

# 切换电路系统的振荡行为及其非光滑分岔机理\*

吴天一<sup>1)2)</sup> 张正娣<sup>1)</sup> 毕勤胜<sup>1)†</sup>

1) (江苏大学理学院, 镇江 212013)

2) (镇江船艇学院基础部, 镇江 212003)

(2011年7月13日收到; 2011年8月17日收到修改稿)

探讨了周期时间开关及控制阈值下在两个 Rayleigh 型子系统之间切换的电路系统随参数变化的复杂动力学演化过程, 通过对子系统平衡点的分析, 给出了参数空间中 Fold 分岔和 Hopf 分岔的条件, 考察了切换面处广义 Jacobian 矩阵特征值随辅助参数变化的分布情况, 得到了切换面处系统可能存在的各种分岔行为, 进而讨论了系统不同行为的产生机理, 指出系统的相轨迹存在分别由周期开关和控制阈值决定的两类不同的分界点, 而系统轨迹与非光滑分界面的多次碰撞将导致系统由周期倍化分岔导致混沌振荡.

**关键词:** Rayleigh 振子, 开关切换, 控制阈值, 非光滑分岔

**PACS:** 05.45.-a, 84.30.-r

## 1 引言

物理、化学和生物中的许多问题都可以用自激振子来描述<sup>[1]</sup>, 比如桥梁和机翼的振动、心脏的跳动、机械刀具的颤振以及机械系统中对摩擦的控制等<sup>[2-4]</sup>. 作为典型的自激振子之一, Rayleigh 振子从上个世纪以来一直受到广泛的关注<sup>[5]</sup>, 齐次平衡法、多尺度法、平均法等分析方法被用来求解 Rayleigh 系统的解析解<sup>[6,7]</sup>, 这些解可以解释实际系统中的现象, 例如系统中的极限环对应着电容器能量的周期振荡<sup>[8]</sup>. 在该系统的基础上, 通过对电路结构的改变, 人们建立了各种单自由度的广义 Rayleigh 电路, 并分析了其不同条件下的振荡特性, 例如, Margallo 等人给出了具有三次非线性项的广义 Rayleigh 电路极限环的存在条件<sup>[9]</sup>. Cveticanin 等人讨论了不同类型的非线性参数对广义 Rayleigh 系统周期振荡的影响<sup>[5]</sup>. Liu 得到了周期激励下广义 Rayleigh 系统的反周期解<sup>[10]</sup>.

由于实际系统中存在大量的诸如力学系统中的干摩擦<sup>[11]</sup>、机械系统中的碰撞与冲击<sup>[12,13]</sup>、电路系统中的分段线性二极管<sup>[14]</sup>、控制系统中的开关与阈值<sup>[15,16]</sup>等非光滑因素, 其复杂动力学行为的研究引起了国内外学术界的高度重视, 成为当前非线性科学中的热点课题之一. 根据所建

立的数学模型中的非光滑度的不同, 非光滑系统大致可以分为以下三类<sup>[17]</sup>: 1) 非光滑连续系统, 系统的向量场连续, 而其 Jacobian 矩阵不连续, 如蔡氏电路<sup>[18]</sup>; 2) Filippov 系统, 系统的向量场和其 Jacobian 矩阵均不连续, 但其状态空间连续, 如干摩擦系统<sup>[19]</sup>; 3) 非光滑脉冲系统, 系统的向量场、Jacobian 矩阵及其状态空间均不连续, 如碰撞系统<sup>[20]</sup>.

目前大部分相关工作, 均是针对单一非光滑因素展开的, 很少考虑多种非光滑因素同时存在对系统复杂振荡行为的影响. 由于电路系统中的开关以及用于控制目的的阈值是真实系统中常见的两类非光滑因素, 均会导致其数学模型表现为非光滑连续系统特性<sup>[21-23]</sup>, 即在切换分界面上 Jacobian 矩阵不连续, 而其向量场是连续的, 这与其他两类非光滑系统存在本质的区别. 本文同时引入开关切换和控制阈值, 使得系统在两个广义 Rayleigh 电路之间切换, 分析两个非光滑因素同时存在对系统行为的影响规律, 揭示其不同振荡现象的产生机理.

## 2 数学模型

考虑图 1 所示的电路系统, 其中双向开关 SW 按照图 2 所示的规律在  $a$  和  $b$  之间切换, 导致系统

\* 国家自然科学基金 (批准号: 20976075, 10972091) 资助的课题.

† E-mail: qbi@ujs.edu.cn

在两个 Rayleigh 电路之间转换, 分别称为  $a$  子系统和  $b$  子系统, 两个子系统均由一个电感  $L$ , 一个电容  $C$ , 两个额定电阻  $R_0$  和  $r$ , 一个非线性电阻  $G(y)$ , 以及一个额定电阻  $R$  和一个电源  $E$  组成, 当 SW 位于  $a$  时,  $E = E_1, R = R_1$ , 而位于  $b$  时,  $E = E_2, R = R_2$ .

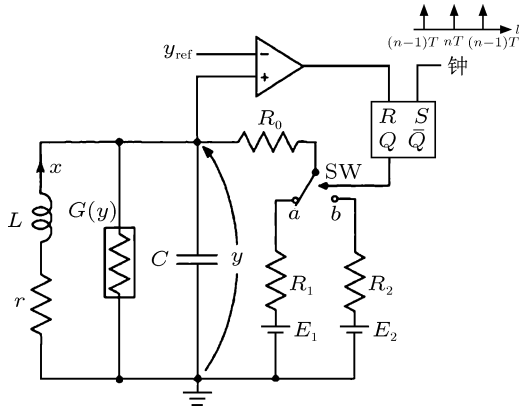


图1 切换电路

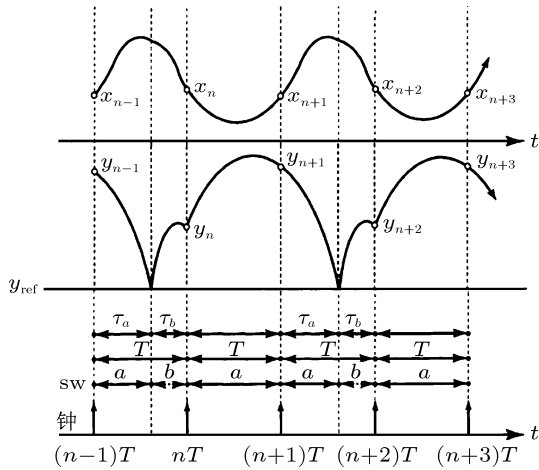


图2 切换规律示意图

双向开关 SW 在两个子 Rayleigh 系统之间的切换规律由两个因素决定, 一是固定周期  $T$  切换, 在记时开始的任何整周期  $nT$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) 时刻, 开关 SW 均位于  $a$  端, 使得系统在子系统  $a$  中振荡; 二是控制阈值切换, 当电容器两极板之间的电压  $y$  达到控制阈值  $y_{ref}$  时, RS 触发器发出指令, 使开关 SW 转向  $b$  端, 使得系统转入子系统  $b$  中振荡. 因此系统存在两种分段现象, 一是在每一整周期  $nT$  之前, 如果开关 SW 位于  $a$  端, 则开关保持不动, 而若是开关 SW 位于  $b$  端, 则开关 SW 从  $b$  端切换至  $a$  端, 二是在子系统  $a$  中的振荡, 当  $y$  达到  $y_{ref}$  时, SW 从  $a$  端转向  $b$  端.

引入参数  $g_1 = 1/(R_0 + R_1), g_1 = 1/(R_0 + R_2) B_1 = g_1 E_1, B_2 = g_2 E_2$ , 令  $L = 1, C = 1$ , 根据基尔霍夫电流电压守恒定律可以建立如下

模型 [24]:

$$SW : a \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -rx - y, \\ \frac{dy}{dt} = x + (1 - g_1)y - \frac{1}{3}y^3 + B_1, \end{cases} \quad (1)$$

$$SW : b \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -rx - y, \\ \frac{dy}{dt} = x + (1 - g_2)y - \frac{1}{3}y^3 + B_2, \end{cases} \quad (2)$$

其中非线性电阻的特性可以表述为

$$G(y) = -y + \frac{1}{3}y^3.$$

### 3 平衡点分析

子系统  $a$  和  $b$  的方程可统一表示为

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -rx - y, \\ \frac{dy}{dt} = x + (1 - g)y - \frac{1}{3}y^3 + B, \end{cases} \quad (3)$$

平衡点  $E(x_e, y_e)$  满足条件

$$\begin{cases} -rx - y = 0, \\ x + (1 - g)y - \frac{1}{3}y^3 + B = 0, \end{cases} \quad (4)$$

由此得  $x_e = -\frac{y_e}{r}, y_e$  满足

$$f(y_e) = \frac{1}{3}y_e^3 + \left[ \frac{1}{r} - (1 - g) \right] y_e - B = 0. \quad (5)$$

其相应的特征方程可以表示为

$$\lambda^2 + (r + g - 1 + y_e^2)\lambda + 1 - r(1 - g - y_e^2) = 0. \quad (6)$$

显然, 当  $r + g - 1 + y_e^2 > 0, 1 - r(1 - g - y_e^2) > 0$  时,  $E(x_e, y_e)$  是稳定的, 从而可得其相应的两种分岔条件, 即 Fold 分岔集

$$FB : \begin{cases} r + g - 1 + y_e^2 > 0, \\ 1 - r(1 - g - y_e^2) = 0, \\ \frac{1}{3}y_e^3 + \left[ \frac{1}{r} - (1 - g) \right] y_e - B = 0, \end{cases} \quad (7a)$$

可进一步表示为

$$FB : \begin{cases} r + g - 1 + y_e^2 > 0, \\ \{4[g^3 + 3g(1 - g) - 1] + 9B^2\}r^3 + \\ 12(1 - g)^2r^2 - 12(1 - g)r + 4 = 0, \end{cases} \quad (7b)$$

和 Hopf 分岔集

$$\text{HB: } \begin{cases} r + g - 1 + y_e^2 = 0, \\ 1 - r(1 - g - y_e^2) > 0, \\ \frac{1}{3}y_e^3 + \left[\frac{1}{r} - (1 - g)\right]y_e - B = 0, \end{cases} \quad (8a)$$

即

$$\text{HB: } \begin{cases} 1 - r(1 - g - y_e^2) > 0, \\ r^5 + 3(1 - g)r^4 - 6r^3 + (4g^3 - 12g^2 + 18g - 10 + 9B^2)r^2 + [12(1 - g)^2 + 9]r - 9(1 - g) = 0, \end{cases} \quad (8b)$$

其中由 Hopf 分岔产生的振荡频率为

$$\Omega_H = \sqrt{1 - r(1 - g - y_e^2)}.$$

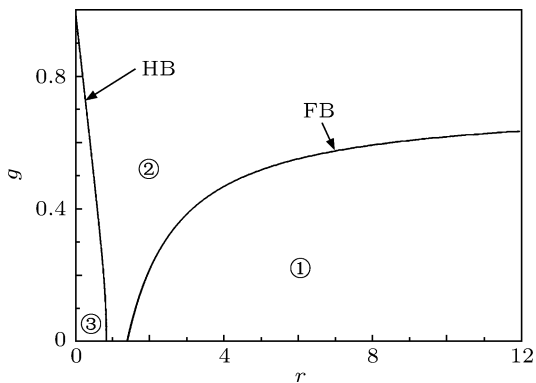


图3 子系统的分岔集

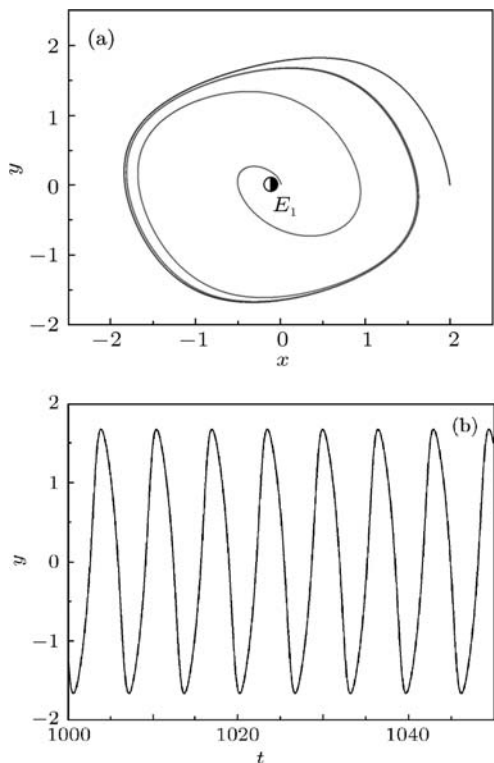


图4 分岔集区域③中 (a) 相图; (b) 时间历程

FB 和 HB 将参数空间  $(r, g, B)$  划分成对

应于不同平衡点特性的多个区域, 图 3 给出了当  $B = 0.1$  时的分岔集.

在区域①中, 存在两个稳定的结点和一个不稳定的鞍点, 如当  $g = 0.2, r = 3.0$  时, 存在两个结点  $E_1(-0.426, 1.278)$  和  $E_3(0.352, -1.056)$ , 及一个鞍点  $E_2(0.074, -0.222)$ . 当参数位于分岔集 FB 时, 区域①中一个结点和鞍点重合退化为尖点, 而另一个平衡点依然稳定. 区域②只存在一个稳定的平衡点, 如当  $g = 0.2, r = 1.0$  时, 存在一个稳定的焦点  $E_1(-0.396, 0.396)$ . 当参数位于分岔集 HB 时, 平衡点  $E_1$  失稳产生 Hopf 分岔, 导致区域③中存在稳定的周期解, 如当  $g = 0.2, r = 0.1$  时, 如图 4 所示, 其中不稳定的焦点为  $E_1(-0.108, 0.011)$ , 周期解的频率为  $\Omega_H = 0.959$ .

### 4 非光滑分岔分析

子系统  $a, b$  由双向开关 SW 进行切换, 切换条件之一为电容器两极板间的电压  $y$  达到某一参考值  $y_{\text{ref}}$ , 故存在一个分界面  $\Pi = \{(x, y) \in R^2 | q(y) = y_{\text{ref}}\}$ . 当变量  $y$  的轨迹穿越分界面时, 受非光滑因素的影响, 会导致电路系统产生复杂振荡. 考虑到系统的向量场在分界面处是连续但不光滑的, 因而可以借助广义 Jacobian 矩阵来研究分界面附近的分岔行为.

子系统  $a$  在分界面处的 Jacobian 矩阵可表示为

$$J_a(\Pi) = \begin{vmatrix} -r & -1 \\ 1 & 1 - g_1 - y_{\text{ref}}^2 \end{vmatrix}, \quad (9)$$

相应地, 子系统  $b$  在分界面处的 Jacobian 矩阵可表示为

$$J_b(\Pi) = \begin{vmatrix} -r & -1 \\ 1 & 1 - g_2 - y_{\text{ref}}^2 \end{vmatrix}. \quad (10)$$

由此建立广义 Jacobian 矩阵  $J(\Pi) = \{(1 - q)J_a(\Pi) + qJ_b(\Pi), \forall q \in [0, 1]\}$ , 即

$$J(\Pi) = \begin{vmatrix} -r & -1 \\ 1 & 1 - (1 - q)g_1 - qg_2 - y_{\text{ref}}^2 \end{vmatrix}, \quad (11)$$

其中  $q$  为辅助参数, 其广义特征方程为

$$F_{\Pi}(\lambda) = \lambda^2 + [q(g_2 - g_1) + g_1 + r - 1 + y_{\text{ref}}^2]\lambda + r[q(g_2 - g_1) + g_1 - 1 + y_{\text{ref}}^2] + 1. \quad (12)$$

显然, 当满足下列条件:

$$QB: \begin{cases} q(g_2 - g_1) + g_1 + r - 1 + y_{ref}^2 > 0, \\ r[q(g_2 - g_1) + g_1 - 1 + y_{ref}^2] + 1 = 0 \end{cases} \quad (13)$$

时, 广义 Jacobian 矩阵的特征方程将出现零根, 而当

$$HB: \begin{cases} q(g_2 - g_1) + g_1 + r - 1 + y_{ref}^2 = 0, \\ r[q(g_2 - g_1) + g_1 - 1 + y_{ref}^2] + 1 > 0 \end{cases} \quad (14)$$

时, 其特征值存在纯虚根. 在上述两种条件下, 系统在分界面处就可能出现非光滑分岔, 当然, 分岔模式还要通过进一步分析其穿越实轴和虚轴的具体情况来确定, 比如, 当广义 Jacobian 矩阵的特征值单次穿过原点或穿越虚轴时, 其分岔模式与光滑系统的分岔行为接近, 而多次穿过时, 则可能出现组合分岔模式.

取定参数  $g_1 = 0.2, g_2 = 2.0, T = 5, B_1 = 1.206, B_2 = 2.0$ , 图 5 给出了  $y_{ref} = 0.0$  时在  $(q, r)$  参数平面上的非光滑分岔集.

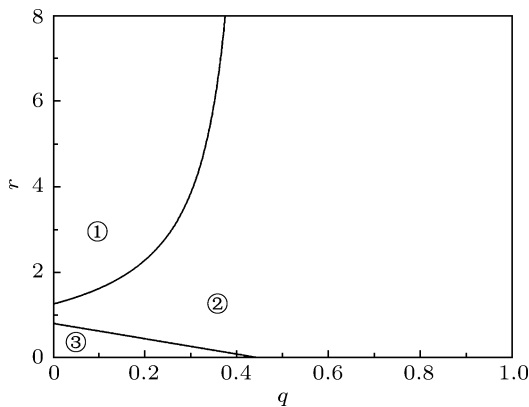


图 5 系统的非光滑分岔集

这些分岔集将参数平面划分为三个子区域. 为进一步揭示可能存在的非光滑分岔, 图 6 给出了参数位于三个子区域时广义 Jacobian 矩阵特征值的典型分布情况. 例如当  $r = 1.0$  时, 此时参数位于区域②中, 相应的特征值在  $q$  从 0 变化到 1 的过程中不穿越实轴和虚轴, 因此系统不存在分岔行为, 系统存在一个稳定的结点  $(x_0, y_0) = (-0.396, 0.396)$ . 而当参数位于区域①时, 如  $r = 3.0$ , 此时其广义 Jacobian 矩阵特征值在辅助参数  $q = 0.259$  时存在零值 (图 6(a)), 系统发生 Fold 分岔, 此时存在稳定的结点  $(x_0, y_0) = (-0.426, 1.279)$ .

当参数位于区域③时, 如  $r = 0.1$ , 其广义 Jacobian 矩阵特征值在  $q = 0.389$  时单次穿越虚轴, 产生超临界 Hopf 分岔, 由于是单次穿越, 其分岔特性

与光滑系统的 Hopf 分岔相似. 图 7 给出了其相应的周期性. 另外, 从时间历程可以发现, 其周期与控制开头切换的脉冲信号的周期  $T = 5$  一致.

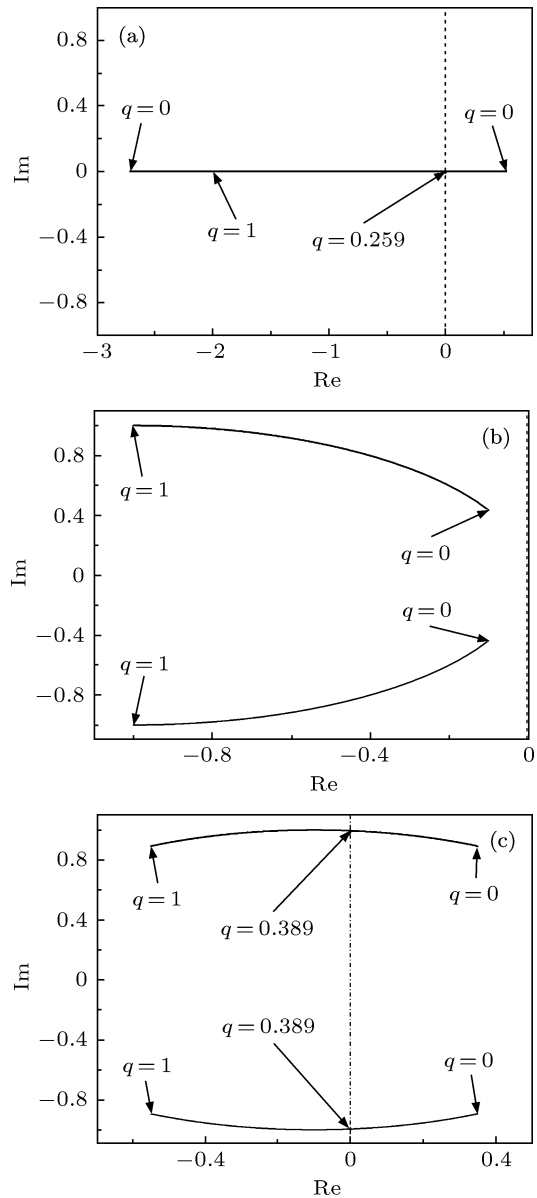


图 6 广义特征值在复平面内的分布情况 (a) 区域①  $r = 3.0$ ; (b) 区域②  $r = 1.0$ ; (c) 区域③  $r = 0.1$

### 5 边界碰撞与系统复杂行为机理

为进一步分析系统的动力学特性及其分岔机理, 依然取参数  $g_1 = 0.2, g_2 = 2.0, T = 5, B_1 = 1.206, B_2 = 2.0$ , 阈值  $y_{ref} = -0.91$ , 考察系统随  $r$  变化的动力学演化过程.

由于  $y_{ref}$  不影响子系统  $a$  和  $b$  的分岔特性, 因而子系统的分岔集 FB 和 HB 仍然可以分别

表示为 (7b) 和 (8b) 式. 图 8 给出了  $B = 1.206$  和  $B = 2.0$  两种条件下子系统在参数平面  $(r, g)$  上的分岔集, 可以看出, 无论是哪种情况, 子系统都只存在 HB 分岔集.

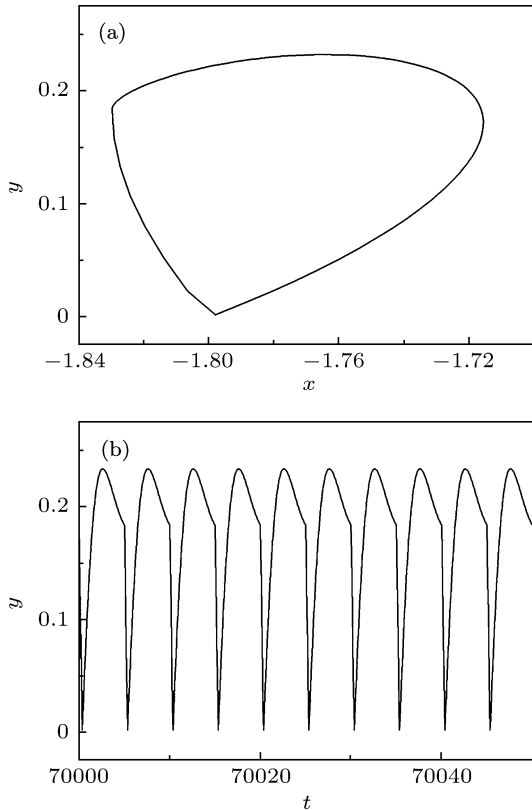


图 7 系统在  $g_1 = 0.2, g_2 = 2.0, r = 0.1, T = 5, B_1 = 1.206, B_2 = 2.0, y_{\text{ref}} = 0.0$  时的 (a) 相图; (b) 时间历程

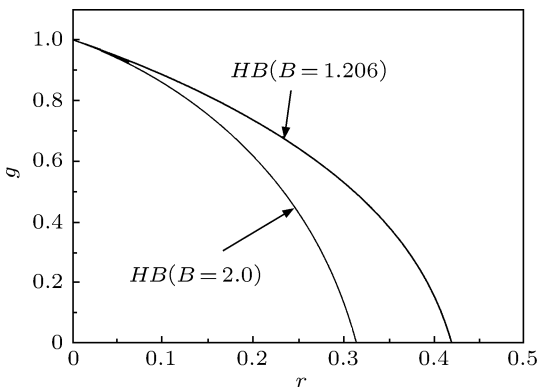


图 8 不同条件下子系统的分岔集

当  $r = 0.050$  时, 系统表现为图 9 所示的周期振荡. 计算得, 此时子系统  $a$  为围绕平衡点  $E_a(-1.256, 0.063)$  的稳定周期解, 而子系统  $b$  存在稳定的焦点  $E_b(-1.904, 0.095)$ . 当系统在子系统  $a$  和  $b$  之间来回切换时, 其特性由子系统  $a$  和  $b$  的动力学行为耦合而成. 同时, 系统行为在子系统  $a$

和  $b$  之间来回切换时, 会形成两个分界点: 一个在非光滑分界面上, 即点  $B$ ; 另一个形成于在周期脉冲信号  $T$  的作用下系统由子系统  $b$  切换至子系统  $a$  时, 即点  $A$ .

### 5.1 周期振荡机理

假设最初开关置于  $a$  端, 即系统首先在子系统  $a$  中振荡, 以点  $A(x_A, y_A)$  作为计时起点. 随着时间的变化, 电容器两端的电压  $y$  变小, 由于  $A(x_A, y_A)$  不是刚好位于子系统  $a$  的周期轨道上, 系统的轨迹会沿  $ACB$  逐渐逼近围绕平衡点  $E_a(-1.256, 0.063)$  的极限环, 即子系统  $a$  的稳定周期轨道. 数值模拟可以发现, 经过一定时间, 当  $t = \tau_a = 1.454$ , 轨迹触碰到非光滑分界面  $y_{\text{ref}} = -0.91$ , 即到达点  $B(x_B, y_{\text{ref}})$ , 此时 RS 触发器就会发出指令使开关置于  $b$  端, 则系统转入子系统  $b$ , 且以  $B$  点处的  $(x_B, y_{\text{ref}})$  作为初值, 向子系统  $b$  中的稳定焦点  $E_b(-1.904, 0.095)$  逼近, 也即按图 9(a) 所示轨迹  $BDA$  向稳定的平衡点  $E_b(-1.904, 0.095)$  收敛.

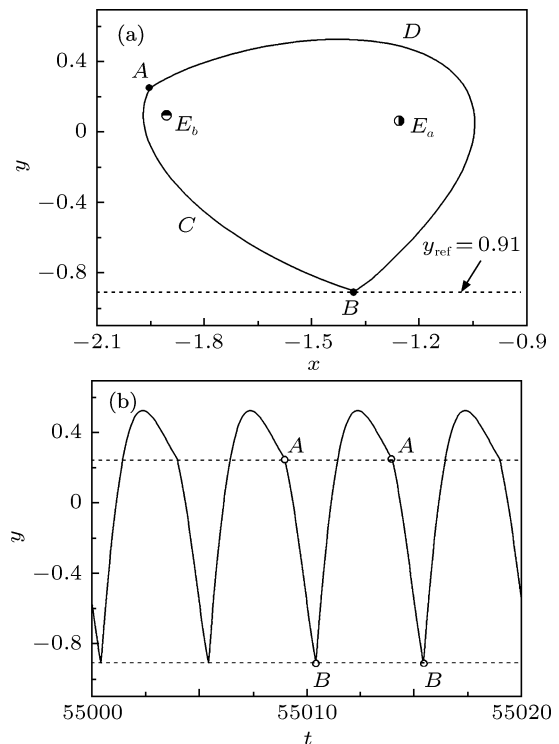


图 9 系统在  $r = 0.050$  时的 (a) 相图; (b) 时间历程

系统按子系统  $b$  的轨迹运动到一定时间, 当  $t = \tau_a + \tau_b = T = 5.0$ , 即  $\tau_b = 3.546$  时, 周期脉冲信号  $T$  就会响应, 开关置回至  $a$  端, 而此时轨迹恰好位于  $A(x_A, y_A)$  点, 故仍可以作为新的计

时起点, 如前所述不断循环振荡. 正因如此, 系统存在稳定的周期解, 其周期与控制开关切换的脉冲信号的周期  $T = 5$  一致. 该周期解由两部分组成, 即系统从  $A$  点出发, 按子系统  $a$  振荡, 经过时间  $\tau_a$  到  $B$  点, 与非光滑分界面发生边界碰撞, 随后按子系统  $b$  振荡, 经过时间  $\tau_b$  到  $A$  点, 形成周期轨道.

### 5.2 倍周期及混沌振荡机理

当  $r = 0.059$  时, 系统表现为周期倍化解 (图 10). 此时各子系统的特性并未发生变化, 也即子系统  $a$  为围绕平衡点  $E_a(-1.266, 0.075)$  的稳定周期解, 而子系统  $b$  存在稳定的焦点  $E_b(-1.888, 0.111)$ . 系统的行为依然由子系统  $a$  和  $b$  的动力学特性耦合而成. 同样, 存在着分别由非光滑分界面和周期脉冲信号所确定的两个分界面, 使得系统轨迹在子系统  $a$  和  $b$  之间切换.

假设  $t = 0$  时开关置于  $a$  端, 初始状态处于  $A$  点, 即以点  $A(x_A, y_A)$  为计时起点, 此时系统按子系统  $a$  振荡, 也即表现为逐渐逼近于围绕平衡点  $E_a(-1.266, 0.075)$  的极限环, 即沿  $ACB$  趋于子系统  $a$  中的极限环 (图 10). 经过第一个脉冲信号周期  $T$ , 即  $t = T = 5.0$ , 开关仍置于  $a$  端, 此时响应的周期脉冲信号  $T$  不会导致子系统之间的切换, 系统仍继续在子系统  $a$  中振荡, 直至  $t = 7.543$  时, 系统轨迹运动到点  $B(x_B, y_{ref})$ , 触碰到非光滑分界面  $y_{ref} = -0.91$ , 此时 RS 触发器发出指令使开关转向  $b$  端, 即系统切换至子系统  $b$ , 且以  $B$  点处的  $(x_B, y_{ref})$  作为初值, 按照子系统  $b$  运动, 系统轨迹沿  $BDA$  逐渐收敛于子系统  $b$  中的平衡点  $E_b(-1.888, 0.111)$ . 当时间  $t = 2T = 10.0$  时, 轨迹恰好运动至点  $A(x_A, y_A)$ , 从而进入下一个周期, 如此循环往复, 形成周期振荡.

必须指出的是,  $r$  的变化会导致子系统  $a$  和  $b$  的稳态解发生变化, 特别是随  $r$  的增加, 其离 Hopf 分岔集越近, 导致子系统  $a$  中的稳定极限环振幅变小, 使得在第一个脉冲信号周期  $T$  内, 从  $A$  点出发的子系统  $a$  的轨迹, 接触不到非光滑分界面  $y_{ref} = -0.91$ , 依然保持在子系统  $a$  中的振荡. 只有在第二个脉冲信号周期  $T$  内, 其轨迹才会与分界面碰撞, 导致不同子系统之间的切换, 从而使得系统的周期加倍.

因此, 该周期二解也由两部分组成, 即系统从  $A$  点出发, 按子系统  $a$  振荡, 经过时间  $T + \tau_a$  到  $B$  点, 与非光滑分界面发生边界碰撞, 随后按子系统  $b$  振荡, 经过时间  $\tau_b$  到  $A$  点, 其中  $\tau_a + \tau_b = T$ ,

形成周期  $2T$  轨道.

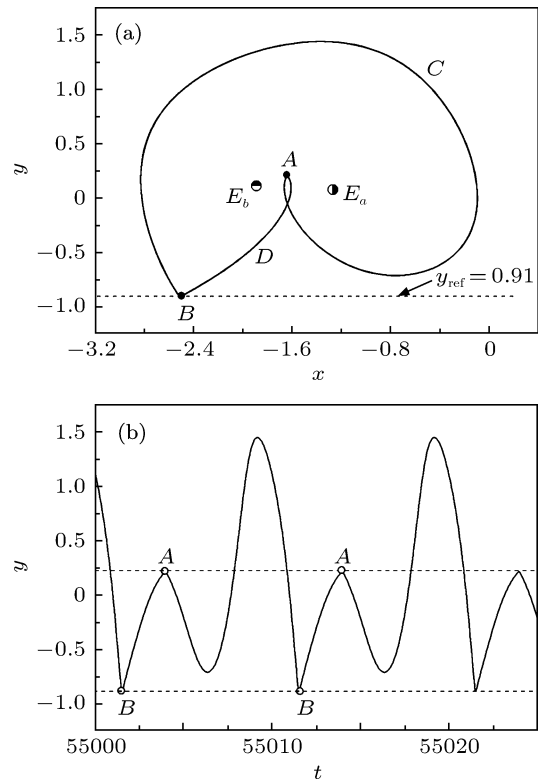


图 10  $r = 0.059$  时系统的 (a) 相图;(b) 时间历程

随着参数  $r$  的继续增大, 系统出现倍周期分岔序列. 如当  $r = 0.085$  时, 系统出现周期  $4T$  解 (图 11). 在此参数条件下, 子系统  $a$  和  $b$  的动力特性都没有发生变化. 而随着  $r$  的增加, 子系统  $a$  中稳定极限环的幅值进一步变小, 使得子系统  $a$  中的振荡, 与分界面碰撞后, 存在着两条不同的趋于子系统  $b$  中稳定焦点的轨道. 也即子系统  $a$  和  $b$  之间存在四个切换点, 其中两个由周期脉冲信号引起, 另两个由非光滑分界面产生. 依旧假设  $t = 0$  时系统首先在子系统  $a$  中振荡, 以点  $A_1(x_{A1}, y_{A1})$  为计时起点, 其动力学行为轨迹逐渐逼近围绕平衡点  $E_a(-1.294, 0.110)$  的极限环. 经过时间  $t = T = 5.0$ , 周期脉冲信号并没有引起子系统之间的切换, 开关保持在  $a$  端不动, 直至持续时间达到  $t = \tau_{a1} = 7.648$ , 轨迹运动到点  $B_1(x_{B1}, y_{ref})$ , 触碰到非光滑分界面  $y_{ref} = -0.91$ , RS 触发器发出指令使开关移至  $b$  端, 即系统切换至子系统  $b$ , 且以  $B_1$  点的  $(x_{B1}, y_{ref})$  作为初值, 向平衡点  $E_b(-1.842, 0.157)$  收敛, 经过时间  $t = \tau_{a1} + \tau_{b1} = 2T = 10.0$ , 因周期脉冲信号  $T$  再次响应, 导致开关置回至  $a$  端. 此时, 轨迹并没有抵达最初的计时起点  $A_1(x_{A1}, y_{A1})$ , 而

是位于离之不久的点  $A_2(x_{A2}, y_{A2})$  处, 故应以点  $A_2(x_{A2}, y_{A2})$  作为新的计时起点. 因计时起点的初值发生了变化, 轨迹虽仍然逐渐逼近于围绕平衡点  $E_a(-1.294, 0.110)$  的极限环, 但已不同于之前的逼近轨迹. 开关保持在  $a$  端不动, 直至经过时间  $t = 2T + \tau_{a2} = 18.198$ , 轨迹再次触碰到非光滑分界面  $y_{\text{ref}} = -0.91$ , 即到达点  $B_2(x_{B2}, y_{\text{ref}})$ , 在 RS 触发器的作用下系统转入子系统  $b$ . 同理, 初值  $(x_{B2}, y_{\text{ref}})$  相较于之前的  $(x_{B1}, y_{\text{ref}})$  发生了变化, 故向平衡点  $E_b(-1.842, 0.157)$  的收敛轨迹也有所不同. 再经过时间  $t = 2T + \tau_{a2} + \tau_{b2} = 20.0$ , 周期脉冲信号  $T$  响应, 开关转回至  $a$  端, 此时轨迹恰好运动至点  $A_1(x_{A1}, y_{A1})$  处, 回到最开始的位置, 继而不断地循环往复振荡. 在此参数条件下, 周期解的周期变为脉冲信号周期  $T = 5$  的四倍, 且轨迹与分界面相交于两点但仍不穿过分界面.

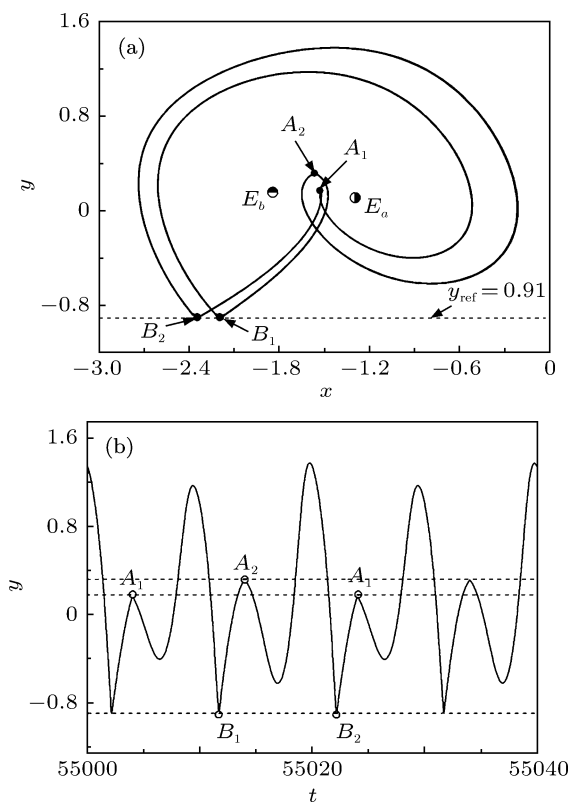


图 11 系统在  $r = 0.085$  时的 (a) 相图; (b) 时间历程

随着参数  $r$  的继续增大, 系统与非光滑分界

面的碰撞点愈来愈多, 也即存在着更多的碰撞点  $B(x_{Bi}, y_{\text{ref}})$ ,  $i = 1, 2, \dots$ , 导致系统的周期不断倍化, 产生混沌振荡 (图 12). 其产生的机理可以这样理解, 当系统轨迹从子系统  $a$  出发, 经过一定时间后与分界面碰撞, 使得系统按子系统  $b$  振荡, 又因周期脉冲信号的作用返回子系统  $a$ . 但由于轨迹每次与分界面的碰撞点存在着不同的  $x$  坐标值, 也即存在不同的碰撞点, 从而使得以碰撞点为初值, 按子系统  $b$  振荡并趋于子系统  $b$  中平衡点的轨道存在无穷多条, 导致系统混沌振荡.

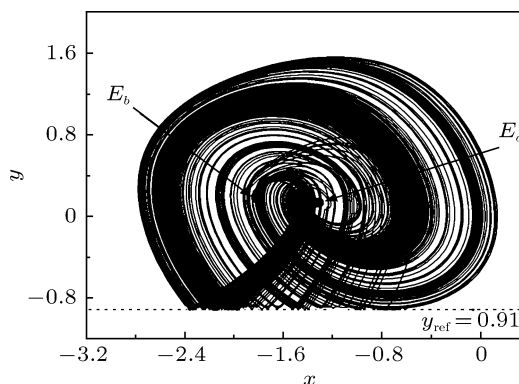


图 12 系统在  $r = 0.100$  时的相图

## 6 结论

电路中的开关和控制阈值对系统的行为存在着明显的影响, 这两者的同时存在使得系统在两个 Rayleigh 电路之间路来回切换, 导致系统的相轨迹存在两类分界点, 一类由固定周期脉冲信号转换开关引起, 另一类是由电容器两极板间的电压达到控制阈值产生, 均会使得系统在两子系统所对应的轨迹之间切换, 而在切换时的非光滑分界面上, 由于广义 Jacobian 矩阵的特征值随辅助参数的变化穿越虚轴, 引起 Hopf 分岔, 导致电路系统的周期振荡. 由于子系统的轨迹随着参数的变化而发生改变, 严重影响着切换的发生, 一旦切换时间在第一个固定周期  $T$  内未触碰到控制阈值, 就会产生周期  $2T$  振荡, 且轨迹与控制阈值之间发生边界碰撞的次数会随着参数的改变而逐渐增加, 导致系统由倍周期分岔进入混沌振荡.

[1] Rajasekar S, Parthasarathy S, Lakshmanan M 1992 *Chaos, Solitons & Fractals* **2** 271  
 [2] Zhang W, Yu P 2000 *J. Sound and Vibration* **231** 145  
 [3] Bogarcz R, Ryczek B 1997 *Eng. Trans* **45** 194

[4] Jing Z J, Yang Z Y, Jiang T 2006 *Chaos, Solitons and Fractals* **27** 722  
 [5] Cveticanin L, Abd El-Latif G M, El-Naggar A M, Ismail G M 2008 *Journal of Sound and Vibration* **318** 580

- [6] Nayfeh A H, Mook D T 1979 *Nonlinear Oscillators* (New York: Wiley)
- [7] Bogoliubov N N, Mitropolski Y S 1961 *Asymptotic Methods in the Theory of Non-linear Oscillations* (New York: Gordon & Breach)
- [8] Nayfeh A H 1973 *Perturbation Method* (New York: Wiley)
- [9] Margallo J G, Bejarano J D 1992 *Journal of Sound and Vibration* **156** 283
- [10] Liu B W 2009 *Nonlinear Analysis: Real World Applications* **10** 2850
- [11] Brogliato B 1999 *Nonsmooth Mechanics-Models* (New York: Springer-Verlag)
- [12] Luo G W, Xie J H 2001 *Physica D* **148** 183
- [13] Luo G W, Xie J H 2002 *International Journal of Nonlinear Mechanics* **37** 19
- [14] Contou-Carrere M N, Daoutidis P 2005 *Transactions on Automatic Control* **50** 1831
- [15] Zhusubaliyev Z H, Mosekilde E 2003 *Bifurcation and Chaos in Piecewise-Smooth Dynamical Systems* (Singapore: World Scientific)
- [16] Zhusubaliyev Z H, Mosekilde E 2008 *Physics Letters A* **372** 2237
- [17] Leine R I 2006 *Physica D* **223** 121
- [18] Chua L O, Lin G N 1990 *Transactions on Circuits and Systems* **37** 885
- [19] Galvenetto U 2001 *Journal of Sound and Vibration* **248** 653
- [20] Xu H D 2005 *Ph.D Dissertation* (Chengdu: Southwest Jiaotong University) (in Chinese) [徐慧东 2005 博士学位论文 (成都: 西南交通大学)]
- [21] Chen Z Y, Zhang X F, Bi Q S 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 2327 [陈章耀, 张晓芳, 毕勤胜 2010 物理学报 **59** 2326]
- [22] Gonzalo M R, Jason A C Gallas 2010 *Physics Letters A* **375**(2) 143
- [23] Feng C W, Cai L, Zhang L S, Yang X K, Zhao X H 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 8426 [冯朝文, 蔡理, 张立森, 杨晓阔, 赵晓辉 2010 物理学报 **59** 8426]
- [24] Kousaka T, Ueta T, Ma Y, Hiroshi Kawakami 2006 *Chaos, Solitons & Fractals* **27** 1019

## The oscillations of a switching electrical circuit and the mechanism of non-smooth bifurcations\*

Wu Tian-Yi<sup>1)2)</sup> Zhang Zheng-Di<sup>1)</sup> Bi Qin-Sheng<sup>1)†</sup>

1) (Faculty of Science, Jiangsu University, Zhenjiang 212013, China)

2) (Zhenjiang Watercraft College, Zhenjiang 212003, China)

(Received 8 July 2011; revised manuscript received 15 August 2011)

### Abstract

The complicated dynamical evolution of a circuit system composed of two Rayleigh-types subsystems, which are switched by a periodic switch and a threshold controller, is investigated. Through the analysis of the subsystem equilibrium points, the conditions for Fold bifurcation and Hopf bifurcation in the parameter space are given respectively. The distribution of the generalized Jacobian eigenvalues varying with auxiliary parameter at the switching boundary is presented. Then the possible bifurcation behaviors of the system at the switching boundary are obtained. The mechanisms of the different behaviors of the system are discussed. It is pointed that the trajectories of the system have two kinds of turning points, which are determined by the periodic switch and the threshold controller respectively. Meanwhile, the multiple collisions between the trajectories and the non-smooth boundary may lead the system to change from chaos to period-adding bifurcation.

**Keywords:** Rayleigh oscillator, switch, control threshold, non-smooth bifurcation

**PACS:** 05.45.-a; 84.30.-r

\* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 20976075, 10972091).

† E-mail: qbi@ujs.edu.cn