

弯道交通流跟驰建模与稳定性分析*

张立东^{1)2)†} 贾磊¹⁾ 朱文兴¹⁾

1) (山东大学控制科学与工程学院, 济南 250061)

2) (山东省计算中心, 济南 250014)

(2011年9月30日收到; 2011年11月23日收到修改稿)

为发现弯道道路条件下交通流的演化特性及稳定条件, 在全速度差最优模型的基础上, 研究了弯道情况下的交通流跟驰模型表达式, 并以状态空间法和控制系统的稳定性判据对其进行了稳定性分析, 得到弯道情况下交通流的稳定条件, 最后进行了数值模拟, 验证了模型稳定条件的正确性. 研究结果表明在相同的初始交通流密度情况下, 弯道道路随着道路弧度的增大, 交通流稳定性逐渐降低.

关键词: 交通流模型, 跟驰模型, 弯道, 稳定性分析

PACS: 45.70.Vn, 05.45.-a

1 引言

自1935年Greenshields第一次研究交通流理论以来^[1], 该领域的研究逐渐发展为两大方向, 即宏观交通流模型^[2-7]和微观交通流模型^[8-20]. 典型微观交通流模型包括最优速度模型(OVM)^[8-16]和元胞自动机模型(CA)^[17]等. 1961年, Newell提出了微观最优速度模型, 将交通流视为相互作用的粒子群, 每辆车在以车间距为函数的最优速度模型下行驶^[8], 直至1995年, Bando通过Taylor展开式, 得到了最优速度模型的微分方程^[9,10]. 之后, Nagatani等人将微分形式转化为差分方程, 得到了最优速度模型的差分形式^[11]. Helbing等人针对OVM模型中加减速不理想的情况, 提出了GFM模型, 引入相对速度项, 能更好的描述车辆跟驰行为^[12]. 国内学者姜锐进一步扩展了GFM模型, 提出了FVDM模型, 考虑了跟驰车辆间负速度的变化, 使得模型能更好的刻画车辆的延迟和交通拥堵现象^[13]. 赵晓梅等人将加速度项引入全速度差方程, 探讨了新的FVDM方程的稳定性问题^[14]. Zhu等将车辆间的两两相互影响引入OVM模型, 提出了SOVF模型, 并对其进行了详细的线性和非线性分析^[15]. Yu等人探讨了延迟时间跟驰模型

的密度波变化问题^[16]. 雷丽等研究了考虑反应延迟系数的OVM模型密度波演化问题, 得出了反应时间的降低能促进交通流的稳定性^[17]. 葛红霞等人基于Konishi等人的研究工作, 提出了涉及前方车辆车头间距的优化速度函数的耦合映射跟驰模型^[18]. Zhou等人将次最近邻车辆的相互影响引入OVM模型, 提出了GOVM模型^[19]. 在弯道交通流研究领域, 梁玉娟等人基于单元胞自动机模型的交通流的特性, 得到了增大弯道曲率半径和弯道处的摩擦系数, 并尽量减少弯道弧度, 可以减少弯道处的交通事故, 避免拥堵的结论^[20].

前人的研究成果不断丰富和完善着交通流理论模型, 但针对弯道交通流的跟驰模型研究却较少见诸文献, 而实际交通中存在大量的道路弯道, 由此, 本文深入探讨了弯道交通流的演化趋势, 道路弧度对交通流特性的影响, 以及弯道情况下交通流稳定的条件问题.

2 弯道交通流跟驰模型

2.1 经典FVDM模型

在Bando经典最优速度跟驰模型^[9]基础上,

* 国家自然科学基金(批准号: 61174175), 山东省自然科学基金(批准号: Y2008G34), 中国博士后科学基金(批准号: 20100481265)和山东省博士后创新项目专项基金(批准号: 201102025)资助的课题.

† E-mail: zhanglidong1102@126.com

Jiang 等人提出了全速度差最优模型为^[13],

$$\ddot{x}_n(t) = a[V(\Delta x_n(t)) - \dot{x}_n(t)] + \lambda \cdot \Delta \dot{x}_n(t), \quad (1)$$

其中, a 为驾驶员灵敏度系数. $x_n(t)$ 表示第 n 辆车在时刻 t 所在的位置; $\Delta x_n(t) = x_{n+1}(t) - x_n(t)$ 为前导车 $n+1$ 与跟驰车 n 的速度差值, $\dot{x}_{n+1}(t) = v_{n+1}(t)$, $\dot{x}_n(t) = v_n(t)$, λ 为阶跃函数, 且由下式决定:

$$\lambda = \begin{cases} b, & \Delta x_n(t) \leq \Delta x_{\min}, \\ 0, & \Delta x_n(t) > \Delta x_{\min}. \end{cases} \quad (2)$$

由于该模型综合考虑了前后车辆间的车头间距和即时相对车速的影响, 更符合实际, 也成为继 Bando 的跟驰模型之后较为典型的基础模型之一, 本文正是在此模型基础上, 探讨了弯道全速度差最优模型的建模与稳定性问题.

2.2 弯道 FVDM 模型

文献 [20] 研究结果指出, 决定弯道对交通流影响的关键参数为弯道弧度 $\theta (0 \leq \theta \leq 2\pi)$, 弯道半径 γ 和路面摩擦系数 μ , 典型道路弯道如下图 1 所示.

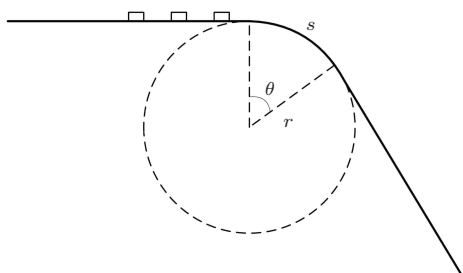


图 1 典型弯道路段示意图

在 2.1 节 FVDM 模型方程基础上, 引入驾驶员反应延迟时间 τ 和圆周运动的相关方程, 提出带延迟时间的弯道道路跟驰模型及最优速度模型如 (3) 式和 (3a) 式所示:

$$\ddot{\theta}_n(t + \tau) = \frac{a}{\gamma} \times [V(\gamma \times \Delta \dot{\theta}_n(t)) - \gamma \times \dot{\theta}_n(t)] + \lambda \times \Delta \dot{\theta}_n(t). \quad (3)$$

式中各符号含义如下:

$$V(\gamma \times \Delta \theta_n(t)) = \frac{\gamma \omega_{\max}}{2} \times (\tanh(\gamma \times \Delta \theta_n(t) - \gamma \times \theta_{\min}) + \tanh(\gamma \times \theta_{\min})), \quad (3a)$$

$$\theta_n(t) = \frac{x_n(t)}{\gamma}, \quad (3b)$$

$$\omega_{\max} = \frac{V_{\max}}{\gamma}, \quad (3c)$$

$$\theta_{\min} = \frac{h_c}{\gamma}, \quad (3d)$$

$$\Delta \theta_{\min} = \frac{\Delta x_{\min}}{\gamma}, \quad (3e)$$

$$\dot{\theta}_n(t) = \frac{1}{\gamma} \times \dot{x}_n(t) = \frac{1}{\gamma} \times v_n(t), \quad (3f)$$

$$\begin{aligned} \dot{\theta}_{n+1}(t) &= \frac{1}{\gamma} \times \dot{x}_{n+1}(t) \\ &= \frac{1}{\gamma} \times v_{n+1}(t), \end{aligned} \quad (3g)$$

$$\Delta(\dot{\theta}_n(t)) = \dot{\theta}_{n+1}(t) - \dot{\theta}_n(t), \quad (3h)$$

$$\lambda = \begin{cases} \frac{b}{r}, & \Delta \theta_n(t) \leq \Delta \theta_{\min}, \\ 0, & \Delta \theta_n(t) > \Delta \theta_{\min}. \end{cases} \quad (3i)$$

根据弯道处向心力计算公式^[20]

$$m \frac{V_{\max}^2}{\gamma} = \mu mg. \quad (4)$$

车辆行驶最大线速度为:

$$V_{\max} = \sqrt{\mu g \gamma}. \quad (5)$$

其最大角速度为

$$\omega_{\max} = \sqrt{\mu g / \gamma}. \quad (6)$$

实际中, 从驾驶安全角度考虑, 最高速度一般远小于理论速度极值, 故引入最高速度系数 $\kappa (0 < \kappa \leq 1)$, 得到修正最优速度

$$\begin{aligned} V(\gamma \Delta \theta_n(t)) &= \kappa \times \frac{\sqrt{\mu g \gamma}}{2} \times \left(\tanh(\gamma \right. \\ &\quad \times \Delta \theta_n(t) - \gamma \times \theta_{\min}) \\ &\quad \left. + \tanh(\gamma \times \theta_{\min}) \right). \end{aligned} \quad (7)$$

3 模型稳定性分析

首先给出弯道情况下交通流系统状态方程如下式:

$$\begin{aligned} \dot{\omega}_n(t + \tau) &= \frac{a}{\gamma} \times [V(\gamma \times \Delta \theta_n(t)) \\ &\quad - \gamma \times \omega_n(t)] + \lambda \times (\Delta \omega_n(t)), \end{aligned} \quad (8)$$

$$\Delta \dot{\theta}_n(t + \tau) = \omega_{n+1}(t) - \omega_n(t), \quad (9)$$

其中, $\omega_n(t)$ 表示队列中第 n 辆车在时刻 t 的角速度, 各计算公式如下:

$$\omega_n(t) = \dot{\theta}_n(t), \quad (9a)$$

$$\omega_{n+1}(t) = \dot{\theta}_{n+1}(t). \quad (9b)$$

且考虑到驾驶员在反应延迟时间 τ 内车辆速度并未改变, 因此,

$$\omega_n(t) = \omega_n(t + \tau). \quad (9c)$$

根据线性系统理论, 设系统的稳定状态如下所示:

$$[\omega^*(t), \Delta\theta^*(t)]^T = \left[\omega_0, \frac{V^{-1}(r\omega_0)}{\gamma} \right]^T. \quad (10)$$

列写 (8), (9) 式的状态空间方程表达式如下所示:

$$\begin{bmatrix} \frac{d\bar{\omega}_n(t+\tau)}{dt} \\ \frac{d[\Delta\bar{\theta}_n(t+\tau)]}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a - \lambda \frac{a}{\gamma} \Phi \\ -1 \quad 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \bar{\omega}_n(t) \\ \Delta\bar{\theta}_n(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \lambda \\ 1 \end{bmatrix} \times \bar{\omega}_{n+1}(t), \quad (11)$$

$$\bar{\omega}_n(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \bar{\omega}_n(t) \\ \Delta\bar{\theta}_n(t) \end{bmatrix}, \quad (12)$$

其中

$$\bar{\omega}_n(t + \tau) = \bar{\omega}_n(t) = \omega_n(t) - \omega_0, \quad (12a)$$

$$\bar{\omega}_{n+1}(t + \tau) = \bar{\omega}_{n+1}(t) = \omega_{n+1}(t) - \omega_0, \quad (12b)$$

$$\Delta(\bar{\omega}_n(t + \tau)) = \bar{\omega}_{n+1}(t) - \bar{\omega}_n(t), \quad (12c)$$

$$\Delta(\bar{\theta}_n(t)) = \Delta\theta_n(t) - V^{-1}(r\omega_0), \quad (12d)$$

$$\Delta(\bar{\theta}_n(t + \tau)) = \Delta\theta_n(t + \tau) - V^{-1}(r\omega_0), \quad (12e)$$

$$\Phi = \frac{dV(\gamma\Delta\theta_n(t))}{d(\Delta\theta_n(t))} \Big|_{\Delta\theta_n(t)=\frac{V^{-1}(r\omega_0)}{\gamma}}. \quad (12f)$$

经由 Laplace 变换, 系统的频域空间表达式为

$$W_n(s) = G_{11}(s) \times \Delta\Theta_n(s) + G_{12}(s) \times W_{n+1}(s), \quad (13)$$

$$\Delta\Theta_n(s) = \frac{1}{se^{s\tau}} \times [W_{n+1}(s) - W_n(s)]. \quad (14)$$

算子 $L(\cdot)$ 表示 Laplace 变换, (13), (14) 式中各符号含义如下:

$$W_n(s) = L(\bar{\omega}_n(t)), \quad (14a)$$

$$W_{n+1}(s) = L(\bar{\omega}_{n+1}(t)), \quad (14b)$$

$$\Delta\Theta_n(s) = L(\Delta(\bar{\theta}_n(t))), \quad (14c)$$

$$G_{11}(s) = \frac{\frac{a}{\gamma}\Phi}{se^{s\tau} + a + \lambda}, \quad (14d)$$

$$G_{12}(s) = \frac{\lambda}{se^{s\tau} + a + \lambda}. \quad (14e)$$

将 (14) 式代入 (13) 式, 消去 $\Delta\Theta_n(s)$ 后, 得到第 $(n+1)^{\text{th}}$ 车和第 n^{th} 车的速度约简为如下形式:

$$W_n(s) = G(s) \times W_{n+1}(s), \quad (15)$$

其中, 传递函数 $G(s)$ 由下式确定:

$$G(s) = \frac{a\Phi + se^{s\tau}\lambda\gamma}{rs^2e^{2s\tau} + \gamma(a + \lambda)se^{s\tau} + a\Phi} \approx \frac{a\Phi + \lambda\gamma s}{\gamma s^2 + \gamma(a + \lambda)s + a\Phi}. \quad (16)$$

$G(s)$ 的特征方程为

$$D(s) = \gamma s^2 + \gamma(a + \lambda)s + a\Phi. \quad (17)$$

根据控制理论中系统稳定性判据: 若系统稳定, 则系统传递方程的特征方程中各项系数均为正, 则有

$$\begin{aligned} r &> 0, \\ r(a + \lambda) &> 0, \\ a\Phi &> 0. \end{aligned} \quad (18)$$

显然, $\Phi > 0, a > 0, \lambda > 0, \gamma > 0$. 再者, 若系统稳定, 需满足 $\|G(s)\|_{\infty} \leq 1$, 经运算 (见附录 A), 得到系统的稳定性条件

$$\Phi \leq \gamma \times \left(\lambda + \frac{a}{2} \right). \quad (19)$$

至此, 弯道交通流跟驰模型的稳定性分析结束, 从公式中可以看出, 相比于直道交通流, 稳定条件中多了弯道半径项 γ .

4 数值模拟

4.1 稳定区域分析

根据 (19) 式, 以角位移为自变量, 以灵敏度系数 a 为因变量, 可得到如图 2 所示的交通流稳定区间.

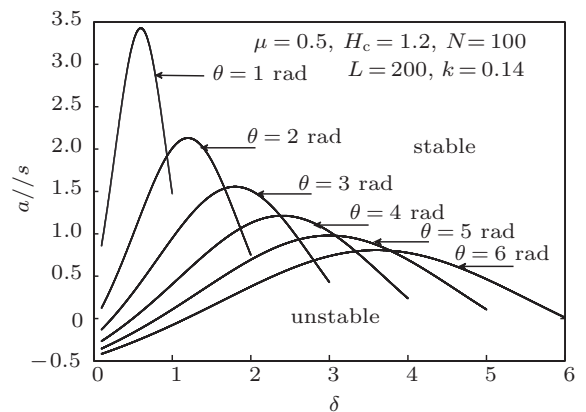


图2 弯道交通流稳定区域

图 2 中, 路面摩擦系数 $\mu = 0.5$, 安全车头间距为 $H_c = 1.2$ m, 车辆总数为 $N = 100$, 道路总长度为 $L = 200$ m, 道路弧度 θ 取值分别为 1, 2, 3, 4, 5, 6 rad; 弯道最大速度修正值 $k = 0.14$. 对应各个弧度 θ 的道路, 曲线下为交通流的不稳定区域 (unstable); 曲线上为交通流稳定区域 (stable). 可以看出, 随着道路弧度值的增大, 不稳定区域逐渐增大, 满足交通流稳定条件的驾驶员灵敏度系数逐渐减小. $\theta = 3$ rad (约为 172°) 时, a_0 约为 1.55, 驾驶员灵敏度临界值约为: 当 $a > a_0$ 时, 交通流稳定; 当 $a < a_0$ 时, 交通流不稳定, 下面的数值模拟也说明了这一现象.

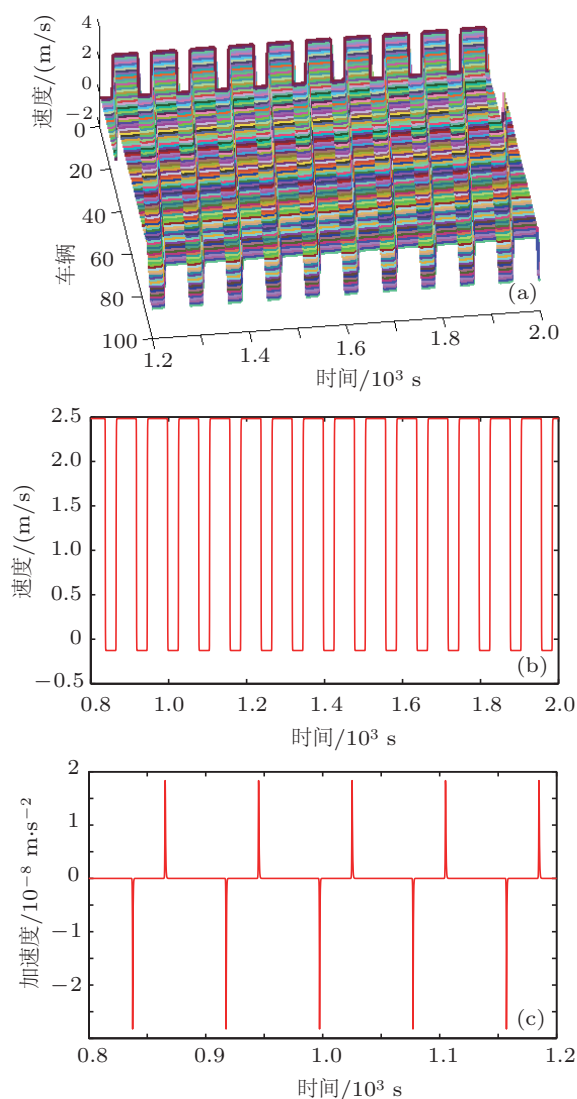


图 3 (a) 全车辆在 1200—2000 s 时的仿真结果; (b) 典型车辆 (第 50 辆车) 在 800—2000 s 的速度变化曲线; (c) 典型车辆 (第 50 辆车) 在 800—2000 s 的加速度变化曲线

4.2 模拟分析

设道路长度 $L = 200$ m、车辆数 $N = 100$ 辆,

稳态车流密度 $\rho = \frac{L}{N} = 2$ m, 道路弧度 $\theta = 3$ rad, 重力加速度 $g = 10 \text{ N} \cdot \text{s}^{-2}$, 道路摩擦系数 $\mu = 0.5$, 道路半径 $\gamma = \frac{L}{\theta} = (200/3) \text{ m}$, 速度差项 $b = 0.5$, $\Delta\theta_{\min} = \frac{6}{\gamma}$, $\omega_{\max} = \frac{2.74}{\gamma}$, 安全车头间距弧度 $\theta_{\min} = \frac{1.2}{\gamma}$, 驾驶员延迟时间 $\tau = 0.1$ s, 弯道道路速度系数 $\kappa = 0.15$. 以弧度表示的车流初始 (稳定) 车流密度 $\rho' = \frac{\theta}{N} = 0.03$ rad. 仿真车辆初始位置及扰动条件设置如下: $x_n(0) = \rho' \times n$, $n \neq \frac{N}{2}, n \neq \frac{N}{2} + 1$; $x_n(0) = \rho' \times n + \frac{\rho'}{3}$, 若 $n = \frac{N}{2}$; $x_n(0) = \rho' \times n - \frac{\rho'}{3}$, 若 $n = \frac{N}{2} + 1$.

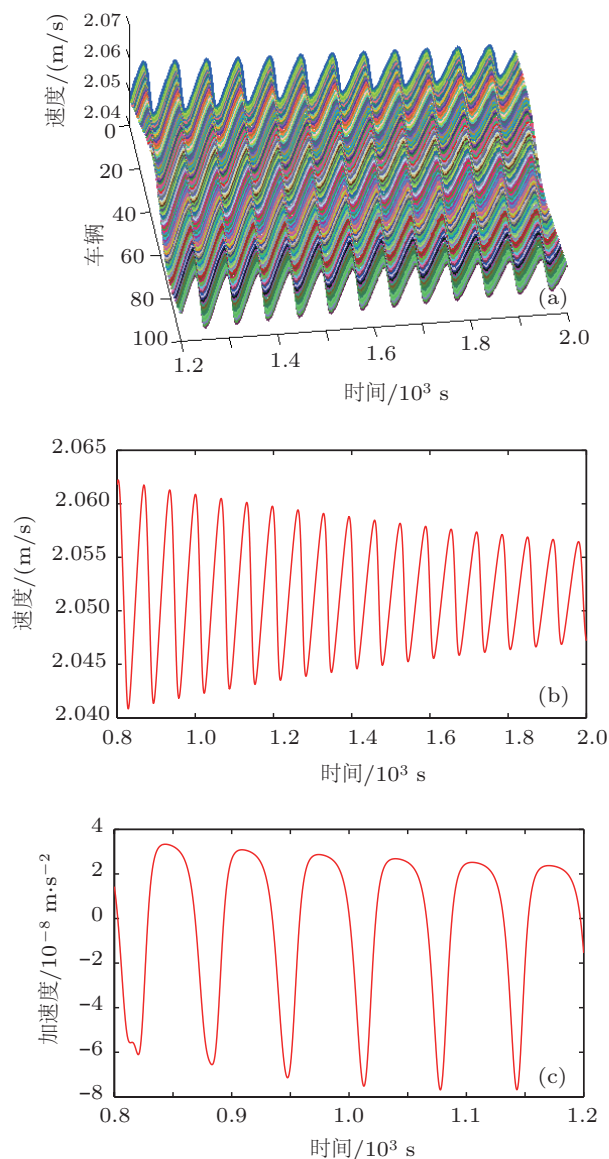


图 4 (a) 全车辆在 1200—2000 s 时的仿真结果; (b) 典型车辆 (第 50 辆车) 在 800—2000 s 的速度变化曲线; (c) 典型车辆 (第 50 辆车) 在 800—2000 s 的加速度变化曲线

4.2.1 不稳定交通流

根据稳定性条件的分析及图 2 的稳定性结果图表, 取 $\theta = 3$, $a = 1.5$, 进行仿真, 得到如图 3(a)—(c) 中所有车辆的速度波动曲线、典型车辆 (第 50 辆车) 的速度和加速度变化曲线. 从图 3(a)—(c) 中可以看出, 在车辆的速度、加速度等参数均呈现振荡特性, 即从一个极值变化到另一个极值的状态, 也即实际交通过程中的车辆走停现象, 出现了交通拥挤, 正与前面分析得到的交通流不稳定状态条件相符合.

4.2.2 稳定交通流

设道路弧度 $\theta = 3$ rad, 驾驶员灵敏度系数 $a = 3.5$, 其他参数与前同, 进行仿真, 如图 4(a)—(c) 所示的所有车辆速度曲线、典型车辆 (第 50 辆车) 的速度和加速度变化曲线. 从图 4(a)—(c) 可以看出, 交通流速度曲线振幅呈现出逐渐衰减的趋势, 加速度振幅也呈现出逐渐衰减的趋势, 总体上交通流逐渐趋于稳定状态, 也与前面稳定性的分析相符合.

5 结论

弯道道路是现实生活中普遍存在的一种现象, 因此研究其交通流的稳定性具有很强的实践意义. 通过上述研究, 得到结论如下: 弯道道路情况下, 交通流稳定的条件为 $\Phi \leq \gamma \times \left(\lambda + \frac{a}{2}\right)$; 弯道条件下的交通流跟驰模型与道路半径、曲率、摩擦系数等参数均相关, 在保持交通流初始密度不变的情况下, 随着道路弧度的增大, 影响交通流稳定性的驾驶员灵敏度系数逐渐减小, 交通流的稳定性条件比

直道情况下更加严格. 上述结论对在道路弯道处采取合理的管理措施有重要参考价值.

附录 A 模型稳定性推导

根据系统的稳定性条件

$$\|G(s)\|_{\infty} \leq 1, \quad (\text{A1})$$

令 $s = j\omega$, 得到

$$\begin{aligned} \|G(s)\|_{\infty} &= \sup_{\omega \in [0, +\infty]} |G(j\omega)| \\ &= \sup_{\omega \in [0, +\infty]} \sqrt{\frac{(a\Phi)^2 + (\lambda\gamma\omega)^2}{(a\Phi - \gamma\omega^2)^2 + (\gamma\omega(a + \lambda))^2}} \\ &\leq 1, \end{aligned} \quad (\text{A2})$$

可得

$$\frac{(a\Phi)^2 + (\lambda\gamma\omega)^2}{(a\Phi - \gamma\omega^2)^2 + (\gamma\omega(a + \lambda))^2} \leq 1, \quad (\text{A3})$$

即

$$\begin{aligned} (a\Phi)^2 + (\lambda\gamma\omega)^2 &\leq (a\Phi - \gamma\omega^2)^2 \\ &\quad + (\gamma\omega(a + \lambda))^2. \end{aligned} \quad (\text{A4})$$

整理后,

$$[\gamma\omega^2 + \gamma a^2 + 2a\lambda\gamma - 2a\Phi]\gamma\omega^2 \geq 0. \quad (\text{A5})$$

由此, 得到系统稳定的充分而不必要条件如下:

$$\begin{aligned} \gamma &\geq 0, \\ \gamma a^2 + 2a\lambda\gamma - 2a\Phi &\geq 0, \end{aligned} \quad (\text{A6})$$

即

$$\Phi \leq \gamma \times \left(\lambda + \frac{a}{2}\right). \quad (\text{A7})$$

- [1] Greenshields B D 1935 *Proc. Highway Research Board* **18** (Washington, DC: Highway Research Board) 448
- [2] Lighthill M J, Whitham G B 1955 *Proc. R. Soc. A* **229** 317
- [3] Prigogine I, Andrews F C 1960 *Oper. Res.* **8** 789
- [4] Schiavo M L 2002 *Mathematical and computer modeling* **35** 607
- [5] Serge P H, Piet H L 2000 *Tran. Res. B* **34** 123
- [6] Antoniou I, Ivanova V V, Yu L 2002 *Physica A* **308** 533
- [7] Zhao J Y, Sun X M, Jia L 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 2306 (in Chinese) [赵建玉, 孙喜明, 贾磊 2006 物理学报 **55** 2306]
- [8] Newell G F 1961 *Oper. Res.* **9** 209
- [9] Bando M, Hasebe K, Nakayama A, Shibata A Sugiyama Y 1995a *Phys. Rev. E* **51** 1035
- [10] Bando M, Hasebe K, Nakanishi K, Nakayama A, Shibata A Sugiyama Y 1995b *J. Phys. I (France)* **5** 1389

- [11] Nagatani T 1999 *Phys. Rev. E* **60** 6395
- [12] Dirk H, Benno T 1998 *Phys. Rev. E* **58** 133
- [13] Jiang R, Wu Q S, Zhu Z J, 2001 *Phys. Rev. E* **64** 1
- [14] Zhao X M, Gao Z Y 2007 *Physica A* **375** 679
- [15] Zhu W X, Jia L 2008 *Commun. Theor. Phys.* (Beijing, China) **50** 505
- [16] Yu L, Li T, Shi Z K 2010 *Physica A* **389** 2607
- [17] Lei L, Dong L Y, Song T, Dai S Q 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 1711 (in Chinese) [雷丽, 董力耘, 戴世强 2006 物理学报 **55** 1711]
- [18] Ge H X, Cheng R J, Li Z P 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 080508 (in Chinese) [葛红霞, 程荣军, 李志鹏 2011 物理学报 **60** 080508]
- [19] Zhou X H, Lü Y Z 2011 *Chin. Phys. B* **20** 014501
- [20] Liang Y J, Xue Y 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 5326 (in Chinese) [梁玉娟, 薛郁 2010 物理学报 **59** 5326]

Curved road traffic flow car-following model and stability analysis*

Zhang Li-Dong^{1)2)†} Jia Lei¹⁾ Zhu Wen-Xing¹⁾

1) (*Institute of Control Science and Engineering of Shandong University, Shandong, Jinan 250061, China*)

2) (*Shandong Computer Science Center, Shandong, Jinan 250014, China*)

(Received 30 September 2011; revised manuscript received 23 November 2011)

Abstract

To find the characteristics of curved road traffic flow, we propose a new car-following model based on the typical full velocity difference model, and analyze the model stability condition with system state space method and control system stability criteria. With numerical simulation, the stability and feasibility of the model are proved. Under the condition of same initialization traffic flow density, with the increase of road curve, traffic flow stability decreases. Our study is greatly helpful for traffic control and management at road curve site.

Keywords: traffic flow model, car-following model, curve road, stability analysis

PACS: 45.70.Vn, 05.45.-a

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No.61174175), and the Natural Science Foundation of Shandong Province, China (Grant No.Y2008G34), the Postdoctoral Science Foundation of China (Grant No. 20100481265), and the Special Foundation for Postdoctoral Innovation Program of Shandong Province (Grant No. 201102025).

† E-mail: zhanglidong1102@126.com