

费米超流气体的非线性 Landau-Zener 隧穿*

王文元 蒙红娟 杨阳 祁鹏堂 马云云 马莹 段文山†

(西北师范大学物理与电子工程学院, 甘肃省原子分子物理与功能材料重点实验室, 兰州 730070)

(2011年7月13日收到; 2011年8月26日收到修改稿)

在平均场近似下, 通过对相平面和不动点的分析, 研究了非线性两能级系统中费米超流气体的 Landau-Zener 隧穿现象. 研究发现, 费米子间的相互作用能够显著地影响量子隧穿. 当相互作用参数 c 小于临界值 c^* 时, 在绝热极限下隧穿仍然满足量子绝热定理, 而大于这一临界值时, 量子绝热定理不再满足. 最后通过和线性情况比较, 得到了 $c < c^*$ 时隧穿率与扫描速率间满足的指数关系.

关键词: 费米超流气体, Landau-Zener 隧穿, 量子绝热隧穿

PACS: 73.40.Gk, 03.65.-w, 03.75.Lm

1 引言

激光冷却技术的发展使得玻色-爱因斯坦凝聚 (BEC) 得以实现^[1], 此后人们在实验和理论上对它进行了很多有意义的研究^[2-7]. 而通过配对的费米子能够具有单自旋玻色子的性质, 在温度很低的时候, 它能够形成和玻色子类似的凝聚体, 类似于 BEC. 科研人员对超流费米凝聚体具有的很多量子现象也做了深入的研究^[8-13].

Landau-Zener 隧穿效应是超流费米凝聚体具有的一个有趣的量子现象, 它描述一个系统在外场驱动下相邻能级间的量子隧穿. 这种隧穿相当普遍地存在于各类系统中, 并有广泛的应用^[14-16]. 双势阱为研究这种隧穿现象提供了一个很好的模型, 利用该模型人们已经发现了 BEC 的许多量子现象, 如非线性稳定态的存在^[17]、非线性 Josephson 振荡和自俘获现象^[18]、强耦合周期驱动^[19]以及两阱间的 Landau-Zener 隧穿现象^[14]等.

本文采用双势阱模型, 在平均场近似下, 从费米超流气体的基本理论出发介绍了费米超流气体所满足的基本动力学方程, 通过对相图和不动点分析研究了两阱间的能级差对相图以及不动点的影

响, 还从 Landau-Zener 隧穿的基本理论出发研究了费米超流气体的非线性 Landau-Zener 隧穿现象. 研究发现, 在量子绝热极限下, 当相互作用参数 c 大于一临界值 c^* 时, 量子绝热定理不再满足, 而当相互作用参数 c 小于这一临界值时, 其隧穿满足量子绝热定理. 最后给出了隧穿率与扫描速率之间的关系.

2 非线性两模模型

在温度很低的极限情况下, 含有大量粒子的费米超流气体系统满足如下一维无量纲化动力学方程^[20,21]:

$$\left[-\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x) + \mu(n, a) - i \frac{\partial}{\partial t} \right] \Psi(x, t) = 0, \quad (1)$$

其中, $V(x) = \frac{1}{2}x^2 + A \exp(-kx^2)$ 描述了系统的囚禁势, m 为费米对的质量, μ 为费米系统的化学势, $\Psi(x, t)$ 为描述超流费米气体的波函数. 上述处理中利用了谐振子无量纲化单位 ($\hbar = \omega = m = 1$), 所有的长度都用 $\sqrt{\hbar/(m\omega)}$ 无量纲化, 时间用 ω^{-1} 无量纲化, 波函数 Ψ 用 \sqrt{N} 无量纲化.

本文中考虑费米超流气体在 x 正区域 ($a_{sc} \gg 1$, a_{sc} 为费米超流气体的 s 波散射长度). 对于费米

* 国家自然科学基金 (批准号: 10725521, 91021021, 10875098), 国家重点基础研究发展计划 (批准号: 2007CB814800, 2011CB921503) 和西北师范大学自然科学基金 (批准号: NWNNU-KJXCXG-03-48) 资助的课题.

† E-mail: duanws@nwnu.edu.cn

气体的化学势, 近几年有关学者已经作了很好的研究 [22-24], 本文选择化学势满足如下方程 [23]:

$$\mu = \frac{3}{5}\xi \left(\frac{\lambda n}{\pi}\right)^{2/3}, \quad (2)$$

其中, 无量纲化参数 $\xi = 13.37^{[24]}$, 无量纲化参数 λ 体现了外部势阱的强度和宽度, 它的取值范围远大于 1 [24].

采用两模近似 [24-26], 波函数写为如下形式:

$$\Psi(x, t) = \psi_1(t)\phi_1(x) + \psi_2(t)\phi_2(x). \quad (3)$$

这里, $\phi_{1,2}$ 分别为两个阱的态函数, 它们满足归一化条件

$$\int \phi_i(x)\phi_j(x)dx = \delta_{ij};$$

$\psi_{1,2}(t)$ 满足

$$|\psi_{1,2}(t)|^2 = N_{1,2}(t),$$

其中 $N_{1,2}(t)$ 分别为两阱中的粒子数. 把方程 (3) 代入方程 (1), 并对空间波函数积分, 我们得到 $\psi_{1,2}(t)$ 满足 [23]

$$i\dot{\psi}_1 = \frac{\gamma}{2}\psi_1 + UN_1^{2/3}\psi_1 - k\psi_2, \quad (4)$$

$$i\dot{\psi}_2 = -\frac{\gamma}{2}\psi_2 + UN_2^{2/3}\psi_2 - k\psi_1. \quad (5)$$

(4), (5) 两式中, γ 为两阱能级差, k 为两阱间的耦合系数.

$$U = (3\xi/5)(\lambda/\pi)^{2/3} \int |\phi_i|^{1/3} dx$$

表征了费米子之间的相互作用.

把波函数写为 $\psi_{1,2} = \sqrt{N_{1,2}} \exp(i\theta_{1,2})$, 引入布居数差 $s = \frac{N_2 - N_1}{N}$ 和相对相位 $\theta = \theta_2 - \theta_1$. 从这对共轭变量出发, 得到如下方程:

$$\frac{ds}{dt} = -2k\sqrt{1-s^2} \sin \theta, \quad (6)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \gamma + c[(1+s)^{2/3} - (1-s)^{2/3}] + \frac{2ks}{\sqrt{1-s^2}} \cos \theta. \quad (7)$$

利用正则变换

$$\frac{ds}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \theta},$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{\partial H}{\partial s}$$

得到费米系统的经典哈密顿量

$$H = \gamma s + \frac{3}{5}c[(1+s)^{5/3} + (1-s)^{5/3}]$$

$$-2k\sqrt{1-s^2} \cos \theta. \quad (8)$$

其中 $c = (N/2)^{2/3}U$. 我们发现, 相互作用参数 c 依赖于粒子数 N 和空间态矢 $\phi_i(x)$ ($i = 1, 2$), 而态矢又依赖于外势场 $V(x)$ 和化学势 $\mu(n, a_{sc})$. 本文在计算中取 $k = 0.1$.

3 计算结果及分析

这里将研究系统的 Landau-Zener 隧穿现象, Landau-Zener 模型是利用外场调制两阱间的能级差 γ 来研究粒子在两阱间的量子隧穿, 我们取 $\gamma = \alpha t$, 其中 α 通常被称作扫描速率.

3.1 相图和不动点分析

量子隧穿现象可以等价地用经典哈密顿系统中的不动点振荡来描述. 不动点对应粒子数布居的平衡分布, 也表征了系统的能量分布. 相平面中哈密顿系统的演化轨迹如图 1 所示. 从图 1 可以看出, 当相互作用参数 $c/k < 1.5$ 时 (图 1 (a)), 相平面中只有两个不动点 $F_1(s = 0, \theta = 0)$ 和 $F_2(s = 0, \theta = \pi)$, 每个点都被封闭的椭圆轨道所包围, 它们都是稳定的且对应于费米系统能量的最小值和最大值. 而相互作用参数 $c/k > 1.5$ 时 (图 1 (b)), 相平面中除了稳定不动点 $F_1(s = 0, \theta = 0)$ 和 $F_2(s = 0, \theta = \pi)$ 之外, 在 $\theta = \pi$ 相位上还出现了新的不动点 F_3 和 F_4 , 它们都是不稳定的.

不动点由两个到四个演化的相互作用参数 c 的临界值可以通过计算不动点周围轨道的振荡频率获得. 将 s 和 θ 利用无穷小量 s' 和 θ' 展开为 $s = s_f + s'$ 和 $\theta = \theta_f + \theta'$, 其中 (s_f, θ_f) 为不动点. 将它们代入方程 (6) 和 (7), 化简并使 $(s_f, \theta_f) = (0, \pi)$, 便可以获得小振幅振荡的频率

$$\omega_{0,\pi} = \sqrt{4k^2 - 8kc/3}. \quad (9)$$

从方程 (9) 可知, 当 $k > 2c/3$ 时, 方程 $\omega_{0,\pi}$ 有实根, 即在图 1 中出现稳定不动点 F_2 . 但是, 当 $k < 2c/3$ 时, 方程 $\omega_{0,\pi}$ 没有实根, 即在图 1 中出现不稳定不动点 F_3 和 F_4 . 因此, 在 $\theta = \pi$ 相位上, 不动点由两个到三个的临界条件为 $k = 2c/3$, 即 $c/k = 1.5$. 这和我们数值计算结果相符.

能级差 γ 可以影响系统的不动点分布, 进而影响系统的能量分布, 同时能够反映出粒子在两阱间

的隧穿现象. 图 2 给出了不动点随能级差的演化. 当相互作用参数 $c/k < 1.5$ 时 (图 2 (a)), 能级差 γ 从 $-\infty$ 到 $+\infty$ 演化时, 相平面上只存在两个不动点 F_1 和 F_2 , F_1 从 $s = 1$ 运动到了 $s = -1$, 而 F_2 从 $s = -1$ 运动到了 $s = 1$. 在演化过程中, 它们总是相差一个 π 相位, 高 (低) 能级始终保持能量较高 (低) 的状态.

当相互作用参数 $c/k > 1.5$ 时 (图 2 (b)), 对于不动点 F_1 , 能级差 γ 从 $-\infty$ 到 $+\infty$ 演化时, 它从 $s = 1$ 运动到了 $s = -1$. 而 $\theta = \pi$ 相位上,

在 $-\gamma_c < \gamma < +\gamma_c$ 区域将会出现三个不动点. 当能级差 γ 从 $-\infty$ 到 $+\infty$ 演化时, 在 $\pm\gamma_c$ 处, 不动点 F_2 和 F_3 , 不动点 F_2 和 F_4 的碰撞导致了能级的分裂, 从而使得量子绝热定理不再满足, 这表明在能级间发生了量子隧穿.

临界点 γ_c 依赖于参数 c/k , 它们之间的关系如图 3 所示. 从图 3 可以看出, 随着 c/k 的增加, γ_c 也不断增加, 在临界点 c^*/k , $\gamma_c = 0$. 这意味着, 当 $c/k > c^*/k$ 时, 在 π 相位上新的不动点会出现. 这和以上分析完全一致.

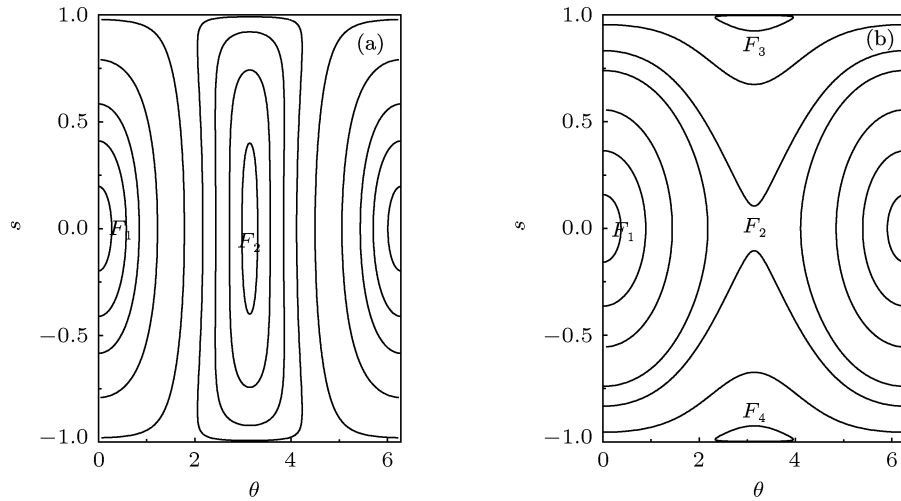


图 1 相平面中不动点和系统哈密顿量的演化 ($\gamma = 0$) (a) $c/k = 0.5$; (b) $c/k = 2.5$

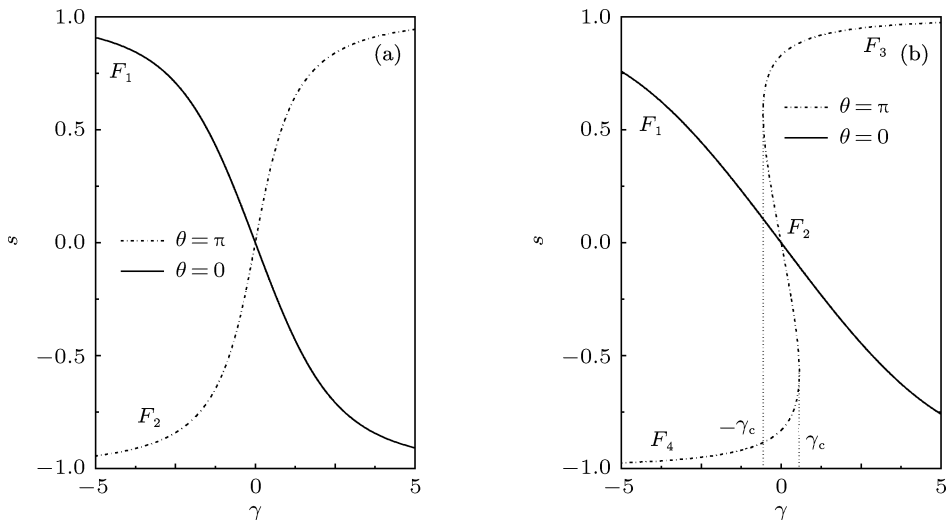


图 2 不动点随能级差的变化关系 (a) $c/k = 0.5$; (b) $c/k = 2.5$

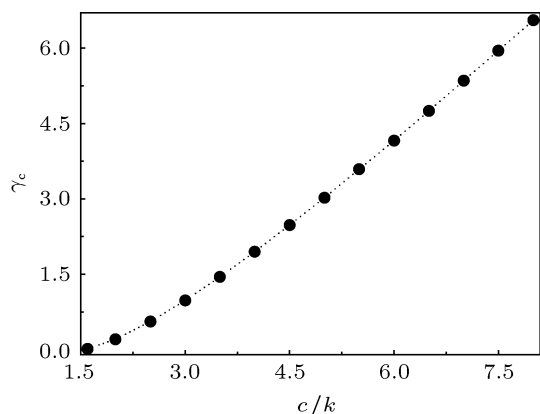


图3 临界点 γ_c 随 c/k 的变化关系

3.2 隧穿率与扫描速率的关系

下面我们将研究外势场以速率 α 扫描时的量子隧穿情况. 假设时间 t 从 $-\infty$ 到 $+\infty$ 演化, 在初始时刻, 费米子完全放置在较浅的势阱里. 对于线性情况 ($c = 0$), 隧穿率可以解析求得,

$$\Gamma = \exp[-(\pi(2k)^2)/(2\alpha)].$$

在绝热极限 ($\alpha \rightarrow 0$) 时, $\Gamma = 0$. 这意味着粒子在两个势阱间没有发生隧穿, 因此在整个过程中粒子始终布居于较浅的势阱中, 这种情况显然满足量子绝热定理.

对于非线性情况 ($c \neq 0$), 通过数值计算得到了相互作用参数 c/k 不同时隧穿率随扫描速率的变化关系, 结果如图 4 所示. 从图 4 可以看出: 隧穿率随着非线性参数 c/k 的增加而增加, 随着扫描速率 α 的增大而增大. 当相互作用参数 $c/k > c^*/k$

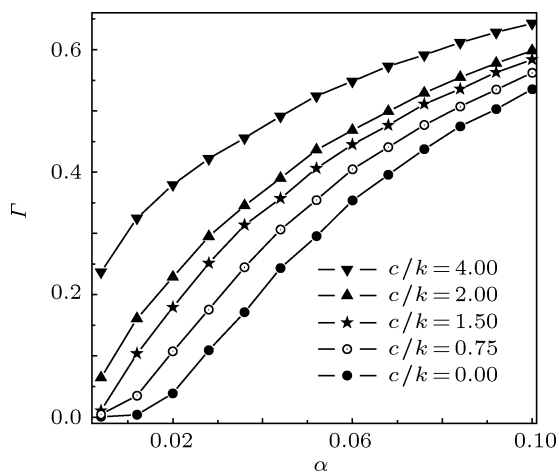


图4 对于不同的 c/k , 隧穿率 Γ 随扫描速率 α 的变化关系

时, 即使在绝热极限 ($\alpha \rightarrow 0$) 时, 隧穿率 Γ 也不为零 (图 4 中 $c/k = 2.0, 4.0$). 这种情况下, 量子绝热定理显然不再满足. 当相互作用参数 $c/k \leq c^*/k$ 时 (图 4 中 $c/k = 0.75, 1.5$), 在绝热极限 ($\alpha \rightarrow 0$) 时, 隧穿结果与无相互作用时的隧穿结果 (图 4 中 $c/k = 0$) 基本相似, 即 $\alpha \rightarrow 0$ 时 $\Gamma = 0$, 满足量子绝热定理.

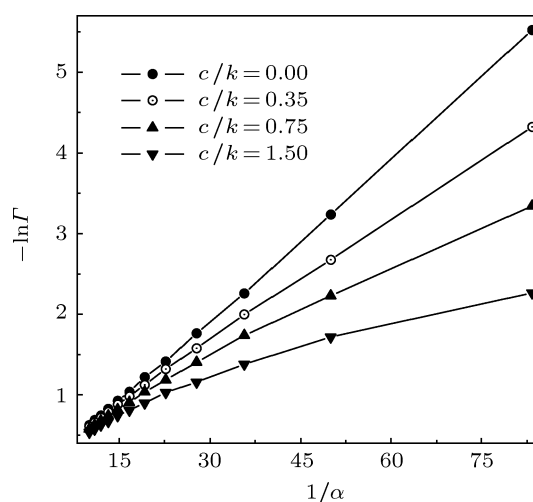


图5 相互作用参数较小时, 隧穿率的负对数 $-\ln\Gamma$ 与扫描速率的倒数 $1/\alpha$ 之间的关系

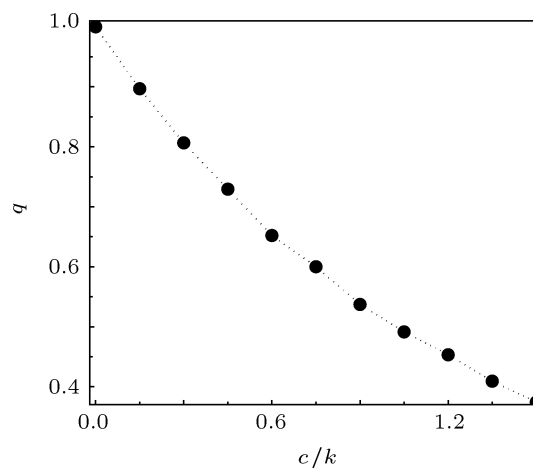


图6 q 因子与 c/k 间的关系

鉴于 $c/k \leq c^*/k$ 时, 我们发现在非线性情况下隧穿率 Γ 与扫描速率 α 之间依然应该满足指数规律. 对应于不同的非线性参数 c/k , 图 5 给出了扫描速率的倒数 ($1/\alpha$) 与隧穿率的负对数 ($-\ln\Gamma$) 之间的关系. 我们发现它们间的关系接近于一条直线, 通过计算斜率 q 可以得到隧穿率 Γ 与扫描速率 α 之间满足指数规律 $\Gamma \propto \exp[-q(\pi(2k)^2)/(2\alpha)]$. 和数值结果比较后发现, 两者符合很好. 在图 5 中, 当

非线性参数 c/k 分别为 0.35, 0.75, 1.5 时, 对应的 q 因子分别为 0.8064, 0.6012 和 0.3744.

通过以上分析发现: 对于不同的相互作用参数 c , 只要在指数上乘以 q 因子, 隧穿率与扫描速率之间的关系依然满足指数规律. 对于不同的非线性参数 c/k , q 因子的值是不同的. 图 6 给出了 q 因子随非线性参数 c/k 的变化规律. 从图 6 可以看出, 随着 c/k 的增大, q 值不断减小.

4 结论

本文以平均场理论为基础, 结合费米超流气体的性质, 从表征费米子间相互作用的化学势和 s 波散射长度出发, 推导出了费米超流气体在么正极限

区域下所满足的动力学方程. 还利用两模近似得到了在双势阱中描述费米超流气体性质的方程. 通过引入一对共轭变量, 并对它们做正则变换后得到了费米系统的能量. 通过对相图和不动点分析研究了外势阱间能级差对量子隧穿的影响, 并得到了不动点由两个到四个的条件 (即绝热条件下能级分离的条件). 最后以 Landau-Zener 隧穿基本理论为基础, 研究了费米超流气体的非线性 Landau-Zener 隧穿. 研究发现, 当相互作用参数 $c > c^*$ 时, 在绝热极限下量子绝热定理不再满足; 当相互作用参数 $c < c^*$ 时, 在绝热极限下隧穿满足量子绝热定理. 在 $c/k < c^*/k$ 时, 通过与线性情形作比较, 得到了隧穿率与扫描速率之间满足的指数规律.

- [1] Anderson M H, Ensher J R, Matthews M R, Wieman C E, Cornell E A 1995 *Science* **269** 198
- [2] Ma Y, Fu L B, Yang Z A, Liu J 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 5623 (in Chinese) [马云, 傅立斌, 杨志安, 刘杰 2006 物理学报 **55** 5623]
- [3] Liu W M, Fan W B, Zheng W M, Liang J Q, Chui S T 2002 *Phys. Rev. Lett.* **88** 170408
- [4] Wen W, Shen S Q, Huang G X 2010 *Phys. Rev. B* **81** 014528
- [5] Fang Y C, Yang Z A, Yang L Y 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 661 (in Chinese) [房永翠, 杨志安, 杨丽云 2008 物理学报 **57** 661]
- [6] Zang X F, Li J P, Tan L 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 4348 (in Chinese) [臧小飞, 李菊萍, 谭磊 2007 物理学报 **56** 4348]
- [7] Wang G F, Fu L B, Liu J 2006 *Phys. Rev. A* **73** 013619
- [8] Modugno G, Roati G, Riboli F, Ferlaino F, Brecha R J, Inguscio M 2002 *Science* **297** 2240
- [9] Xiong H W, Lin S J, Zhang W P, Zhan M S 2005 *Phys. Rev. Lett.* **95** 120401
- [10] Men F D, Lin H, Zhu H Y 2008 *Chin. Phys. B* **17** 3236
- [11] Qin F, Chen J S 2009 *Chin. Phys. B* **18** 2654
- [12] Men F D, Liu H, Fan Z L, Zhu H Y 2009 *Chin. Phys. B* **18** 2649
- [13] Huang Z F, Ou C J, Chen J C 2009 *Chin. Phys. B* **18** 1380
- [14] Liu J, Fu L B, Ou B Y, Chen S G, Wu B, Niu Q 2002 *Phys. Rev. A* **66** 023404
- [15] Wu B, Niu Q 2000 *Phys. Rev. A* **61** 023402
- [16] Huang F, Li H B 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 020303 (in Chinese) [黄芳, 李海彬 2011 物理学报 **60** 020303]
- [17] Wu B, Liu J 2006 *Phys. Rev. Lett.* **96** 020405
- [18] Wang G F, Fu L B, Zhao H, Liu J 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 5003 (in Chinese) [王冠芳, 傅立斌, 赵鸿, 刘杰 2005 物理学报 **54** 5003]
- [19] Wu Y, Yang X X 2007 *Phys. Rev. Lett.* **98** 013601
- [20] Adhikari S K, Salasnich L 2008 *Phys. Rev. A* **78** 043616
- [21] Ancilotto F, Salasnich L, Toigo F 2009 *Phys. Rev. A* **79** 033627
- [22] Giorgini S, Pitaevskii L P, Stringeri S 2008 *Rev. Mod. Phys.* **80** 1215
- [23] Adhikari S K, Salasnich L 2008 *Phys. Rev. A* **77** 033618
- [24] Adhikari S K, Lu H, Pu H 2009 *Phys. Rev. A* **80** 063607
- [25] Wang G F, Ye D F, Fu L B, Chen X Z, Liu J 2006 *Phys. Rev. A* **74** 033414
- [26] Fu L B, Liu J 2006 *Phys. Rev. A* **73** 063614

Nonlinear Landau-Zener transition of Fermi superfluid gases*

Wang Wen-Yuan Meng Hong-Juan Yang Yang Qi Peng-Tang Ma Yun-Yun
Ma Ying Duan Wen-Shan[†]

(Key Laboratory of Atomic and Molecular Physics and Functional Materials of Gansu Province, College of Physics and Electronic Engineering,
Northwest Normal University, Lanzhou 730070, China)

(Received 13 July 2011; revised manuscript received 26 August 2011)

Abstract

By using the analysis of phase, fixed point and tunneling rate between two wells, we study the nonlinear Landau-Zener transition of Fermi superfluid gases in a two-mode system. We find that the interaction between fermi pairs can affect the quantum transition. We also find that when the interaction parameter c is less than the critical value c^* , in the adiabatic limit, the quantum adiabatic transition theorem is still satisfied, but when the interaction parameter c is greater than this critical value, the quantum adiabatic transition theorem will not be satisfied. Finally, we obtain the relationship between the tunneling rate and the scan rate by comparing with the linear case.

Keywords: Fermi superfluid gases, Landau-Zener transition, quantum adiabatic evolution

PACS: 73.40.Gk, 03.65.-w, 03.75.Lm

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 10725521, 91021021, 10875098), the State Key Development Program for Basic Research of China (Grant Nos. 2007CB814800, 2011CB921503), and the Natural Science Foundation of Northwest Normal University, China (Grant No. NWNNU-KJCXGC-03-48).

[†] E-mail: duanws@nwnu.edu.cn