

波前编码系统的点扩散函数稳相法分析*

赵廷玉^{1)†} 刘钦晓²⁾ 余飞鸿²⁾

1) (浙江理工大学物理系, 杭州 310018)

2) (浙江大学光电系, 杭州 310027)

(2012 年 1 月 10 日收到; 2012 年 3 月 7 日收到修改稿)

本文利用稳相法从本质上分析了三次相位波前编码系统的点扩散函数特性. 通过分析三次相位板任意位置掩膜带和点扩散函数的关系, 指出点扩散函数和稳相点的关系: 两个稳相点引起点扩散函数的振荡, 一个稳相点则只会造成点扩散函数的平稳变化. 相位掩膜带或相位掩膜对的对称结构是同一区域内存在两个稳相点的必要条件, 对称结构的不同位置对应于点扩散函数的不同部分. 这种对应关系同时解释了对焦点扩散函数只存在振荡, 而离焦点扩散函数却还存在平缓变化区域的本质原因, 这是由离焦时光学对称轴和几何对称轴不重合引起的. 本文建立了点扩散函数和对称相位掩膜对之间的对应关系, 可以有效地指导相位掩膜的加工和检验.

关键词: 波前编码, 三次相位掩膜, 稳相法

PACS: 42.30.-d, 42.30.Kq, 02.30.Mv

1 引言

光数混合系统是一种包括光学编码和数字解码的两步成像系统. 它通过数字解码的手段来弥补光学设计的不足, 以突破传统光学设计的极限, 增加光学设计的自由度, 从而起到减少光学元件和提高成像性能的目的. 基于波前编码技术^[1-3]的景深延拓系统^[4]就是光数混合系统的典型应用之一. 通过在光瞳上安置特殊设计的相位掩膜可以将光学系统的焦深延拓至传统光学系统的 10 倍以上. 相比于减小通光孔径这种传统的景深延拓技术, 波前编码技术可以有效克服光通量降低和分辨率损失等负面影响. 相位掩膜的形式有很多^[5-8], 但三次相位掩膜作被认为是经典的掩膜, 一直是研究的热点. 尽管目前的研究已分析了三次相位掩膜波前编码系统的频域特性^[9,10]和空间域特性^[11], 然而这些研究集中于整块相位掩膜的作用, 并未涉及到相位掩膜的不同部分对整体成像性质的贡献. 本文将稳相法为工具, 从空间域的角度分析相位掩膜上的不同部分对点扩散函数 (point spread function, PSF) 的贡献, 这不仅可以帮助深入理解波前编码技术的本质, 而且对相位掩膜的加工具有积极的

指导意义.

2 相位掩膜带的 PSF 分析

假设在波前编码系统中采用的是矩形光瞳, 且相位掩膜形式为笛卡尔坐标可分离的, 那么该系统的光学传递函数和 PSF 也是笛卡尔坐标^[9,11]可分离的, 只需考虑一维情况即可.

设矩形光瞳的边长为 D , 则三次相位掩膜可以表示为

$$z = \alpha u^3, \quad |u| \leq \frac{D}{2}, \quad (1)$$

其中, α 为三次掩膜系数, u 为光瞳面上的坐标, 对于离焦量为 W_{20} 的波前编码系统, 那么其点振幅分布函数可以表示为^[12]

$$\tilde{U}(x, W_{20}) = \int_{-\frac{D}{2}}^{+\frac{D}{2}} \exp[j\mu(u)] du, \quad (2)$$

其中

$$\mu(u) = \alpha u^3 + kW_{20}u^2 - 2\pi xu. \quad (3)$$

x 为像面上的坐标, $j = \sqrt{-1}$, $k = 2\pi/\lambda$ 为波数, λ 为波长. 同时注意到 $\text{PSF}_h(x, W_{20})$ 为点振幅分布

* 浙江省自然科学基金 (批准号: Y1110455), 浙江省教育厅基金 (批准号: Y200909691) 和浙江理工大学科研启动基金 (批准号: 0913849-Y) 资助的课题.

† E-mail: zhaotingyu@zstu.edu.cn

函数 $\tilde{U}(x, W_{20})$ 的模的平方, 即

$$h(x, W_{20}) = \left| \tilde{U}(x, W_{20}) \right|^2. \quad (4)$$

$$= 3\alpha u_0^2 + 2kW_{20}u_0 - 2\pi x = 0, \quad (6a)$$

$$\mu''(u_0) \equiv \partial^2 \mu / \partial u^2 = 6\alpha u_0 + 2kW_{20} \neq 0, \quad (6b)$$

2.1 相位掩膜中任意区域的 PSF 分析

下面我们考虑相位掩膜中的任意区域对 PSF 的贡献. 假定该任意区域的中心位置为 p , 宽度为 Δ , 我们称之为相位掩膜带, 那么其产生的点振幅分布函数可以表示为

$$\tilde{U}(x, W_{20}) = \int_{p-\frac{\Delta}{2}}^{p+\frac{\Delta}{2}} \exp[j\mu(u)] du, \quad \Delta \leq D \text{ 且 } |p| \leq \frac{D-\Delta}{2}, \quad (5)$$

根据稳相法^[13,14], 当且仅当 (6) 式成立时, (5) 式才存在稳相点 u_0 .

$$\mu'(u_0) \equiv \partial \mu / \partial u$$

解方程 (6a) 得两个稳相点

$$u_{01} = \frac{-kW_{20} + \sqrt{(kW_{20})^2 + 6\pi\alpha x}}{3\alpha}, \quad u_{02} = \frac{-kW_{20} - \sqrt{(kW_{20})^2 + 6\pi\alpha x}}{3\alpha}. \quad (7)$$

欲使 (7) 式为实数解, 且满足 (6b) 式, 我们可得

$$x > -\frac{(kW_{20})^2}{6\pi\alpha}. \quad (8)$$

将 (7) 式代入到 (6c) 式中, 我们可得

$$\left\{ \begin{array}{ll} u_{01}, u_{02} \text{ 同时存在,} & \text{当 } -\frac{kW_{20}}{3\alpha} - \frac{\Delta}{2} < p < -\frac{kW_{20}}{3\alpha} + \frac{\Delta}{2} \\ & \text{且 } -\frac{(kW_{20})^2}{6\pi\alpha} < x < \min[T^-(p), T^+(p)]; \\ \text{仅存在 } u_{01}, & \text{当 } p > -\frac{kW_{20}}{3\alpha} \text{ 且 } T^-(p) \leq x \leq T^+(p); \\ \text{仅存在 } u_{02}, & \text{当 } p < -\frac{kW_{20}}{3\alpha} \text{ 且 } T^+(p) \leq x \leq T^-(p). \end{array} \right. \quad (9)$$

其中

$$T^-(p) = \frac{3\alpha(p - \Delta/2)^2 + 2kW_{20}(p - \Delta/2)}{2\pi}, \quad T^+(p) = \frac{3\alpha(p + \Delta/2)^2 + 2kW_{20}(p + \Delta/2)}{2\pi}. \quad (10)$$

下面来分析稳相点的个数对 PSF 的影响. 根据稳相法, 我们可以得到 (5) 式的近似表达式:

$$\tilde{U}(x, W_{20}) \approx \begin{cases} 0, & u_{01}, u_{02} \text{ 都不存在,} \\ f(u_{01}), & \text{仅存在 } u_{01}, \\ f(u_{02}), & \text{仅存在 } u_{02}, \\ f(u_{01}) + f(u_{02}), & \text{仅存在 } u_{01}, u_{02}, \end{cases} \quad (11)$$

其中

$$f(u) = \sqrt{\frac{2\pi}{|\mu''(u)|}} \exp\left(j \left\{ \mu''(u) + \frac{\pi}{4} \text{sgn}[\mu''(u)] \right\}\right),$$

$\text{sgn}(x)$ 为符号函数, $x > 0$ 时取 1, $x < 0$ 时取 -1, $x = 0$ 时取 0. 将 (7) 式和 (11) 式代入 (4) 式, 可得 PSF 的表达式:

$$h(x, W_{20}) \approx \begin{cases} 0, & u_{01}, u_{02} \text{ 都不存在,} \\ \frac{\pi}{\sqrt{(kW_{20})^2 + 6\pi\alpha x}}, & \text{仅存在 } u_{01} \text{ 或仅存在 } u_{02}, \\ \frac{2\pi}{\sqrt{(kW_{20})^2 + 6\pi\alpha x}} \left\{ 1 + \sin \left[\frac{4[(kW_{20})^2 + 6\pi\alpha x]^{3/2}}{27\alpha^2} \right] \right\}, & \text{存在 } u_{01}, u_{02}. \end{cases} \quad (12)$$

从 (12) 式可以看到, PSF 是否发生振荡是由稳相点的个数所决定的. 当不存在稳相点时, PSF 为 0; 当仅存在一个稳相点时, PSF 是平稳变化的曲线; 当同时存在两个稳相点时, PSF 发生振荡.

以带宽 $\Delta = 0.6$ 的任意区域为例, 稳相点的分布如图 1 所示, 图中浅灰色区域表示同时存在两个稳相点 u_{01} 和 u_{02} , 深灰色区域则仅存在一个稳相点 u_{01} 或 u_{02} , 白色区域表示不存在稳相点.

以带宽 $\Delta = 0.6$, 三次相位系数 $\alpha = 30\pi$, 离焦参数 $W_{20} = 5\lambda$ 为例进行分析. 结合图 1, 我们可以知道 PSF 可以根据稳相点个数不同分成三种情况.

1) 相位掩膜带的中心位置满足 $p = -(kW_{20})/(3\alpha)$, 以 $\Delta = 0.6$ 为例, 如图 2(a) 中粗实线所示. 从图 1 中可知此时的 PSF 非零区域存在两个稳相点, 对应于振荡部分如图 2(b) 粗实线所示, 上下限分别为 $-(kW_{20})^2/(6\pi\alpha)$ 和 $T^-(p)$ (此时 $T^-(p) = T^+(p)$).

2) 相位掩膜带的中心位置满足

$$|p + (kW_{20})/(3\alpha)| < \Delta/2 \text{ 且 } p \neq -(kW_{20})/(3\alpha),$$

以 $\Delta = 0.6, p = 0$ 为例, 如图 3(a) 中粗实线所示. 从图 1 可知, 此时的 PSF 非零区域分成两个部分: 一部分包含两个稳相点, 对应于图 3(b) 粗实线所示的振荡部分 (上下限分别为 $-(kW_{20})^2/(6\pi\alpha)$ 和 $T^-(p)$); 另一部分包含一个稳相点, 对应于图 3(b) 粗实线所示的平缓变化部分 (上下限分别为 $T^-(p)$ 和 $T^+(p)$).

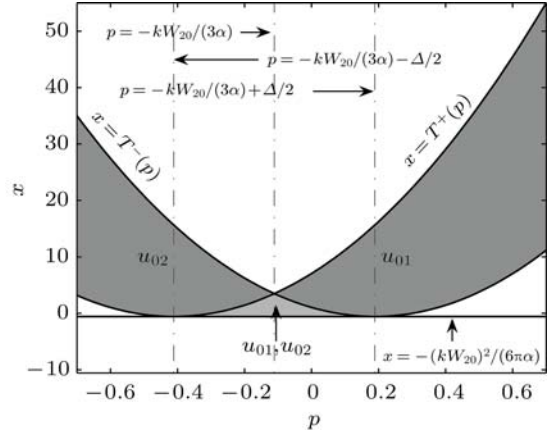


图 1 带宽 $\Delta = 0.6$ 时稳相点的分布示意图

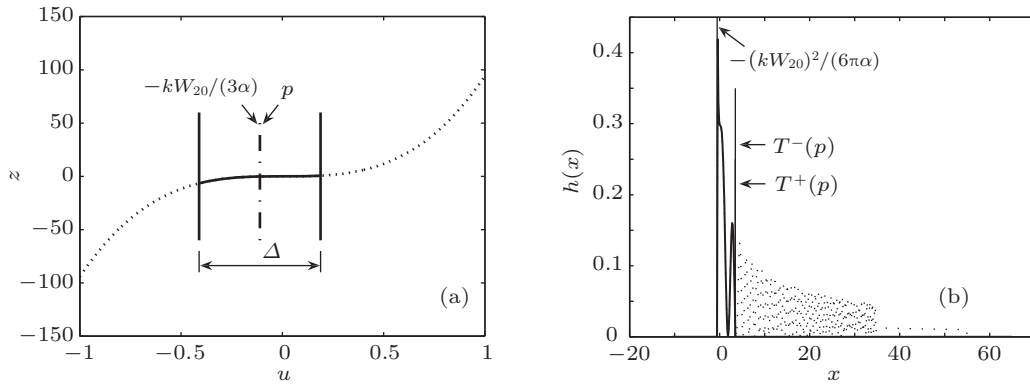


图 2 $\Delta = 0.6, p = -\frac{kW_{20}}{3\alpha}$ 时, (a) 相位掩膜带; (b) PSF

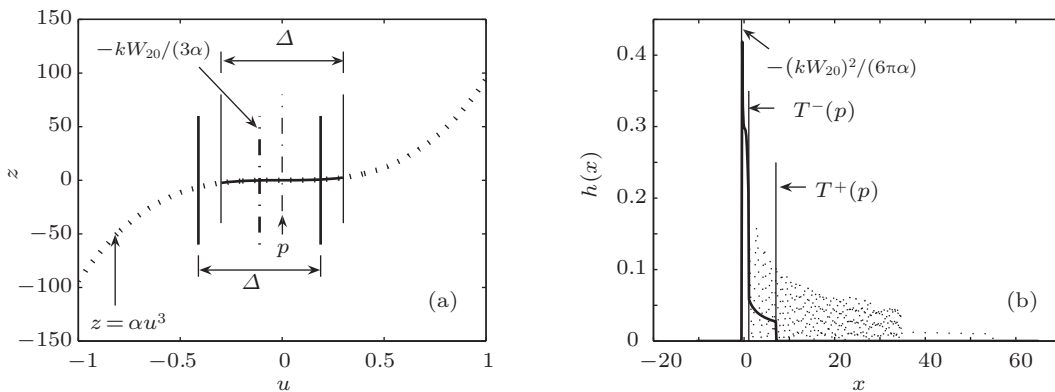


图 3 $\Delta = 0.6, p = 0$ 时, (a) 相位掩膜带; (b) PSF

3) 带状相位掩膜的中心位置满足 $|p + (kW_{20})/(3\alpha)| \geq \Delta/2$ 且 $|p| \leq (D - \Delta)/2$, 以 $\Delta = 0.6, p = 0.45$ 为例, 如图 4(a) 中粗实线所示. 从图 1 可知, 此时的 PSF 非零区域仅包含一个稳相点, 对应于图 4(b) 粗实线所示的平缓曲线, 上下限分别为 $T^-(p)$ 和 $T^+(p)$.

$$h(x, W_{20}) \approx \begin{cases} \frac{\pi}{\sqrt{(kW_{20})^2 + 6\pi\alpha x}}, & \frac{3\alpha D^2 - 4|kW_{20}|D}{8\pi} < x \leq \frac{3\alpha D^2 + 4|kW_{20}|D}{8\pi}, \\ \frac{2\pi \left\{ 1 + \sin \left[\frac{4}{27\alpha^2} [(kW_{20})^2 + 6\pi\alpha x]^{3/2} \right] \right\}}{\sqrt{(kW_{20})^2 + 6\pi\alpha x}}, & -\frac{(kW_{20})^2}{6\pi\alpha} < x \leq \frac{3\alpha D^2 - 4|kW_{20}|D}{8\pi}, \\ 0, & \text{其余情况.} \end{cases} \quad (13)$$

可见 PSF 由三部分组成, 第一部分仅包含了一个稳相点, 表现为平缓曲线; 第二部分包含了两个稳相点, 表现为振荡曲线; 第三部分未包含稳相点, 表现为 0. 将整体相位掩膜的 PSF 用图 2(b), 图 3(b), 图 4(b) 中的虚线表示作为对比. 可见, 相位掩膜带贡献的 PSF 可以是振荡变化的 (如图 2(b)), 也可以是平缓变化的 (如图 4(b)), 还可以是部分区域发生振荡, 部分区域平缓变化 (如图 3(b)). 但无论如何, 相位掩膜带贡献的 PSF 的振荡部分, 是整体相位掩膜对应的 PSF 的一部分, 这和 (12), (13) 式的表达结果是统一的.

若更特殊一点, 考虑对焦情况 $W_{20} = 0$, 则 (13) 式可简化为

$$h(x, 0) \approx \begin{cases} \frac{2\pi}{\sqrt{6\pi\alpha x}} \left\{ 1 + \sin \left[\frac{4(6\pi\alpha x)^{3/2}}{27\alpha^2} \right] \right\}, & 0 < x \leq \frac{3\alpha D^2}{8\pi}, \\ 0, & \text{其余情况.} \end{cases} \quad (14)$$

此时, PSF 由两部分组成, 第一部分包含了两个稳相点, 表现为振荡曲线; 第二部分未包含稳相点, 表现为 0. 可见, 对焦 PSF 仅存在振荡部分, 而不存在平缓变化曲线.

综上, 当且仅当一块带状相位掩膜位的中心位置 p 落于 $\left[-\frac{kW_{20}}{3\alpha} - \frac{\Delta}{2}, -\frac{kW_{20}}{3\alpha} + \frac{\Delta}{2} \right]$ 时才存在振荡, 其余位置均不会发生振荡. 即具有包含 $u = -(kW_{20})/3\alpha$ 对称结构的相位掩膜带才会伴随着 PSF 的振荡. 而根据之前的研究^[11], PSF

2.2 整体相位掩膜的 PSF 分析

若考虑整体相位掩膜这种特殊情况, 即相位掩膜带所处的中心位置 $p = 0$, 宽度 $\Delta = D$, 将这两个关系式以及 (9) 式代入 (12) 式, 可得

的大部分非零区域均存在振荡. 下面就 PSF 的振荡进行进一步的分析.

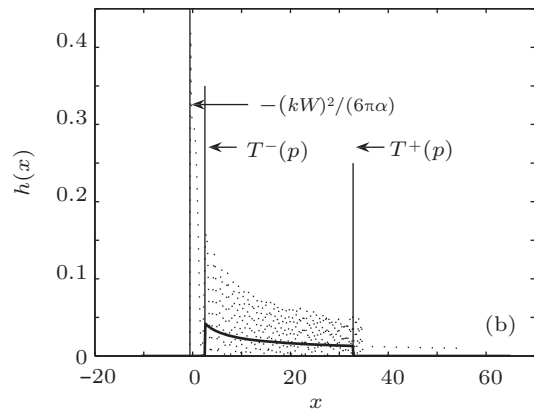
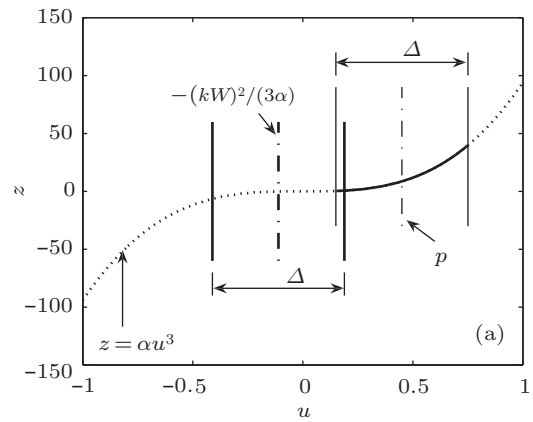


图 4 $\Delta = 0.6, p = 0.45$ 时, (a) 相位掩膜带; (b) PSF

3 对称结构的相位掩膜对的 PSF 分析

从上面的分析可知, 不具有对称结构的相位掩

膜带和相位掩膜对均无法产生振荡. 下面考虑两个具有相同宽度 Δ 的相位掩膜带 A 和 B, 其中心位置分别位于 p_1 和 p_2 , 假定

$$\begin{aligned} p_1 &> -\frac{kW_{20}}{3\alpha}, \\ p_2 &< -\frac{kW_{20}}{3\alpha}. \end{aligned}$$

那么若满足

$$\begin{aligned} T^-(p_1) &= T^+(p_2), \\ T^+(p_1) &= T^-(p_2). \end{aligned} \quad (15)$$

相位掩膜带 A 仅存在稳相点 u_{01} , B 仅存在稳相点 u_{02} , 此时它们存在稳相点的区域均为 $T^-(p_1) \leq x \leq T^+(p_1)$. 将相位掩膜带 A 和 B 看成整体, 它同时存在稳相点 u_{01} 和 u_{02} . 将 (10) 式代入 (15) 式, 得

$$\begin{aligned} p_1 + p_2 &= -\frac{2kW_{20}}{3\alpha}, \\ p_1 &\geq -\frac{kW_{20}}{3\alpha} + \frac{\Delta}{2}, \\ p_2 &\leq -\frac{kW_{20}}{3\alpha} - \frac{\Delta}{2}. \end{aligned} \quad (16)$$

相位掩膜关于 $u = -(kW_{20})/(3\alpha)$ 对称, 我们简称其为光学对称轴. 根据 (12) 式, 可得这对相位掩膜带构成的 PSF 为

$$\begin{aligned} h(x, W_{20}) &= \begin{cases} \frac{2\pi}{\sqrt{(kW_{20})^2 + 6\pi\alpha x}} \\ \times \left\{ 1 + \sin \left[\frac{4[(kW_{20})^2 + 6\pi\alpha x]^{3/2}}{27\alpha^2} \right] \right\}, & T^-(p_1) < x \leq T^+(p_1), \\ 0, & \text{其余情况.} \end{cases} \end{aligned} \quad (17)$$

如图 5(a) 粗实线所示的一关于 $u = -(kW_{20})/(3\alpha)$ 对称相位掩膜带, $\Delta = 0.1$, $p_2 = -0.75$, 其对应的 PSF 如图 5(b) 细实线所示. 同时, 我们给出了完整相位掩膜的 PSF 作为对比, 如图 5(b) 虚线所示. 可见这一相位掩膜对所贡献的 PSF (图中细实线所示) 是完整相位掩膜对应的 PSF (图中虚线所示) 的一部分. 也就是说, 整块相位掩膜对应的 PSF 可以看成是很多个对称相位掩膜对贡献的 PSF 的组合.

对比 (13) 和 (17) 式, 对称的相位掩膜对所产生的 PSF 始终是完整 PSF 中的一部分. 位置 p 和带宽 Δ 的变化仅带来非零部分取值范围发生变化.

我们改写 (10) 式中的 $T^-(p_1)$ 为

$$\begin{aligned} T^-(p_1) &= \frac{3\alpha}{2\pi} \left(p_1 - \frac{\Delta}{2} + \frac{kW_{20}}{3\alpha} \right)^2 \\ &\quad - \frac{(kW_{20})^2}{6\pi\alpha}. \end{aligned} \quad (18)$$

注意到 (16) 式中 $p_1 \geq -kW_{20}/(3\alpha) + \Delta/2$, 所以起始位置 $T^-(p_1)$ 是关于变量 $p_1 - \Delta/2$ 的单调递增函数. 非零部分的区域大小为

$$\begin{aligned} \Delta T &\equiv T^+(p_1) - T^-(p_1) \\ &= \frac{\Delta}{\pi} (3\alpha p_1 + kW_{20}). \end{aligned} \quad (19)$$

从上式可以看到, 非零部分的长度和带宽成正比, 随着中心位置的增大而增大.

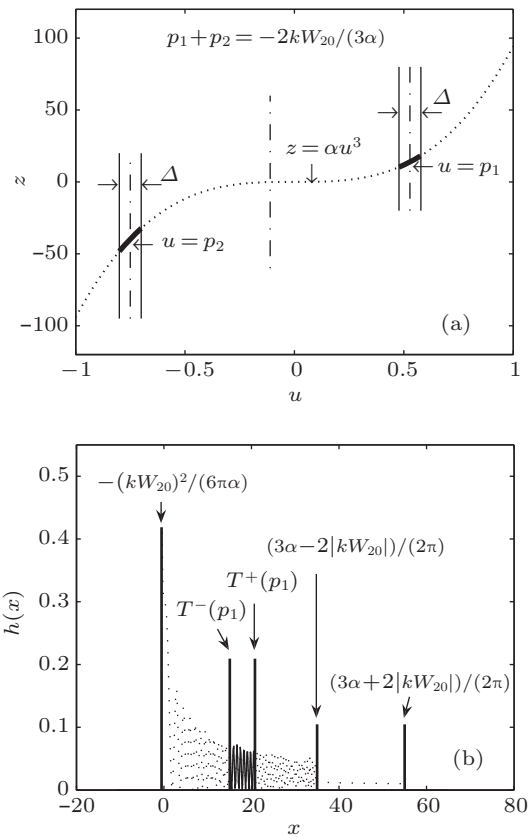


图 5 带宽 $\Delta = 0.1$, B 位于 $p_2 = -0.75$ 时, (a) 对称结构相位掩膜带; (b) PSF

从上面的分析可知, 对称结构的相位掩膜对和 PSF 各区域之间存在一一对应的关系. 这对三次相位掩膜加工和检验具有积极的指导意义. 比如加工相位掩膜时, 可以通过检测 PSF, 找出 PSF 发生缺陷的区域, 根据 (17) 式即快速判断出三次相位掩膜加工出现误差的区域.

另外, 值得注意的是, 由于离焦量 W_{20} 的存在, 使得对称轴 $u = -(kW_{20})/(3\alpha)$ 并不是相位掩膜的

几何对称中心 $u = 0$. 因此必定存在一个区域, 无法找到其对称区域, 如图 6 所示, 即在该区域中仅存在一个稳相点, 这一部分区域对 PSF 产生的贡献必定只能是平稳变化曲线, 如图 5(b) 中虚线平缓变化部分.

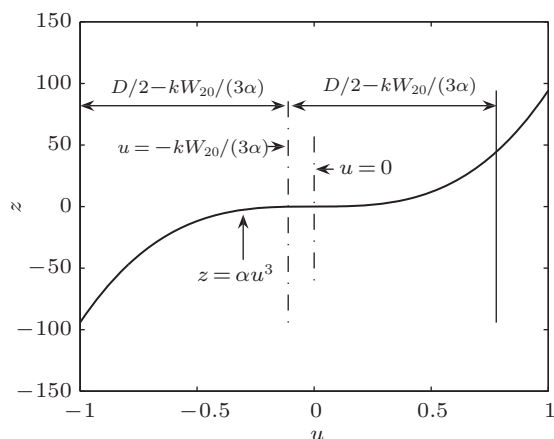


图 6 相位掩膜的几何结构关于 $u = -kW_{20}/(3\alpha)$ 的非对称性

4 结 论

本文利用稳相法分析了三次相位板任意位置的掩膜带的空间域特性, 指出了 PSF 发生振荡的本质原因是在同一区域内存在两个稳相点, 而仅存在一个稳相点只会造成 PSF 平稳变化而不会引起振荡. 理论分析表明: 只有包含以 $u = -kW_{20}/(3\alpha)$ 为轴的对称结构的相位掩膜带或掩膜对才能在同一区域内存在两个稳相点, 在 PSF 上表现为振荡曲线. 该对称结构的不同不同位置的直接对应于整体 PSF 的不同部分, 这对相位掩膜的加工和检验具有积极的指导意义. 同时也解释了对焦 PSF 只存在振荡, 而离焦 PSF 却还存在平缓变化区域的本质原因, 这是由于离焦时光学对称轴 $u = -kW_{20}/(3\alpha)$ 和几何对称轴 $u = 0$ 不重合引起的, 这时始终存在一块无法找到对称部分的区域, 造成了 PSF 的平缓变化.

- [1] Dowski E R, Cathey W T 1995 *Appl. Opt.* **34** 1859
- [2] Zhao T Y, Ye Z, Zhang W Z, Yu F H 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 200 (in Chinese) [赵廷玉, 叶子, 张文字, 余飞鸿 2008 物理学报 **57** 200]
- [3] Yun M J, Wan Y, Kong W J, Wang M, Liu J H, Liang W 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 194 (in Chinese) [云茂金, 万勇, 孔伟金, 王美, 刘均海, 梁伟 2008 物理学报 **57** 194]
- [4] Wang W, Zhou C H, Yu J J 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 024201 (in Chinese) [王伟, 周常河, 余俊杰 2011 物理学报 **60** 024201]
- [5] Zhao H, Li Y C 2010 *Opt. Lett.* **35** 267
- [6] Zhao H, Li Y C 2010 *Opt. Lett.* **35** 2630
- [7] Zhou F, Ye R, Li G W, Zhang H T, Wang D S 2009 *J. Opt. Soc. Am. A* **26** 1889
- [8] Yang Q G, Liu L R, Sun J F 2007 *Opt. Commun.* **272** 56
- [9] Muyo G, Harvey A R 2005 *Opt. Lett.* **30** 2715
- [10] Bagheri S, Silveria P E X, Farias D 2008 *J. Opt. Am. A* **25** 1051
- [11] Zhang W Z, Ye Z, Zhao T Y, Chen Y P, Yu F H 2007 *Opt. Exp.* **15** 1543
- [12] Zhuang S L, Qian Z B 1981 *Optical Transfer Function* (Beijing: China Machine Press) p276 (in Chinese) [庄松林, 钱振邦 1981 光学传递函数 (北京: 机械工业出版社) 第 276 页]
- [13] Born M, Wolf E 1980 *Principles of Optics* (Oxford: Pergamon) p747
- [14] Mandel L, Wolf E 1995 *Optical Coherence and Quantum Optics* (Cambridge: Cambridge University Press) p128

The point spread function analysis in a wavefront coding system based on stationary phase method*

Zhao Ting-Yu^{1)†} Liu Qin-Xiao²⁾ Yu Fei-Hong²⁾

1) (*Department of Physics, Zhejiang Sci-Tech University, Hangzhou 310018, China*)

2) (*Department of Optical Engineering, Zhejiang University, Hangzhou 310027, China*)

(Received 10 January 2012; revised manuscript received 7 March 2012)

Abstract

Wavefront coding system with a cubic phase mask is one of important methods to extend depth of the field. This paper analyzes the characteristics of the system based on stationary phase method in space domain. By analyzing the point spread function of an arbitrary strip of the cubic phase mask, this paper points out that two stationary phase points lead to oscillations in point spread function while one stationary phase point causes a smooth curve in point spread function. Theoretical analysis illustrates that the oscillations exist in point spread function if and only if there are symmetrical components about the optical symmetrical axis. Furthermore, different areas of the point spread function correspond to different positions of symmetrical components of the mask, which is useful in the manufacture and test of the cubic phase mask. In addition, the optical symmetrical axis does not coincide with the geometrical symmetrical axis in the defocused system, causing smooth curve in defocused point spread function. As a contrast, smooth curve can not be observed in focused point spread function because of the coincidence of the symmetrical axis and the geometrical symmetrical axis.

Keywords: wavefront coding, cubic phase mask, stationary phase method

PACS: 42.30.-d, 42.30.Kq, 02.30.Mv

* Project supported by the Zhejiang Provincial Natural Science Foundation of China (Grant No. Y1110455), the Scientific Research Fund of Zhejiang Provincial Education Department (Grant No. Y200909691), and the Science Foundation of Zhejiang Sci-Tech University (ZSTU) (Grant No. 0913849-Y).

† E-mail: zhaotingyu@zstu.edu.cn