

六组点堆中子动力学方程组的同伦分析解*

朱倩 商学利 陈文振†

(海军工程大学核能科学与工程系, 武汉 430033)

(2011年5月21日收到; 2011年8月16日收到修改稿)

鉴于目前六组点堆中子动力学方程仍然无法获得解析解, 本文尝试将同伦分析方法应用于六组缓发中子动力学方程组的求解, 获得了它的级数解析解, 并对级数解析解算法的有效性进行了检验. 结果表明, 该级数解析解算法从计算时间和精度上都能达到工程应用的要求, 可适用于反应堆中子动力学控制的设计分析和仿真计算.

关键词: 同伦分析法, 中子动力学, 点堆方程, 六组缓发中子

PACS: 02.60.Cb, 25.85.Ec, 28.20.-v

1 引言

点堆中子动力学方程组是一个刚性常微分方程组, 这主要是由于瞬发中子的寿命与缓发中子的寿命差别可达 4, 5 个数量级^[1,2]. 为了克服点堆中子动力学方程组的刚性问题, 国内外学者开展了许多研究, 提出了克服刚性的各种方法, 其中获得解析解是避开和解决刚性问题的最有效途径之一^[2-8]. 但就目前而言, 六组点堆中子动力学方程仍然无法获得解析解^[1,7]. 同伦分析方法是基于拓扑学中同伦的这一基本概念而提出的构造非线性系统解析近似解的一种新方法, 它超越传统的解析方法, 提供了采取不同的基函数表达一个非线性问题解的途径^[9-11], 在不同的领域已取得了很好的效果^[12,13]. 本文将同伦分析方法引入了点堆方程组的求解, 获得了六组中子动力学方程组的级数解析解, 通过相关算例验证表明, 该级数解析解从计算时间和精度上都能达到工程应用的要求.

2 同伦分析解

M 组缓发中子的点堆中子动力学方程组为

$$\frac{dn(t)}{dt} = \frac{\rho - \beta}{l} n(t) + \sum_{i=1}^M \lambda_i C_i(t) + q, \quad (1)$$

$$\frac{dC_i(t)}{dt} = \frac{\beta_i}{l} n(t) - \lambda_i C_i(t), \quad (i = 1, 2, \dots, M), \quad (2)$$

式中, $n(t)$ 为中子密度, 代表核反应堆功率水平; t 为时间; ρ 为反应性; β 为缓发中子总份额; β_i 为第 i 组缓发中子份额; λ_i 为第 i 组缓发中子先驱核衰变常数; l 为瞬发中子一代寿命; $C_i(t)$ 为第 i 组缓发中子先驱核平均浓度; q 为外加中子源源强; M 为缓发中子先驱核组数.

由点堆中子动力学方程组可以看出, 这是一个含有 $M + 1$ 个方程组成的微分方程组, 当 $M > 2$ 时, 很难用解析的方法求出方程的解, 一般只能用数值方法求解^[1].

对于解析解的研究, 常用的方法为代入法, 通过推导可以得到忽略外加中子源的六组缓发中子的动力学方程组的解析表达式^[1,5]

$$n(t) = A \exp(\omega t), \quad (3)$$

$$C_i(t) = A_i \exp(\omega t), \quad (4)$$

$$\rho = l\omega + \sum_{i=1}^6 \frac{\omega \beta_i}{\omega + \lambda_i}. \quad (5)$$

方程 (5) 是一个特征方程, 它表征参数 ω 与反应堆的特性参数 ρ, l, β_i 和 λ_i 之间的函数关系. 目前还无法求得 (5) 式的七个精确根, $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_7$, 只能求得近似根. 根据方程 (3) 与 (4) 中 $n(t), C_i(t)$ 的表示形式, 可以选择基函数为 $\{t^n \exp(-rt) | n \geq 0\}$, r 为实常数^[10].

应用同伦分析方法, 辅助线性算子 L, N 可构造如下^[11]:

* 国家自然科学基金 (批准号: 10575131) 和海军工程大学自然科学基金资助的课题.

† E-mail: cwz2@21cn.com

$$L[n(t, p)] = \frac{\partial n(t, p)}{\partial t} - \frac{\rho - \beta}{l} n(t, p), \quad (6)$$

$$N[C_i(t, p)] = \frac{\partial C_i(t, p)}{\partial t} + \lambda_i C_i(t, p), \quad (i = 1, 2, \dots, 6), \quad (7)$$

$$n(0, p) = n_0, \quad C_i(0, p) = C_{i_0}. \quad (8)$$

算子具有性质

$$L \left[C_1 \exp \left(\frac{\rho - \beta}{l} t \right) \right] = 0, \quad (9)$$

$$N[C_{2,i} \exp(-\lambda_i t)] = 0, \quad (i = 1, 2, \dots, 6), \quad (10)$$

其中, $C_1, C_{2,i} (i = 1, 2, \dots, 6)$ 为常系数.

构造零阶形变方程, 方程 (1) 和 (2) 可转变为 [11]

$$\begin{aligned} & (1-p)L[n(t; p, h_1, h_2) - n_0(t)] \\ &= ph_1 \left[\frac{\partial n(t; p, h_1, h_2)}{\partial t} - \frac{[\rho - \beta]}{l} n(t; p, h_1, h_2) \right. \\ & \quad \left. - \sum_{i=1}^M \lambda_i C_i(t; p, h_1, h_2) - q \right], \quad (11) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & (1-p)L[C_i(t, p) - C_{i_0}(t)] \\ &+ ph_2 \left[\frac{\partial C_i(t, p)}{\partial t} - \frac{\beta_i}{l} N(t, p) + \lambda_i C_i(t, p) \right] \\ &= 0, \quad (i = 1, 2, \dots, 6), \quad (12) \end{aligned}$$

其中, p 是嵌入参数, h_1, h_2 是非零的同伦参数. 同伦参数 h_1, h_2 影响最终解的收敛. 当嵌入参数 $p = 0$ 时, (11), (12) 式形变为线性微分方程

$$L[n(t; p, h_1, h_2) - n_0(t)] = 0, \quad (13)$$

$$N[C_i(t; p, h_1, h_2) - C_{i_0}(t)] = 0, \quad (i = 1, 2, \dots, 6), \quad (14)$$

(13), (14) 式都能够解析求解.

当嵌入参数 $p = 1$ 时, (11), (12) 式形变为待求微分方程 (1) 和 (2). 待求方程的解是

$$n(t) = n(t; 1, h_1, h_2), \quad (15)$$

$$C_i(t) = C_i(t; 1, h_1, h_2), \quad (i = 1, 2, \dots, 6), \quad (16)$$

$n(t; 1, h_1, h_2), C_i(t; 1, h_1, h_2)$ 可以通过泰勒展开由 $n(t; 0, h_1, h_2), C_i(t; 0, h_1, h_2)$ 表示.

将 $n(t; p, h_1, h_2), C_i(t; p, h_1, h_2)$ 在 $p = 0$ 点用泰勒级数展开, 即

$$n(t; p, h_1, h_2) = \sum_{m=0}^{+\infty} n_m(t; h_1, h_2) p^m, \quad (17)$$

$$C_i(t; p, h_1, h_2) = \sum_{m=0}^{+\infty} C_{i_m}(t; h_1, h_2) p^m, \quad (i = 1, 2, \dots, 6), \quad (18)$$

其中

$$n_m(t; h_1, h_2) = \frac{1}{m!} \frac{\partial^m n(t; p, h_1, h_2)}{\partial p^m} \Big|_{p=0}, \quad (19)$$

$$C_{i_m}(t; h_1, h_2) = \frac{1}{m!} \frac{\partial^m C_i(t; p, h_1, h_2)}{\partial p^m} \Big|_{p=0}, \quad (i = 1, 2, \dots, 6). \quad (20)$$

当 $p = 1$ 时,

$$n(t; 1, h_1, h_2) = n(t) = \sum_{m=0}^{+\infty} n_m(t; h_1, h_2), \quad (21)$$

$$C_i(t; 1, h_1, h_2) = C_i(t) = \sum_{m=0}^{+\infty} C_{i_m}(t; h_1, h_2), \quad (i = 1, 2, \dots, 6). \quad (22)$$

假设反应堆初始时达到稳定, $n(0) = n_0$, 则

$$\begin{aligned} \frac{dn(t)}{dt} \Big|_{t=0} &= \frac{\rho - \beta}{l} n_0 + \sum_{i=1}^6 \lambda_i C_{i_0} + q, \\ \frac{dC_i(t)}{dt} \Big|_{t=0} &= \frac{\beta_i}{l} n_0 - \lambda C_{i_0} = 0, \end{aligned} \quad (23)$$

得到

$$\begin{aligned} \frac{dn(t)}{dt} \Big|_{t=0} &= \frac{\rho}{l} n_0 + q, \\ C_i(0) &= C_{i_0} = \frac{\beta_i n_0}{\lambda_i l}, \\ \frac{dC_i(t)}{dt} \Big|_{t=0} &= 0. \end{aligned} \quad (24)$$

由 (24) 式可将初始条件表示为

$$\begin{aligned} n_0(0; h_1, h_2) &= n_0, \quad \frac{\partial n_0(0; h_1, h_2)}{\partial t} = \frac{\rho}{l} n_0 + q, \\ C_{i_0}(0; h_1, h_2) &= C_{i_0} = \frac{\beta_i}{\lambda_i l} n_0, \quad \frac{\partial C_{i_0}(0; h_1, h_2)}{\partial t} = 0, \\ & \quad (i = 1, 2, \dots, 6), \end{aligned}$$

$$n_m(0; h_1, h_2) = C_{i_m}(0; h_1, h_2) = 0,$$

$$\frac{\partial n_m(0; h_1, h_2)}{\partial t} = \frac{\partial C_{i_m}(0; h_1, h_2)}{\partial t} = 0, \quad m \geq 1, \quad (i = 1, 2, \dots, 6). \quad (25)$$

为了获得 $n_0(t; h_1, h_2)$, $C_{i_0}(t; h_1, h_2)$, 结合初始条件 (25), 求解下列微分方程即可:

$$L[n_0(t)] = 0, \tag{26}$$

$$N[C_{i_0}(t)] = 0, \quad (i = 1, 2, \dots, 6). \tag{27}$$

推导可得

$$n_0(t) = n_0 \exp\left(\frac{\rho - \beta}{l}t\right), \tag{28}$$

$$C_{i_0}(t) = \frac{\beta_i}{\lambda_i l} n_0 \exp(-\lambda_i t), \quad (i = 1, 2, \dots, 6). \tag{29}$$

将 (17), (18) 式代入 (10), (11) 式并比较 p 的 m 次幂的系数可得到 m 阶形变方程. 为方便取 $h_1 = -1, h_2 = -1$ 可得

$$\frac{\partial n_m(t)}{\partial t} - \frac{(\rho - \beta)}{l} n_m(t) = \sum_{i=1}^6 \lambda_i C_{i_{m-1}}(t) + (1 - \chi_m) \left(\frac{\partial n_{m-1}(t)}{\partial t} - \frac{(\rho - \beta)}{l} n_{m-1}(t) - q \right), \tag{30}$$

$$\frac{\partial C_{i_m}(t)}{\partial t} + \lambda_i C_{i_m}(t) = \frac{\beta_i}{l} n_{m-1}(t), \quad (i = 1, 2, \dots, 6), \tag{31}$$

$$\chi_m = \begin{cases} 0, & (m \leq 1), \\ 1, & (m \geq 2). \end{cases} \tag{32}$$

结合初始条件 (28), (29), 联立求解 (30), (31) 和 (32) 式, 可以计算出 $n_m(t), C_{i_m}(t)$.

表 1 阶跃负反应性 $\rho_0 = -0.007, q = 1(\text{mW/s})$ 输入后 1s 内中子功率 (mW) 随时间的变化

时间	5 阶级数解	15 阶级数解	20 阶级数解	Hermite 法	Gear 法
0.0	1.0000000	1.0000000	1.0000000	1.0000000	1.0000000
0.2	0.4824509	0.4824561	0.4824561	0.4824561	0.4824548
0.4	0.4667824	0.4668171	0.4668171	0.4668171	0.4668146
0.6	0.4534326	0.4535298	0.4535298	0.4535298	0.4535295
0.8	0.4416778	0.4418715	0.4418715	0.4418715	0.4418733
1.0	0.4310892	0.4314112	0.4314112	0.4314112	0.4314136

分析上述方法获得的级数解析解, 发现级数解析解可进一步表示为如下形式:

$$n(t) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{m=0}^n n_m(t) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=0}^6 \sum_{j=0}^{u_n} a_{i,j} e^{-b_i t} t^j, \tag{33}$$

$$b_0 = (\rho - \beta)/l, \quad b_i = \lambda_i, \quad (i = 1, 2, \dots, 6),$$

其中, $a_{i,j}$ 为系数, 正整数 u_n 的值依赖于所求级数阶数 n . 整个级数解相当于分离了变量 $e^{-b_i t}$ 的幂级数解.

3 计算实例和分析

以热中子堆为例, 计算有外加中子源阶跃反应性输入后中子密度 $n(t)$ 随时间 t 的变化 (由于其代表核反应堆功率水平, 计算中 $n(t)$ 使用功率单位), 其热堆参数 $l = 2 \times 10^{-5}\text{s}$, $\beta = 0.007$, $\beta_1 = 0.000266$, $\beta_2 = 0.001491$, $\beta_3 = 0.001316$, $\beta_4 = 0.002849$, $\beta_5 = 0.000896$, $\beta_6 = 0.000182$; $\lambda_1 = 0.0127\text{s}^{-1}$, $\lambda_2 = 0.0317\text{s}^{-1}$, $\lambda_3 = 0.115\text{s}^{-1}$, $\lambda_4 = 0.311\text{s}^{-1}$, $\lambda_5 = 1.40\text{s}^{-1}$, $\lambda_6 = 3.87\text{s}^{-1}$. 另外取 $n(0) = 1.0\text{mW}$, $C_i(0) = n(0)\beta_i/l/\lambda_i$. 然后用本文所述方法求级数解析解, 其结果与 Hermite 以及 Gear 方法的数值结果分别列于表 1 至表 3. 各阶级数解析解与数值解的结果的比较如图 1 至图 3. 本文利用 Hermite 法取 $h = 0.0001\text{s}$ 求得的近似值代替精确解 [14].

表 2 阶跃正反应性 $\rho_0 = 0.003, q = 0$ 输入后 1s 内中子功率 (mW) 随时间的变化

时间	5 阶级数解	15 阶级数解	20 阶级数解	Hermite 法	Gear 法
0.0	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000
0.2	1.850614	1.851268	1.851268	1.851268	1.851274
0.4	1.942632	1.947593	1.947593	1.947593	1.947603
0.6	2.023125	2.037922	2.037922	2.037922	2.037923
0.8	2.094025	2.124831	2.124832	2.124832	2.124828
1.0	2.156744	2.209839	2.209840	2.209841	2.209832

表 3 阶跃正反应性 $\rho_0 > \beta = 0.007, q = 0$ 输入后 1s 内中子功率 (mW) 随时间的变化

时间	5 阶级数解	15 阶级数解	20 阶级数解	Hermite 法	Gear 法
0.0	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000
0.05	95.63974	95.64079	95.64079	95.64079	95.78333
0.10	1409.895	1410.422	1410.422	1410.422	1417.518
0.15	19783.52	19828.51	19828.51	19828.51	20010.35
0.20	275995.0	277962.7	277962.7	277962.7	281741.4
0.25	3.834490×10^6	3.895881×10^6	3.895881×10^6	3.895881×10^6	3.966912×10^6
0.30	5.303262×10^7	5.460344×10^7	5.460344×10^7	5.460344×10^7	5.585867×10^7

如表 1, 2 可以看出, 同伦分析方法在刚性显著的情况下, 有很好的精度. 另外从表 3 中可看出, 在较大正反应性瞬发临界的情况下, 方程的刚性已不显著, 截断误差已成为主要矛盾, 同伦分析方法仍然显示了它的优越性, 它们的计算结果误差很小. 同时, 可以看到不管是在刚性明显还是线性明显的情况下, 同伦分析方法明显优于 Gear 法等常规数值方法, 15 阶级数解析解的精度则完全达到了精确

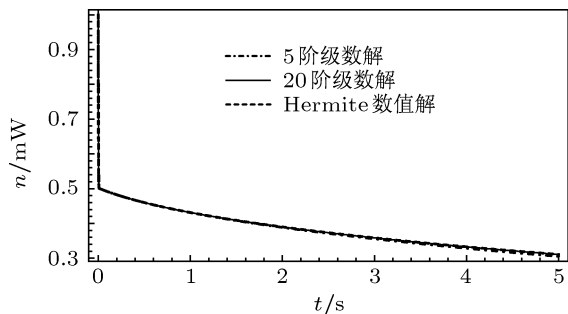


图 1 阶跃负反应性输入后, 5s 内级数解析解与 Hermite 数值解的比较

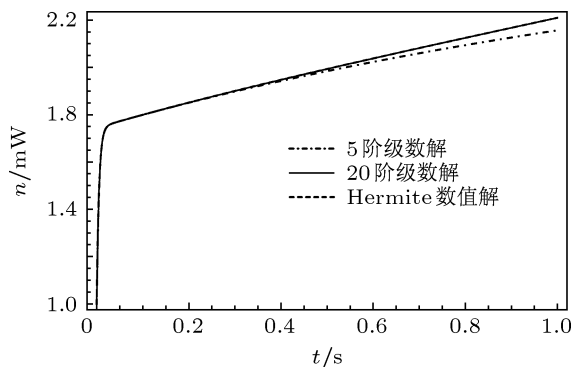


图 2 阶跃正反应性输入后, 1s 内级数解析解与 Hermite 数值解的比较

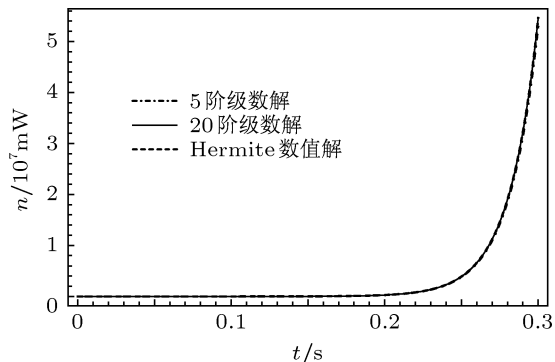


图 3 大正反应性输入后, 0.3s 内级数解析解与 Hermite 数值解的比较

计算要求 [12].

如图 1, 2, 3 可以看出, 即使 5 阶近似的级数解析解也有 3 位有效数字的精度, 但是随着时间的增加, 精度开始下降, 这时可通过选择更优的 h_1, h_2 或者增加阶数来提高精度.

4 结论

级数解析解从计算时间和计算精度上看, 都可以满足实际需要. 文中对 h_1, h_2 选取仅仅按系数遍历原则选取, 并没有进行优化, 如果优化调节 h_1, h_2 的值, 则可以在降低 N 值的同时保持算法的精度. 同伦分析方法计算过程简洁且计算速度快, 是一种精度较好、适用性较强的求解点堆中子动力学方程的方法, 可适用于反应堆中子动力学控制的设计分析和仿真计算.

- [1] Huang Z Q 2007 *Kinetics Base of Nuclear Reactor* (Beijing: Peaking University Press) p174 (in Chinese) [黄祖洽 2007 核反应堆动力学基础 (北京: 北京大学出版社) 第 174 页]
- [2] Chen W Z, Kuang B, Guo L F, Chen Z Y, Zhu B 2006 *Nuclear Engineering and Design* **236** 1326
- [3] Chen W Z, Guo L F, Zhu B, Li H F 2007 *Progress in Nuclear Energy* **49** 290
- [4] Li H F, Chen W Z, Zhang F, Luo L 2007 *Annals of Nuclear Energy* **34** 521
- [5] Zhang F, Chen W Z, Gui X W 2008 *Annals of Nuclear Energy* **35** 746
- [6] Li H F, Shang X L, Chen W Z 2010 *Chinese Science Bulletin* **55** 4116
- [7] Li H F, Chen W Z, Zhang F, Chen Z Y 2010 *Progress in Nuclear Energy* **52** 321
- [8] Li H F, Chen W Z, Zhang F, Shang X L 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 2375 (in Chinese) [黎浩峰, 陈文振, 张帆, 商学利 2010 物理学报 **59** 2375]
- [9] Liao S J 2003 *Beyond Perturbation: Introduction to the Homotopy Analysis Method*(Boca Raton: Chapman & Hall/CRC Press)p20
- [10] Yamashita M, Yabushita K, Tsuboi K 2007 *J. Phys.* **40** 8403
- [11] Liao S J, Tan Y 2007 *Stud. Appl. Math.* **119** 317
- [12] Zhu Q, Li H F, Luo L, Chen Z Y 2010 *Atomic Energy Science and Technology* **44**(s1) 303 (in Chinese) [朱倩, 黎浩峰, 罗磊, 陈志云 2010 原子能科学技术 **44** (s1) 303]
- [13] Ye W C, Li B, Wang J 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 030207 (in Chinese) [叶望川, 李彪, 王佳 2011 物理学报 **60** 030207]
- [14] Li H F, Chen W Z, Luo L, Zhu Q 2009 *Annals of Nuclear Energy* **36** 427

Homotopy analysis solution of point reactor kinetics equations with six-group delayed neutrons*

Zhu Qian Shang Xue-Li Chen Wen-Zhen[†]

(*Department of Nuclear Energy Science and Engineering, Naval University of Engineering, Wuhan 430033, China*)

(Received 21 May 2011; revised manuscript received 16 August 2011, China)

Abstract

Homotopy analysis method is a new method to form approximate analytical solution for non-linear system by using various base functions, which is different from traditional analytical methods. So far, the analytical solution of the point reactor neutron kinetics equations with six-group delayed neutrons has not been obtained yet. In this paper the homotopy analysis method is employed for solving the point reactor neutron kinetics equations with six-group delayed neutrons. The series analysis solutions are obtained using the homotopy analysis method, and the relevant algorithm is given and analyzed. The results show that the computation time and accuracy satisfy the engineering requirements. This analysis method can be applied to the design, the analysis and the simulation of reactor control.

Keywords: homotopy analysis method, neutron kinetics, point reactor equation, six-group delayed neutrons

PACS: 02.60.Cb, 25.85.Ec, 28.20.-v

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 10575131), and the Natural Science Foundation of Naval University of Engineering.

[†] E-mail: cwz2@21cn.com