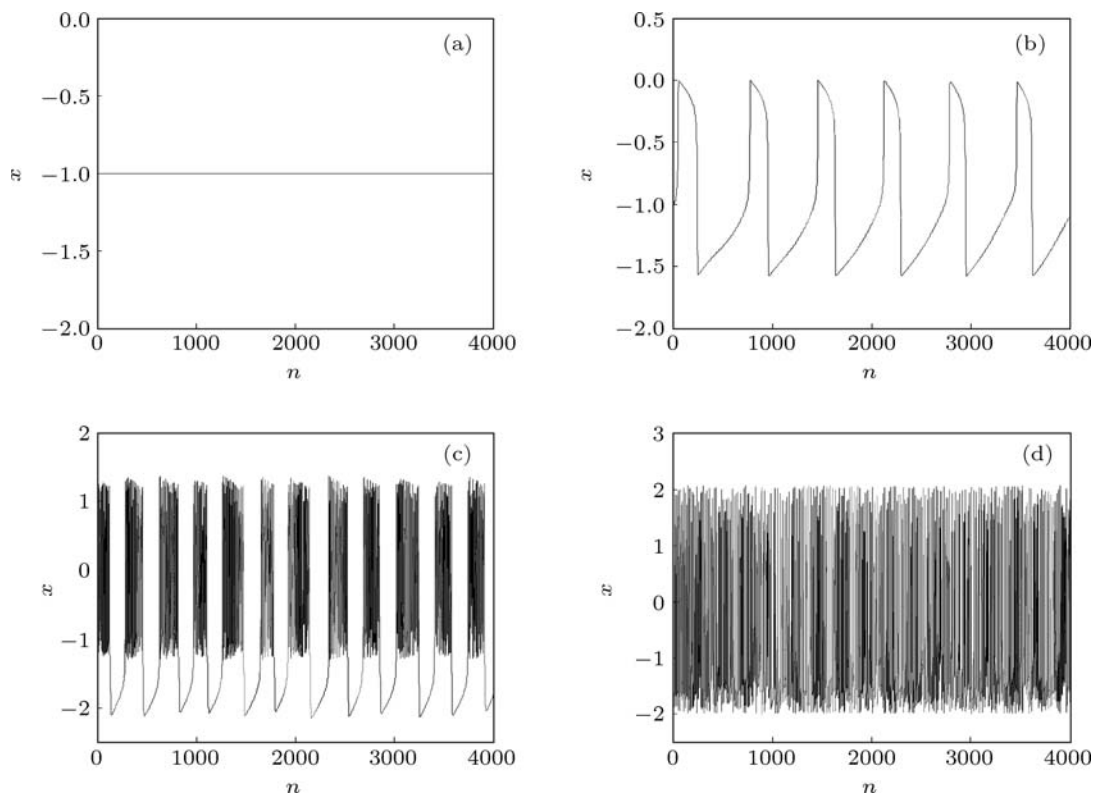


图2 映射神经元不同的动力学行为 ($\beta = \sigma = 0.001$) (a) 静息, $\alpha = 1.95$; (b) 周期峰放电, $\alpha = 2$; (c) 混沌簇放电, $\alpha = 4.2$; (d) 混沌峰放电, $\alpha = 5$

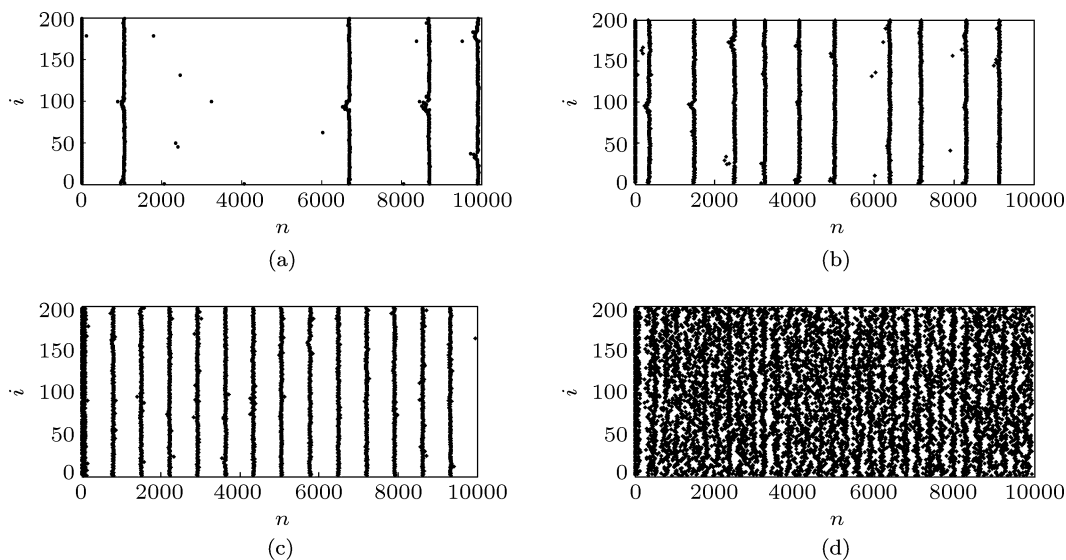


图3 不同噪声强度下,网络中所有神经元的放电时间分布 (a) $D = 0.005$; (b) $D = 0.01$; (c) $D = 0.015$; (d) $D = 0.05$. $M = 2$, $N = 100$, 其中标号 $i = 1-100$ 神经元属于子网络1, 标号 $i = 101-200$ 神经元属于子网络2

图 4 给出了耦合强度 ε_{in} 和 ε_{ex} 取不同值时, 系统的频率响应 Q 随噪声强度 D 的变化曲线. 明显可见, 对于固定的 ε_{in} 和 ε_{ex} , 随着 D 的增大, Q 值先增大后减小, 即存在某一适中的噪声强度使得 Q 达到最大值——系统对外界输入信号的频率响应最佳, 出现随机共振现象. 另外, 随着耦合强度 ε_{in} 和 ε_{ex} 的增大, Q 的峰值也是先增大后减小, 存在最优的耦合强度使得系统的随机共振性能最强, 同时系统发生随机共振所需要的噪声强度逐渐增大. 可见耦合强度在弱信号检测和传递过程中起着重要作用. 只有在合适的耦合强度范围内, 神经网络才能有效地检测弱信号, 过大的耦合强度会破坏系统检测弱信号的能力. 这与单个子网络中的随机共振特性类似 [21].

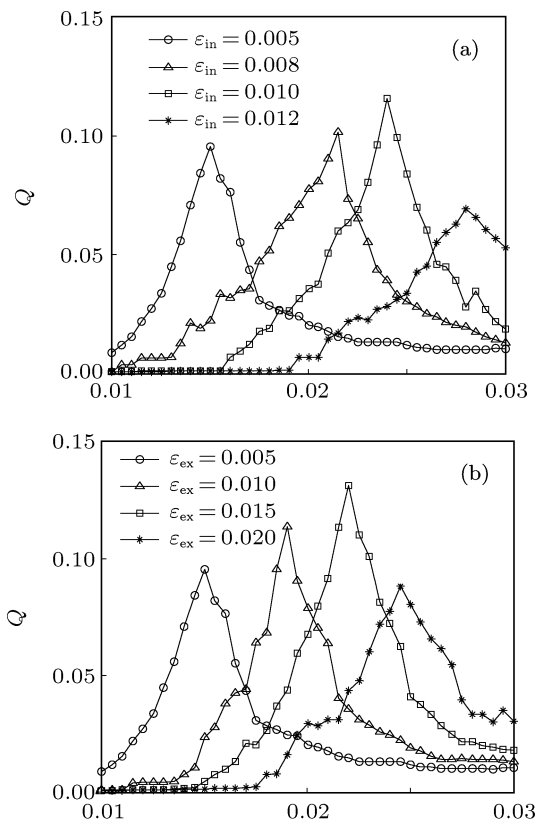


图 4 不同耦合强度 (a) ε_{in} 和 (b) ε_{ex} 下, 系统频率响应 Q 随噪声强度 D 的变化曲线

图 5 给出了子网络间连接概率分别为 $P = 0.005, 0.01, 0.05, 0.1$ 和 0.2 情况下, 系统的频率响应 Q 随噪声强度 D 的变化曲线. 同样, 随着连接概率 P 的增大, Q 的峰值先增大后减小, 即存在最优的 P 值使得系统的随机共振性能最佳, 且对应的噪声强度逐渐增大. 这说明子网络之间存在最优的连通性, 使得系统检测微弱信号的能力最强, 这

与增大神经元之间的耦合强度 (图 4) 效果类似

现在研究局部子网络结构对整个神经系统随机共振特性的影响. 图 6 给出了耦合强度分别为 $\varepsilon_{in} = 0.005, 0.008, 0.01$ 的情况下, 整个系统的频率响应 Q 随小世界网络中重连概率 p 的变化曲线. 从图 6 可以看出, 对于小世界神经网络, 并不是重连概率 p 越大, 系统的频率响应越好, 而是存在一个最优的 p 值, 使得 Q 达到峰值. 另外, 随着内部耦合强度 ε_{in} 的增大, 只需要较小的 p 就可以使 Q 达到峰值, 但是峰值减小, 这说明存在一个最优的局部小世界网络结构, 使得整个神经系统对微弱信号的检测和传递能力达到最强.

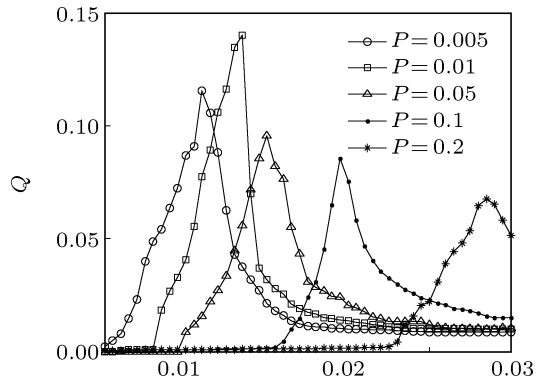


图 5 不同的连接概率 P 下, 系统的频率响应 Q 随噪声强度 D 的变化曲线

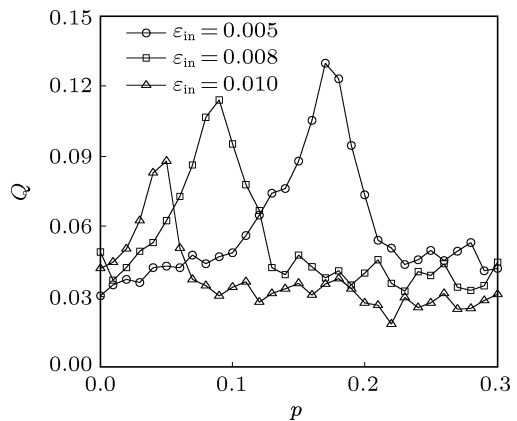


图 6 不同耦合强度 ε_{in} 下, 系统的频率响应 Q 随小世界网络重连概率 p 的变化曲线

下面进一步研究子网络对系统随机共振特性的影响. 图 7(a) 给出了系统的最高频率响应 Q_{max} 随子网络数目 M 的变化曲线, 这里每个子网络大小固定为 $N = 100$. 随着子网络数目的增大, 系统的最高频率响应先增大后减小, 存在一个最优的 M 值, 使得 Q_{max} 达到峰值. 另外, 子网络中神经元数目 N 同样影响系统的随机共振特性, 当 $M = 2$ 时

存在一个最优值 $N = 80$, 使得系统对输入信号的频率响应最佳, 如图 7(b) 所示. 这与文献 [29] 中研究系统尺度共振得到的结论类似, 即在含有噪声和弱信号的耦合非线性系统中, 存在最佳的耦合单元数目, 使得系统的输出响应最优. 在这里每个子网络都可以看作是网络系统中的一个节点.

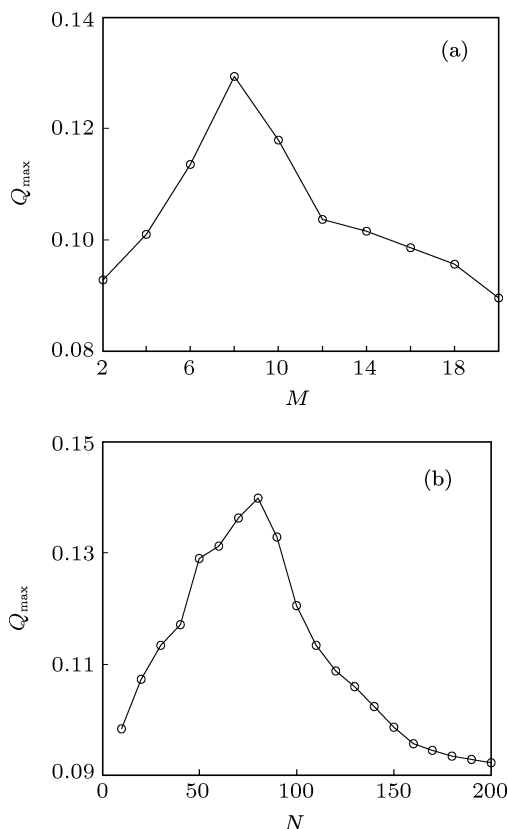


图 7 系统的最高频率响应 $Q_{\max}$ 随 (a) 子网络数目 M 和 (b) 子网络中神经元数目 N 的变化曲线

最后, 图 8 给出了噪声强度分别为 $D = 0.02, 0.03, 0.1$ 的情况下, 系统的频率响应 Q 随输入信号频率 ω 的变化曲线. 可见, 当噪声强度适当 ($D = 0.02$ 和 0.03) 时, 系统对输入信号的频率响应显著增强, Q 的峰值出现在噪声刺激下神经元的固有频率 ω_0 , 以及其谐波 $\omega = k\omega_0$ ($k = 2, 3$) 处, 且频率越大, Q 的峰值越低. 这表明合适的噪声有利于神经元感受和传递信息, 使神经元保持对输入刺激信号频率的敏感性, 从而帮助神经系统检测微弱刺激信号; 而过强噪声 ($D = 0.1$) 会使得神经元对输入信号的频率响应变弱, 导致刺激信号被淹没在噪声中, 从而几乎看不出任何信息. 周小荣等 [22] 在单个小世界神经网络中也发现了类似的二次超谐波随机共振现象.

下面对产生该现象的物理机理给出简要的分

析. 网络中神经元初始处于静息状态, 适中强度的噪声 (如 $D = 0.02$ 和 0.03) 本身不足以诱导出神经元的动作电位, 但是如果此时再加上弱周期信号, 则在信号和噪声的协同作用下, 就会诱导出神经元的大幅动作电位. 但是如果噪声强度过大, 如 $D = 0.1$, 则噪声本身就可以诱导神经元产生随机的大幅动作电位, 此时加入的周期信号将会完全被淹没在噪声中, 几乎看不出任何谐波信息. 因此神经网络只有在强度适中的噪声环境中, 对输入的弱周期信号有随机共振的现象; 而在较强的噪声环境下, 不会有随机共振现象发生. 另外, 当输入的周期信号频率为神经元固有频率或者其整数倍时, 刺激产生的动作电位与输入信号达到一种锁相 (同步) 状态, 从而谐波信息得到显著增强, 即出现随机共振现象; 而在其他频率信号刺激下, 神经元的动作电位与输入信号无法形成锁相, 系统的频率响应较弱, 也就无法通过动作电位序列准确传递信息. 由此可见, 系统对外部输入信号具有频率选择性, 且这种选择性与系统所处的噪声环境密切相关.

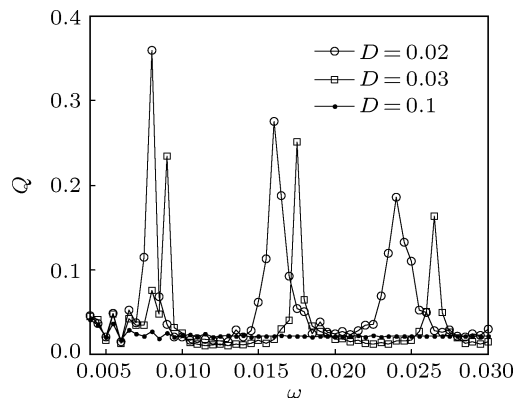


图 8 不同的噪声强度 D 下, 系统的频率响应 Q 随输入信号频率 ω 的变化曲线

4 结论

以神经元二维映射模型为基础, 构建了一个由多个子网络组成的复杂神经系统, 其中每个子网络具有小世界连接特性. 通过数值模拟研究了噪声对系统动力学特性的影响, 以及噪声诱导的随机共振现象, 发现只有在合适的噪声强度下, 神经网络对输入信号的频率响应才能达到峰值, 即产生随机共振现象. 另外, 还研究了网络结构对系统随机共振特性的影响. 结果表明, 神经元之间的耦合强度、子网络之间的连接概率、子网络数目以及大小均存在最优值, 使得系统对输入信号的频率响应

最佳, 即对弱信号的检测和传递能力最强. 另外, 在固定的耦合强度下, 存在一个最佳的局部小世界网络结构, 使得整个系统的随机共振特性最优.

大脑的主要功能就是接收和处理神经信息, 并且做出响应. 而噪声作为很多生物系统的重要组成部分, 它的影响是不可避免的. 本文从复杂的神经网络出发, 研究噪声诱导的随机共振现象, 揭示了噪声对于可兴奋神经系统的信息传送和探测具有

重要的促进作用, 这就为我们理解神经系统中弱信息的传递规律提供了依据. 微弱信息 (如光和声音) 从感觉器官传递到大脑的过程中时刻受到噪声的作用, 只有合适强度的噪声才能使这些信息准确地传送至大脑, 并得到处理, 否则将难以分辨和探测^[30]. 本文结果进一步丰富了生物神经网络中的随机共振理论, 特别是网络结构和参数对系统功能的重要影响, 将有助于理论和实验研究.

-
- [1] Gammaitoni L, Hänggi P, Jung P, Marchesoni F 1998 *Rev. Mod. Phys.* **70** 233
 - [2] Wang B H, Lu Q S, Lü S J 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 7458 (in Chinese) [王宝华, 陆启韶, 吕淑娟 2009 物理学报 **58** 7458]
 - [3] Benzi R, Sutera A, Vulpiani A 1981 *J. Phys. A* **14** 453
 - [4] Zhang X Y, Xu W, Zhou B C 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 060514 (in Chinese) [张晓燕, 徐伟, 周丙常 2011 物理学报 **60** 060514]
 - [5] Schwarzkopf D S, Silvanto J, Rees G 2011 *J. Neurosci.* **31** 3143
 - [6] White J A, Rubinstein J T, Kay A R 2000 *Trends Neurosci.* **23** 131
 - [7] Song Y, Zhao T J, Liu J W, Wang X Q, Zhan Y 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 4020 (in Chinese) [宋扬, 赵同军, 刘金伟, 王向群, 展永 2006 物理学报 **55** 4020]
 - [8] Wang M S, Huang W X, Cui Z F 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 4485 (in Chinese) [汪茂胜, 黄万霞, 崔执凤 2010 物理学报 **59** 4485]
 - [9] Kosko B, Mitaim S 2003 *Neural Networks* **16** 755
 - [10] Levin J E, Miller J P 1996 *Nature* **380** 165
 - [11] Kanamaru T, Okabe Y 2000 *Phys. Rev. E* **62** 2629
 - [12] Mato G 1998 *Phys. Rev. E* **58** 876
 - [13] Lee S G, Kim S 1999 *Phys. Rev. E* **60** 826
 - [14] Hasefawa H 2002 *Phys. Rev. E* **66** 021902
 - [15] Patel A, Kosko B 2005 *Neural Networks* **18** 467
 - [16] Stocks N G, Mannella R 2001 *Phys. Rev. E* **64** 30902
 - [17] Zhang G J, Xu J X 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 557 (in Chinese) [张广军, 徐建学 2005 物理学报 **54** 557]
 - [18] Shimokawa T, Pakdaman K, Sato S 1999 *Phys. Rev. E* **59** 3427
 - [19] Kang Y M, Xu J X, Xie Y 2005 *Chaos, Solitons and Fractals* **25** 165
 - [20] Wang M S 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 6833 (in Chinese) [汪茂胜 2009 物理学报 **58** 6833]
 - [21] Perc M 2007 *Phys. Rev. E* **76** 066203
 - [22] Zhou X R, Luo X S, Jiang P Q, Yuan W J 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 5679 (in Chinese) [周小荣, 罗晓曙, 蒋品群, 袁五届 2007 物理学报 **56** 5679]
 - [23] Ozer M, Perc M, Uzuntarla M 2009 *Phys. Lett. A* **373** 964
 - [24] Bullmore E, Sporns O 2009 *Nature* **10** 186
 - [25] Zamora-López G, Zhou C, Kurths J 2010 *Front Neuroinformatics* **4** 1
 - [26] Rulkov N F 2001 *Phys. Rev. Lett.* **86** 183
 - [27] Rulkov N F 2002 *Phys. Rev. E* **65** 041922
 - [28] Watts D J, Strogatz S H 1998 *Nature* **393** 440
 - [29] Pikovsky A, Zaikin A 2002 *Phys. Rev. Lett.* **88** 050601
 - [30] Barlow H B, Levick W R, Yoon M 1971 *Vision Res.* **11** 87

Stochastic resonance in coupled small-world neural networks*

Yu Hai-Tao Wang Jiang[†] Liu Chen Che Yan-Qiu Deng Bin Wei Xi-Le

(School of Electrical Engineering and Automation, Tianjin University, Tianjin 300072, China)

(Received 1 May 2010; revised manuscript received 8 August 2011)

Abstract

Noise exists widely in biological neural systems, and plays an important role in system functions. A complex neural network, which contains several small-world subnetworks, is constructed based on a two-dimensional neural map. The phenomenon of stochastic resonance induced by Gaussian white noise is studied. It is found that only with an appropriate noise, can the frequency response of the network to input signal reach a peak value. Moreover, network structure has an important influence on the stochastic resonance of the neural system. With a fixed coupling strength, there exists an optimal local small-world topology, which can offer the best frequency response of the network.

Keywords: two-dimensional neural map, Gaussian white noise, stochastic resonance, small-world network

PACS: 87.19.Lc, 87.10.Mn

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 61072012) and the Young Scientists Fund of the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 50907044, 60901035).

[†] E-mail: jiangwang@tju.edu.cn