

任意 Atwood 数 Rayleigh-Taylor 和 Richtmyer-Meshkov 不稳定性气泡速度研究*

陶焯晟¹⁾ 王立锋¹⁾²⁾³⁾ 叶文华^{2)3)†} 张广财²⁾ 张建成⁴⁾ 李英骏^{1)‡}

1) (中国矿业大学(北京)深部岩土力学与地下工程国家重点实验室, 北京 100083)

2) (北京应用物理与计算数学研究所, 北京 100088)

3) (北京大学应用物理与技术研究中心, 北京 100871)

4) (北京林业大学, 北京 100083)

(2010年12月22日收到; 2011年5月29日收到修改稿)

本文将 Layzer 气泡模型推广到任意界面 Atwood 数情形, 得到了自洽的微分方程组. 该模型描述了气泡从早期的指数增长阶段到气泡以渐近速度上升的非线性阶段的发展过程, 给出了 Rayleigh-Taylor(RT) 和 Richtmyer-Meshkov(RM) 不稳定性的二维和三维气泡速度渐近解, 还求出了二维和三维 RT 不稳定性气泡顶点附近速度的解析解.

关键词: Rayleigh-Taylor 不稳定性, Richtmyer-Meshkov 不稳定性, Atwood 数, 非线性

PACS: 52.57.Fg, 52.35.Py, 47.20.Ma

1 引言

由加速场驱动的界面不稳定性叫 Rayleigh-Taylor(RT) 不稳定性^[1]、激波驱动的不稳定性叫 Richtmyer-Meshkov(RM) 不稳定性^[2]. RT 和 RM 不稳定性是惯性约束核聚变(ICF) 研究的重要内容, 是影响 ICF 点火的关键因素, 也是众多天体物理问题的重要过程^[3-10].

RT 和 RM 不稳定性的线性增长阶段, 已有大量的研究工作. 随着振幅的变大 ($k\eta \sim 1$) 谐波被激发, 流体界面形成气泡和尖顶“结构”, 且“气泡和尖顶”结构不断发展. 在 RT 和 RM 不稳定性的非线性阶段, 由于问题的复杂性, 气泡速度还不是很清楚, 还缺乏好的理论. 在非线性的后期, RT 不稳定性的气泡运动趋于定常状态并以恒定的速度 U_b 增长, 而 RM 不稳定性的非线性后期, 气泡速度则是随时间衰减的^[11-13]. 在 ICF 内爆的加速阶段, RT 和 RM 不稳定性气泡运动速度是影响内爆速度

的关键因素, 由于内爆速度与 ICF 点火驱动能量的六次方成反比, 进而气泡运动速度对于确定点火驱动能量要求至关重要, 在 ICF 内爆的减速阶段, RT 和 RM 不稳定性的气泡运动速度影响中心点火热斑的形成, 是 ICF 点火研究的重要因素, RT 和 RM 不稳定性的气泡运动速度也是天体物理研究的重要内容.

RT 和 RM 气泡不稳定性的气泡运动速度弱非线性理论给出了非线性阶段时期界面的气泡增长速度. 人们对弱非线性理论问题进行了大量的讨论^[6,14-18], 然而对不稳定性强非线性阶段了解的比较少. 对于大密度比的流体界面 ($A_T = 1$) 情况, Layzer^[19] 提出了适用于气泡顶点附近的速度势模型, 成功地描述了单模 RT 气泡在整个过程中的发展行为. 基于 Layzer 模型, Goncharov^[11] 和 Sung-Ik Sohn^[13] 发展了任意 A_T 数下的速度势模型. 对于三维情况下的 RT, RM 不稳定性, Abarzhi 等人找到了气泡(尖顶)的大尺度相干运动的非线性多重调

* 国家重点基础研究发展计划(973项目)(批准号: 2007CB815100)和国家自然科学基金(批准号: 10935003, 10775020, 11074300, 10874242和11075024)资助的课题.

† E-mail: lyj@aphy.iphys.ac.cn

‡ E-mail: ye_wenhua@iapcm.ac.cn

和解^[20]. 在上面提到的三种模型中, Goncharov 的模型与数值模拟符合得最好^[21]. 基于 Goncharov 的理论^[11], Mikaelian 把 $\eta_0 = \eta(t = 0)$ 取特定值, 获得对于任意 A_T 数二维、三维情况下的 $\eta(t)$ 的精确的表达式^[22]. 同样, 基于 Layzer 的模型, 对于大密度比界面 ($A_T = 1$) 的情况, Stefano Atzeni^[12] 把坐标系建立在气泡顶点上, 构造了速度势并建立了新的模型, 成功地描述了单模 RT 气泡在整个过程中的发展行为.

2 二维情况下的 RT, RM 不稳定性气泡理论

假设两种无旋、不可压缩、无黏性的流体, 存在一个由重流体指向轻流体的外加速度 g . 如图 1 所示, y 轴选择为密度梯度方向. 在实验室坐标系中: 速度势 ϕ 遵守 Laplace 方程

$$\Delta\phi = \partial_x^2\phi + \partial_y^2\phi = 0. \quad (1)$$

另外, 在流体界面 $y = \eta(x, t)$ 函数必须满足下面的压力和法向速度连续条件:

$$\partial_t\eta + v_x^h\partial_x\eta = v_y^h, \quad (2)$$

$$[[v_y - v_x\partial_x\eta]] = 0, \quad (3)$$

$$\left[\left[\rho\left(\partial_t\phi + \frac{1}{2}v^2 + g\eta\right)\right]\right] = f(t), \quad (4)$$

这里, $[[Q]] = Q^h - Q^l$, 上标 h 和 l 分别表示重流体和轻流体的变量, $f(t)$ 是一个关于时间的任意函数.

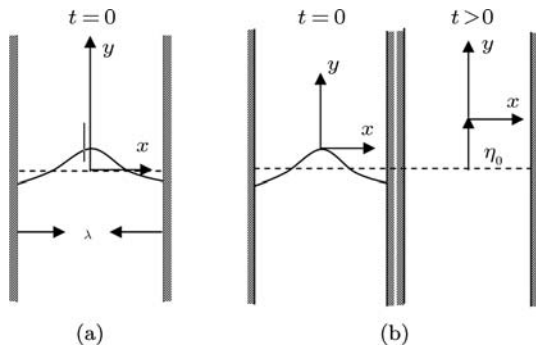


图 1 虚线为没有扰动时的流体界面, 上面为重流体下面为轻流体, 由 $y = \eta(x, t)$ 确定气泡的形状, λ 为扰动波长 (a) 实验室坐标系, y 轴通过气泡顶点、方向竖直向上, x 轴与界面重合、方向水平向右, 取气泡顶点为坐标原点、坐标轴分别与实验室坐标系中的坐标轴平行、方向相同建立运动坐标系; (b) 动坐标系, 整个系统随着气泡运动

如图 1 所示, 以气泡的顶点为坐标原点, 对应的坐标轴分别与实验室坐标系中的坐标轴平行、方向相同建立动坐标系, $\eta_0(t)$ 为气泡顶点到没有

扰动时的界面的高度. 由力学知识知: $\mathbf{a} = \mathbf{a}_0 + \mathbf{a}'$ 其中 \mathbf{a} 为绝对加速度, \mathbf{a}' 为相对加速度, \mathbf{a}_0 是牵连加速度. 这里 $\mathbf{a} = g$, g 为重力加速度、方向竖直向下, $\mathbf{a}_0 = -\ddot{\eta}_0(t)$, 得 $\mathbf{a}' = g + \ddot{\eta}_0(t)$, 则在动坐标系中的 Bernoulli 方程为

$$\left[\left[\rho\left(\partial_t\phi + \frac{1}{2}v^2 + (g + \ddot{\eta}_0)\eta\right)\right]\right] = f(t). \quad (5)$$

在动坐标系中, 位于气泡顶点 ($x = y = 0$) 的纵向速度 $u_y = 0$, 流体界面仍用 $y = \eta(x, t)$ 描述, (1), (2), (3), (5) 式为控制方程. 在气泡顶点附近我们分别取轻(重)流体的速度势为

$$\phi^h = a_1(t) [\cos(kx) e^{-ky} - 1] + a_1(t) ky, \quad (6)$$

$$\phi^l = b_1(t) [\cos(kx) e^{ky} - 1] + b_2(t)y, \quad (7)$$

由速度势求出对应的速度满足边界条件: 当 $x = \pm\lambda/2$, 则 $u_x^h = 0, u_x^l = 0$; 当 $x = y = 0$, 则 $u_y^h = 0$; 无穷远处重流体的速度

$$\lim_{y \rightarrow \infty} u_y^h = ka_1(t) = -\dot{\eta}_0. \quad (8)$$

气泡顶点界面的形状取抛物线近似

$$\eta = \eta_2(t)x^2, \quad (9)$$

函数 $\eta_2(t)$ 与气泡曲率 R 有关 $R = -1/(2\eta_2)$.

将方程 (6), (7) 代入控制方程 (2), (3), (5), 在气泡顶点附近以 x 为小量展开到二阶并考虑到边界条件 (8) 式和界面方程 (9) 式得

$$\ddot{\eta}_2 = -\frac{1}{2}k(k + 6\eta_2)\dot{\eta}_0, \quad (10)$$

$$\begin{aligned} & \ddot{\eta}_0 \frac{k^2 - 4A_T k \eta_2 - 12A_T \eta_2^2}{2(k - 6\eta_2)} \\ & + \dot{\eta}_0^2 k^2 \frac{(4A_T - 3)k^2 + 6(3A_T - 5)k\eta_2 + 36A_T\eta_2^2}{2(k - 6\eta_2)^2} \\ & + A_T g \eta_2 = 0. \end{aligned} \quad (11)$$

以上的微分方程与 Goncharov 的理论^[11] 结果相符.

方程 (10) 可以直接积分. 设初始扰动为余弦扰动、振幅为 $\eta_0(0)$ 得

$$\eta_2(t) = -\frac{k}{6} + \left[\frac{k}{6} - \frac{1}{2}k^2\eta_0(0)\right] e^{-3k[\eta_0(t) - \eta_0(0)]}, \quad (12)$$

当 $t \rightarrow \infty$ 时, $k\eta_0(t) \gg 1, \ddot{\eta}_0 \rightarrow 0$, 由方程 (12), (11) 得气泡的渐近速度

$$\eta_2 \rightarrow -\frac{k}{6}, \quad U_b \rightarrow \sqrt{\frac{2A_T g}{1 + A_T 3k}}. \quad (13)$$

当 $A_T = 1$ 时, $U_b \rightarrow \sqrt{g/3k}$ 与 Stefano Atzeni 的理论 [12] 结果相同. 令 v 为实验室坐标系中的气泡速度, 结合方程 (12) 得

$$\begin{aligned} \frac{d^2\eta_0}{dt^2} &= \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{d\eta_2} \frac{d\eta_2}{dt} = 2v \frac{dv}{d\eta_2} \frac{d\eta_2}{dt} \frac{1}{2v} \\ &= \frac{dv^2}{d\eta_2} \frac{d\eta_2}{dt} \frac{1}{2v} = \frac{dv^2}{d\eta_2} \left[-\frac{3}{2}k \left(\eta_2 + \frac{k}{6} \right) \right], \end{aligned}$$

将此式代入方程 (11) 式得

$$\begin{aligned} \frac{dv^2}{d\eta_2} - \frac{4k(-3k(k+10\eta_2) + 2A_T(2k^2 + 9k\eta_2 + 18\eta_2^2))}{(k-6\eta_2)(k+6\eta_2)(k^2 - 4A_T\eta_2(k+3\eta_2))} v^2 \\ - \frac{8gA_T(k-6\eta_2)\eta_2}{k(k+6\eta_2)(k^2 - 4A_T\eta_2(k+3\eta_2))} = 0. \quad (14) \end{aligned}$$

由方程 (14) 式得二维情况气泡顶点附近速度的解析表达式

$$\begin{aligned} v &= \left[G(\eta_2(t)) - G(\eta_2(0)) + \frac{v_0^2}{Q(\eta_2(0))} \right]^{1/2} \\ &\quad \times Q(\eta_2(t))^{1/2}, \quad (15) \\ G(\eta_2(t)) - G(\eta_2(0)) &= \int_{\eta_2(0)}^{\eta_2(t)} \frac{1}{(-k+6\eta_2)^{5/3} k} \left(8\eta_2(k+6\eta_2)^{-\frac{5+3A_T}{3+A_T}} \right. \\ &\quad \left. \times B(\eta_2(t))^{\frac{2+\frac{4}{3}A_T}{3+A_T}} gA_T e^{H(\eta_2(t))} \right) d\eta_2, \\ Q(\eta_2(t)) &= (k+6\eta_2)^{\frac{2}{3+A_T} + \frac{2A_T}{3+A_T}} B(\eta_2(t))^{-\frac{5}{3+A_T} - \frac{7}{3} \times \frac{A_T}{3+A_T}} \\ &\quad \times (-k+6\eta_2)^{8/3} e^{J(\eta_2(t))}, \\ B(\eta_2(t)) &= -k^2 + 4A_T\eta_2k + 12A_T\eta_2^2, \\ H(\eta_2(t)) &= -\frac{10}{3} \frac{kA_T \operatorname{arctanh} \left(\frac{A_T(k+6\eta_2)}{\sqrt{A_Tk^2(3+A_T)}} \right)}{\sqrt{A_Tk^2(3+A_T)}}, \\ J(\eta_2(t)) &= \frac{10}{3} \frac{kA_T \operatorname{arctanh} \left(\frac{A_Tk + 6A_T\eta_2}{\sqrt{3A_Tk^2 + k^2A_T^2}} \right)}{\sqrt{3A_Tk^2 + k^2A_T^2}}, \end{aligned}$$

这里, v_0 为初始速度.

把本模型应用到 RM 不稳定性, 在方程 (11) 中取 $g \rightarrow 0$, 得气泡渐近速度

$$U_{RM} = \frac{3 + A_T}{3(1 + A_T)} \frac{1}{kt}. \quad (16)$$

图 2 为二维情况下对于不同 A_T 数的气泡发展

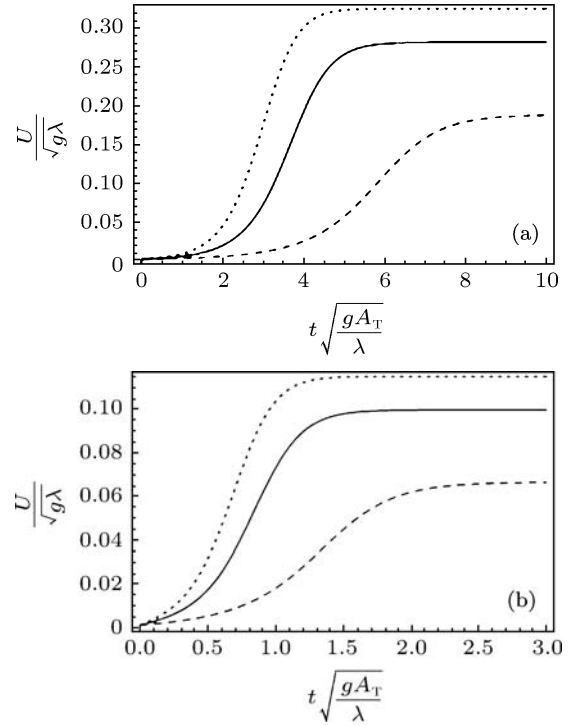


图 2 初始条件为 $g = 1$, $\eta_0(0) = 0.001\lambda$, $v_0 = 0.001\sqrt{g\lambda}$, 不同 A_T 数情况下气泡的发展曲线, 圆点代表 $A_T = 1$ 的情况, 实线代表 $A_T = 0.6$ 的情况, 虚线代表 $A_T = 0.2$ 的情况 (a) $k = \pi\frac{1}{\lambda}$; (b) $k = 8\pi\frac{1}{\lambda}$

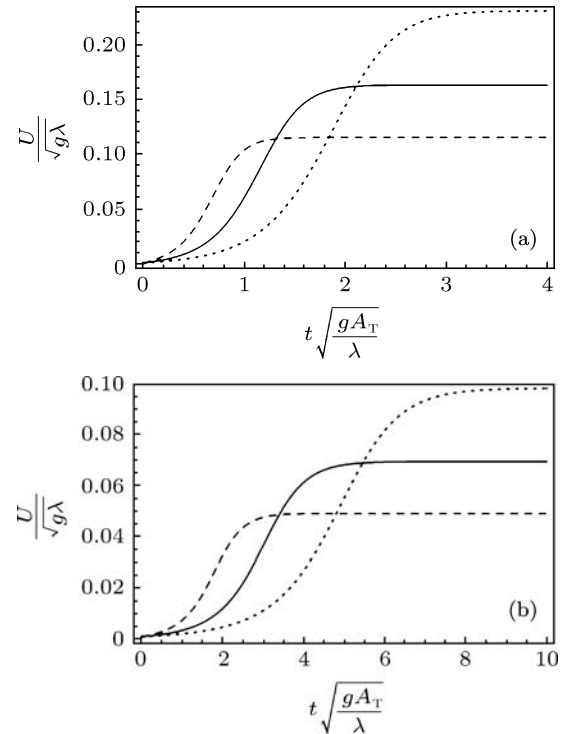


图 3 初始条件为 $g = 1$, $\eta_0(0) = 0.001\lambda$, $v_0 = 0.001\sqrt{g\lambda}$, 不同扰动波数情况下气泡的发展曲线, 圆点代表 $k = 2\pi\frac{1}{\lambda}$ 的情况, 实线代表 $k = 4\pi\frac{1}{\lambda}$ 的情况, 虚线代表 $A_T = 8\pi\frac{1}{\lambda}$ 的情况 (a) $A_T = 1$; (b) $A_T = 0.1$

曲线的对比, 初始条件为 $g = 1, \eta_0(0) = 0.001\lambda, \nu_0 = 0.001\sqrt{g\lambda}$, 在线性阶段 ($\nu \sim \eta_0\gamma e^{\gamma t}, \gamma = \sqrt{A_T k g}$ ^[1]) 气泡的 A_T 数越小其速度也就越小. 但二维气泡的渐近速度 ($U_b \rightarrow \sqrt{\frac{2A_T g}{1 + A_T 3k}}$) 随着 A_T 数的增大而增大. 若其它的初始条件不变, 扰动波数 k 不同 (如图 3 所示), 在线性区气泡速度 $\nu \sim \eta_0\gamma e^{\gamma t}, \gamma = \sqrt{A_T k g}$ 随着波数 k 增大而增大, 而在非线性区的气泡渐近速度为 $U_b \rightarrow \sqrt{\frac{2A_T g}{1 + A_T 3k}}$ 随着 k 的增大而减小.

3 三维情况下的 RT, RM 不稳定性气泡理论

把 Z 轴选择为密度梯度方向, 假设气泡是以 Z 轴为对称轴的旋转曲面, 以气泡的顶点为坐标原点. 在气泡顶点附近我们分别取轻 (重) 流体的速度势为

$$\phi^h = a(t) [J_0(kr) e^{-kz} - 1] + a(t) kz, \quad (17)$$

$$\phi^l = b_1(t) [J_0(kr) e^{kz} - 1] + b_2(t) z, \quad (18)$$

这里, $J_0(x)$ 为零阶 Bessel 函数. 将方程 (17), (18) 代入控制方程, 并在气泡顶点以 x 为小量展开到二阶并考虑到边界条件和界面方程得

$$\eta_2(t) = -\frac{k}{8} + \left[\frac{k}{8} + \eta_2(0) \right] e^{-2k(\eta_0(t) - \eta_0(0))}, \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \ddot{\eta}_0 & \frac{(k^2 - 4A_T\eta_2(k + 8\eta_2))}{4(k - 8\eta_2)} \\ & + \dot{\eta}_0^2 \frac{k^2 [-4k(k + 12\eta_2) + A_T(5k^2 + 32k\eta_2 + 64\eta_2^2)]}{8(k - 8\eta_2)^2} \\ & + gA_T\eta_2 = 0, \end{aligned} \quad (20)$$

微分方程 (19), (20) 与 Goncharov 理论^[11] 在三维情况得出的结果完全相符. 当 $t \rightarrow \infty$ 时, $k\eta_0(t) \gg 1, \dot{\eta}_0 \rightarrow 0$, 得三维情况气泡的渐近速度

$$\begin{aligned} \eta_2(t \rightarrow \infty) & \rightarrow -\frac{k}{8}, \\ U_b^{3D}(\infty) & = \sqrt{\frac{2A_T g}{1 + A_T k}}. \end{aligned} \quad (21)$$

令 v_{3D} 为实验室坐标系中三维情况下的气泡速度, 结合方程 (19) 得

$$\begin{aligned} \frac{d^2\eta_0}{dt^2} & = \frac{dv_{3D}}{dt} = \frac{dv_{3D}}{d\eta_2} \frac{d\eta_2}{dt} \\ & = \frac{dv_{3D}^2}{d\eta_2} \left[-k \left(\eta_2 + \frac{k}{8} \right) \right], \end{aligned}$$

将此式代入方程 (20) 得

$$\begin{aligned} & \frac{dv_{3D}^2}{d\eta_2} - \\ & \frac{4k(-4k(k + 12\eta_2) + A_T(5k^2 + 32k\eta_2 + 64\eta_2^2))}{(k^2 - 64\eta_2^2)(k^2 - 4A_T\eta_2(k + 8\eta_2))} v_{3D}^2 \\ & - \frac{32gA_T(k - 8\eta_2)\eta_2}{k(k + 8\eta_2)(k^2 - 4A_T\eta_2(k + 8\eta_2))} = 0. \end{aligned} \quad (22)$$

由方程 (22) 式求出三维情况气泡顶点附近速度的解析表达式

$$\begin{aligned} v_{3D} & = \left[G_{3D}(\eta_2(t)) - G_{3D}(\eta_2(0)) + \frac{v_{3D-0}^2}{Q_{3D}(\eta_2(0))} \right]^{1/2} \\ & \times Q_{3D}(\eta_2(t))^{1/2}, \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} & G_{3D}(\eta_2(t)) - G_{3D}(\eta_2(0)) \\ & = \int_{\eta_2(0)}^{\eta_2(t)} \frac{1}{(-k + 8\eta_2)^{3/2} k} \left[32(k + 8\eta_2)^{-\frac{3}{2} - \frac{1}{2}A_T} \right. \\ & \quad \left. \times B_{3D}(\eta_2(t))^{\frac{1}{2} + \frac{1}{4}A_T} gA_T\eta_2 e^{H_{3D}(\eta_2(t))} \right] d\eta_2, \\ & Q_{3D}(\eta_2(t)) \\ & = (k + 8\eta_2)^{\frac{1}{2} + \frac{A_T}{2}} B_{3D}(\eta_2(t))^{-\frac{3}{2} - \frac{A_T}{4}} \\ & \quad \times (-k + 8\eta_2)^{5/2} e^{J_{3D}(\eta_2(t))}, \\ & B_{3D}(\eta_2(t)) \\ & = -k^2 + 4A_T\eta_2k + 32A_T\eta_2^2, \\ & H_{3D}(\eta_2(t)) \\ & = \frac{\left(-5 + \frac{1}{2}A_T \right) kA_T \arctan h \left(\frac{A_T(k + 16\eta_2)}{\sqrt{A_T k^2(8 + A_T)}} \right)}{\sqrt{A_T k^2(8 + A_T)}}, \\ & J_{3D}(\eta_2(t)) \\ & = \frac{\left(5 - \frac{1}{2}A_T \right) k \arctan h \left(\frac{1}{4} \frac{4A_T k + 64A_T\eta_2}{\sqrt{8A_T k^2 + k^2 A_T^2}} \right) A_T}{\sqrt{8A_T k^2 + k^2 A_T^2}}, \end{aligned}$$

这里, v_{3D-0} 为初始速度.

在方程 (20) 中取 $g \rightarrow 0$, 得三维情况下 RM 不稳定性气泡渐近速度

$$U_{RM}^{3D} = \frac{2}{1 + A_T} \frac{1}{kt}. \quad (24)$$

我们绘制了 RT 气泡幅度与时间的图像 (图 4(a)), 本模型展示的气泡幅度发展趋势与文献 [22,23] 所给的 RT 气泡幅度发展趋势一致, 并且在整个发展过程中, 本模型描述的三维气泡幅度比二维的发展快. 文献 [23] 中提到初始幅度较小、线性阶段的 RT 气泡幅度公式 — $h(t) = h_0 \cosh(\Gamma t)$

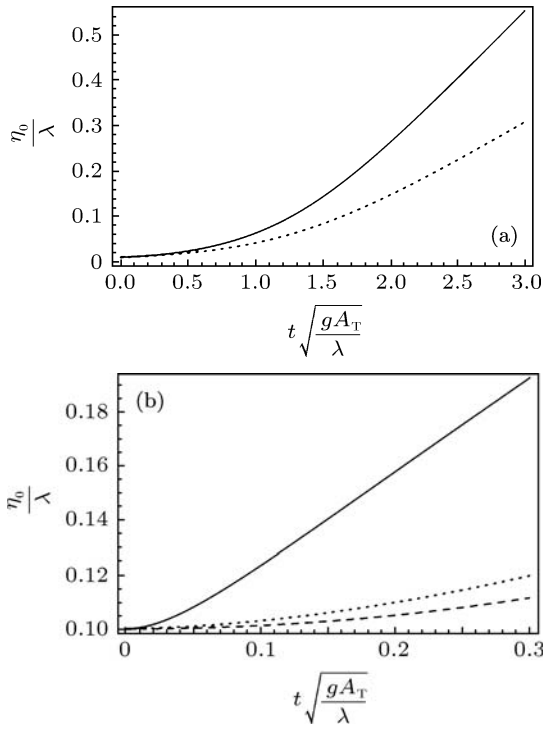


图4 (a) $g = 1$, $\eta_0(0) = 0.01\lambda$, $\nu_0 = 0.01\sqrt{g\lambda}$, $A_T = 0.4$, $k = 2\pi\frac{1}{\lambda}$ 时, 二、三维情况下 RT 气泡幅度与时间图像, 圆点代表二维的情况, 实线代表三维的情况; (b) $g = 1$, $\eta_0(0) = 0.1\lambda$, $\nu_0 = 0.01\sqrt{g\lambda}$, $A_T = 0.4$, $k = 2\pi\frac{1}{\lambda}$ 时, 线性阶段 RT 气泡幅度与时间图像, 圆点代表二维的情况, 实线代表三维的情况, 虚线代表式 $h(t) = h_0 \cosh(\Gamma t)$ 的曲线

(其中, $h(t)$ 为气泡幅度, h_0 为初始幅度, $\Gamma = \sqrt{A_T g k}$), 图 4(b) 展示了在线性阶段, RT 气泡幅度以指数增长 [22], 式 $h(t) = h_0 \cosh(\Gamma t)$ 的曲线与本模型二维情况的曲线符合较好, 但三维情况的气泡幅度与其他两种情况上升的都要快. RT 气泡曲率只与气泡的初始幅度 ($\eta_0(0)$) 和波数 (k) 有关, 从气泡曲率与幅度的图像 (图 5) 中可以看出: 气泡从开始到以渐近速度上升之前, 曲率一直在减小, 气泡以渐近速度上升阶段曲率为一定值, 结合 (13), (21) 式很容易求出二维的恒定曲率为 $\frac{3}{k}$ 、三维的为 $\frac{4}{k}$. 无论是在二维还是三维情况下, 线性区域的 RT 气泡增长速度都为 $\nu \sim \eta_0 \gamma e^{\gamma t}$ ($\gamma = \sqrt{A_T k g}$), 如果初始条件相同, 线性区域的三维、二维的气泡速度发展曲线相互重合 (图 6), 但非线性区域的三维气泡的发展速度要比二维的快. 二维 RT 气泡的渐近速度为 $U_b \rightarrow \sqrt{\frac{2A_T}{1+A_T} \frac{g}{3k}}$, 三维 RT 气泡的渐近速度为 $U_b^{3D}(\infty) = \sqrt{\frac{2A_T}{1+A_T} \frac{g}{k}}$, 图 6 显示三维 RT 气泡的渐近速度比二维 RT 气泡的渐近速度大 $\sqrt{3}$ 倍. 图 7 所示, 初始条件为 $k = 2\pi$, $g = 1$ 的情况下, 三维 RT 气泡的渐近速度相对于不同 A_T 数的增长要

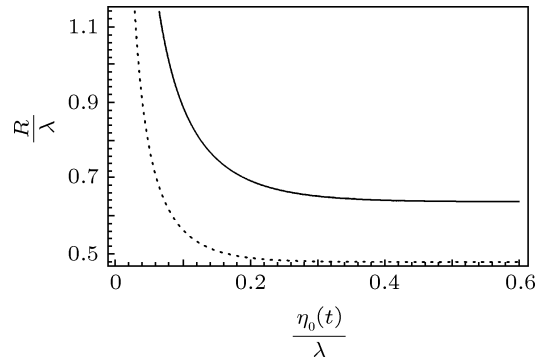


图5 初始条件为 $\eta_0(0) = 1.0 \times 10^4 \lambda$, $k = 2\pi\frac{1}{\lambda}$, RT 气泡曲率与幅度的图像, 圆点代表二维的情况, 实线代表三维的情况

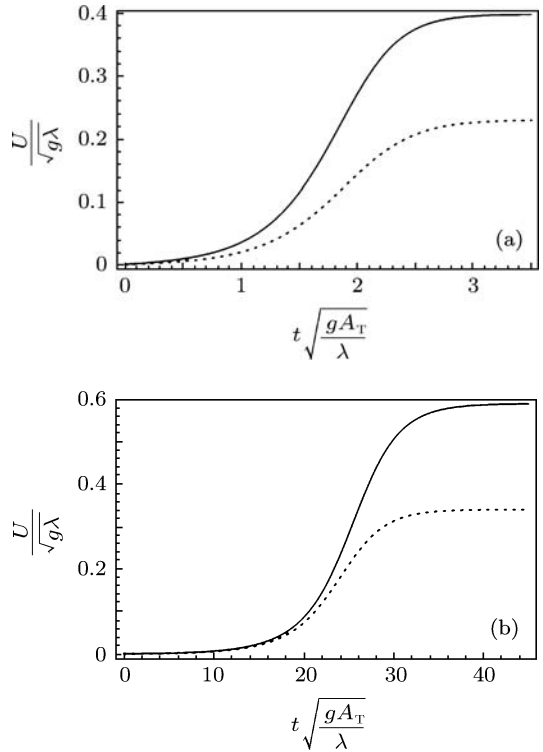


图6 初始条件为 $g = 1$, $\eta_0(0) = 0.001\lambda$, $\nu_0 = 0.001\sqrt{g\lambda}$, 二、三维情况下气泡发展曲线的对比, 圆点代表二维的情况, 实线代表三维的情况 (a) $A_T = 1$, $k = 2\pi\frac{1}{\lambda}$; (b) $A_T = 0.1$, $k = \frac{\pi}{6}\frac{1}{\lambda}$

比二维情况的快. RT 气泡的渐近速度相对扰动波数 k 为减函数 (初始条件为 $A_T = 0.4$, $g = 1$), 并且二维 RT 气泡要比三维 RT 气泡下降得快 (图 8). RM 气泡的渐近速度在二维情况下为 $U_{RM} = \frac{3+A_T}{3(1+A_T)} \frac{1}{kt}$, 三维情况下为 $U_{RM}^{3D} = \frac{2}{1+A_T} \frac{1}{kt}$, 气泡渐近速度与时间 t 成反比, 在初始条件相同的情况下, 二维的 RM 气泡的渐近速度比三维 RM 气泡的渐近速度下降得快 (图 9). 无论 RT 气泡的渐近速度还是 RM 气泡的渐近速度, 它们都与初始条件无关.

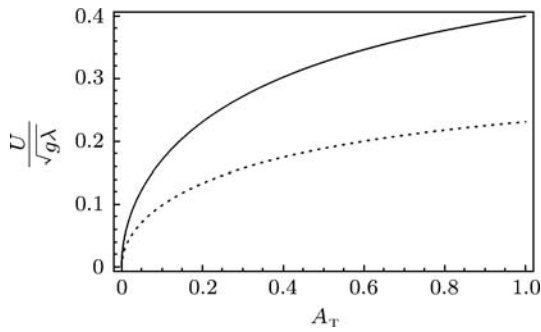


图7 初始条件为 $k = 2\pi\frac{1}{\lambda}$, $g = 1$ 的二维、三维情况下, RT 气泡渐近速度相对于不同 A_T 数的对比. 二维情况的用点表示, 三维情况的用实线表示

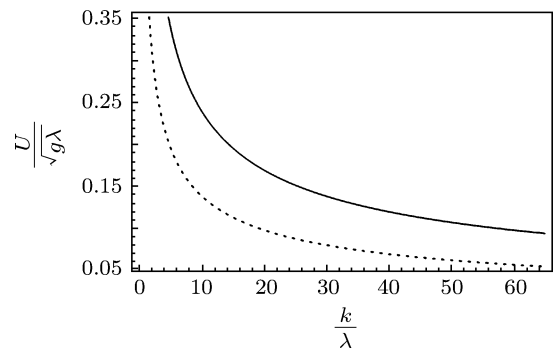


图8 初始条件为 $A_T = 0.4$, $g = 1$ 的二维、三维情况下, RT 气泡的渐近速度相对于不同波数的对比. 二维情况的用点表示, 三维情况的用实线表示

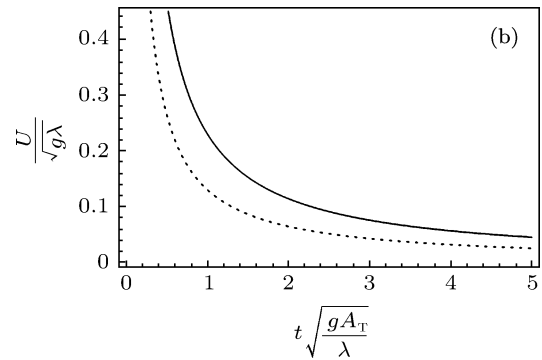
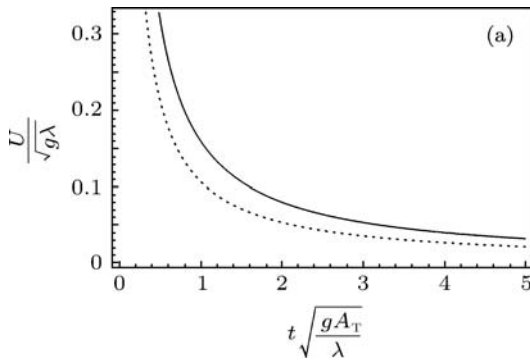


图9 二维、三维情况下, RM 气泡渐近速度的对比. 二维情况的用点表示, 三维情况的用实线表示 (a) 为 $A_T = 1$, $k = 2\pi\frac{1}{\lambda}$ 的情况; (b) 为 $A_T = 0.4$, $k = 2\pi\frac{1}{\lambda}$ 的情况

4 结论

本文将 Layzer 的气泡模型推广到任意 A_T 数的情况, 得出了描述气泡发展自洽的微分方程组.

进而得到了 RT 和 RM 不稳定性气泡速度的渐近解, 并且求出了在二维和三维情况下, RT 气泡顶点附近速度的解析解.

- [1] Lord Rayleigh 1900 *Scientific Papers* (Vol. II) (Cambridge, England: Cambridge University Press) p200
- [2] Richtmyer R D 1960 *Commun Pure Appl. Math.* **13** 297
- [3] Ye W H, Zhang W Y, He X T 2002 *Phys. Rev. E* **65** 57401
- [4] Lindl J D, Amendt P, Berger R L, Glendinning S G, Glenzer S H, Haan S W, Kauffman R L, Landen O L, Suter L J 2004 *Phys. Plasmas* **11** 339
- [5] Committee on High Energy Density Plasma Physics Plasma Science Committee Board on Physics and Astronomy Division on Engineering and Physical Sciences 2001 *Frontiers in High Energy Density Physics* (Washington DC: Academic)
- [6] Wang L F, Ye W H, Li Y J 2010 *Chin. Phys. Lett.* **27** 025202
- [7] Ye W H, Zhang W Y, He X T 2000 *Acta Phys. Sin.* **49** 762 (in Chinese) [叶文华, 张维岩, 贺贤士 2000 物理学报 **49** 726]
- [8] Wang L F, Ye W H, Li Y J 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 3038 (in Chinese) [王立锋, 叶文华, 李英骏 2008 物理学报 **57** 3038]
- [9] Wang L F, Ye W H, Li Y J, Meng L M 2008 *Chin. Phys. B* **17** 3792
- [10] Wang L F, Ye W H, Sheng Z M, Don W S, Li Y J, He X T 2010 *Physics of Plasmas* **17** 122706
- [11] Goncharov V N 2002 *Phys. Rev. Lett.* **88** 134502
- [12] Stefano Atzeni 2003 *Inertial Fusion Beam plasma interaction, hydrodynamics, dense plasma physics* (Oxford: Clarendon Press) p286
- [13] Sung-Ik Sohn 2003 *Phys. Rev. E* **67** 26301
- [14] Wang L F, Ye W H, Fan Z F, Li Y J 2010 *EPL* **90** 15001
- [15] Jacobs J W, Catton I 1988 *J. Fluid Mech.* **187** 329
- [16] Wang L F, Ye W H, Li Y J 2010 *Physics of Plasmas* **17** 042103
- [17] Wang Li Feng, Ye W H, Li Y J 2010 *Chin. Phys. Lett.* **27** 025203
- [18] Wang L F, Ye W H, Li Y J 2010 *Physics of Plasmas* **17** 052305
- [19] Layzer D 1955 *Astrophys. J.* **122** 1
- [20] Abarzhi S I, Nishihara K, Glimm J 2003 *Phys. Lett. A* **317** 470
- [21] Ramaprabhu P, Guy Dimonte 2005 *Phys. Rev. E* **71** 036314
- [22] Karning O, Mikaelian 2003 *Phys. Rev. E* **67** 026319
- [23] Ramaprabhu P, Guy Dimonte, Young Y N, Calder A C, Fryxell B 2006 *Phys. Rev. E* **74** 066308

The bubble velocity research of Rayleigh-Taylor and Richtmyer-Meshkov instabilities at arbitrary Atwood numbers*

Tao Ye-Sheng¹⁾ Wang Li-Feng¹⁾²⁾³⁾ Ye Wen-Hua^{2)3)‡} Zhang Guang-Cai²⁾
Zhang Jian-Cheng⁴⁾ Li Ying-Jun^{1)†}

1) (State Key Laboratory for GeoMechanics and Deep Underground Engineering, China University of Mining and Technology, Beijing 100083, China)

2) (Institute of Applied Physics and Computational Mathematics, Beijing 100088, China)

3) (Center for Applied Physics and Technology, Peking University, Beijing 100871, China)

4) (Beijing Forestry University, Beijing 100083, China)

(Received 22 December 2010; revised manuscript received 29 May 2011)

Abstract

We generalize the Layzer's bubble model to the cases of two-dimensional and three-dimensional analytical models of an arbitrary interface Atwood number and obtain self-consistent equations. The generalized model provides a continuous bubble evolution from the earlier exponential growth to the nonlinear regime. The asymptotic bubble velocities are obtained for the Rayleigh-Taylor(RT) and Richtmyer-Meshkov(RM) instabilities. We also report on the two-dimensional and the three-dimensional analytical expressions for the evolution of the RT bubble velocity.

Keywords: Rayleigh-Taylor instability, Richtmyer-Meshkov instability, Atwood number, nonlinear

PACS: 52.57.Fg, 52.35.Py, 47.20.Ma

* Project supported by the National Basic Research Program of China(973 Program)(Grant No. 2007CB815100), and The National Natural Science Foundation of China (Grant No. 10935003, 10775020, 11074300, 10874242, 11075024).

† E-mail: lyj@aphy.iphy.ac.cn

‡ E-mail: ye_wenhua@iapcm.ac.cn