

# 基于截断区域特征函数展开法的金属管材电涡流检测线圈阻抗解析模型\*

范孟豹<sup>1)†</sup> 尹亚丹<sup>1)</sup> 曹丙花<sup>2)</sup>

1) (中国矿业大学机电工程学院, 徐州 221116)

2) (中国矿业大学信息与电气工程学院, 徐州 221116)

(2011年6月26日收到; 2011年12月26日收到修改稿)

针对金属管材电涡流检测线圈阻抗的理论计算问题, 通过施加磁绝缘边界条件, 应用分离变量法和 Cheng 矩阵法建立了内穿式和外穿式线圈阻抗解析模型. 因模型含有与虚宗量 Bessel 函数有关的积分, 通过研究函数特性, 提出基于高斯积分算法的数值计算方法. 以铜管管壁减薄为例进行仿真研究, 并与 Dodd 模型、有限元模型进行了对比. 比较表明, 三种方法的仿真结果基本一致, 验证了所建立模型的正确性. 与传统的 Dodd 模型、有限元模型相比, 所建立的模型具有效率高、精度调整方便等优点.

**关键词:** 金属管材, 电涡流检测, 线圈阻抗, 截断区域特征函数展开法

**PACS:** 81.70.Ex, 41.20.-q

## 1 引言

油气管道、蒸汽发生器管、带保温层管道等管材的应用非常广泛<sup>[1-4]</sup>, 长期使用的管道会因腐蚀、疲劳等原因产生裂纹, 进而导致液体泄漏等事故的发生, 造成经济损失和环境污染. 因此, 管道裂纹的及时检测与评估是亟待解决的重要问题.

具有成本低、速度快、无须接触等优点的电涡流检测方法被广泛应用于各类管材和棒材的无损检测与评估. 在工程实践中困扰研究人员和技术人员的一个难题是如何快速选择和优化探头及检测参数, 线圈阻抗的仿真建模是解决上述问题的一种低成本高效率的手段<sup>[5,6]</sup>. Dodd 等<sup>[7]</sup>应用分离变量法建立了两层管材结构线圈涡流场的解析模型; 随后, 应用 Cheng 矩阵法将模型推广到线圈内外均有任意层结构的涡流场求解<sup>[8]</sup>. 需要指出的是, Dodd 模型以管材为无限长为前提, 使得线圈阻抗解析表达式含有虚宗量 Bessel 函数的广义二重

积分. 积分模型表达式的不足是积分上限确定困难, 计算结果精度不易调整<sup>[9]</sup>.

为了解决 Dodd 模型中存在的问题, Theodoulidis 等<sup>[9]</sup>在模型径向的某个位置人为设置边界, 并在边界处施加磁绝缘条件, 应用特征函数展开法建立无限厚管材内穿式检测线圈阻抗解析模型, 并将该方法命名为截断区域特征函数展开 (TREE) 法. 该模型不再是广义积分, 而是无穷级数和. TREE 法已经广泛应用于求解电涡流检测问题, 如管材和棒材端部效应、平板中孔型裂纹以及理想裂纹的解析建模<sup>[10-12]</sup>、多层有限长柱体结构<sup>[13,14]</sup>、管道不均匀减薄<sup>[15]</sup>. 与 Dodd 模型相比, TREE 方法的应用在模型中引入了求解区域截断误差和无穷级数求和误差, 但这两种误差通过调整人为边界位置和求和项数可使之无限小, 从而使级数模型无限逼近积分模型.

Theodoulidis 等<sup>[9]</sup>的研究仅局限于无限厚管材内穿式检测线圈阻抗建模. 在工程实践中, 很多管

\* 国家高技术研究发展计划 (批准号: 2008AA062202)、中国博士后科学基金 (批准号: 20090460086, 201003606) 和中国矿业大学青年自然科学基金 (批准号: 2009A018) 资助的课题.

† E-mail: wuzhi3495@yahoo.com.cn

材为多层结构(如带有防腐层或保温层)管道. 对于管材和棒材的电涡流检测, 探头检测方式有内穿式和外穿式两种. 内穿式探头适用于检测管道内壁腐蚀, 而外穿式探头适用于小管径的管材、棒材、线材表面与亚表面缺陷的定量检测. 因 TREE 法在上述涡流检测问题求解中的应用研究尚未开展, 使得多层管材结构线圈阻抗模型仍然采用传统的 Dodd 积分模型. 为此, 本文应用 TREE 法分别研究内穿式和外穿式检测线圈阻抗的解析建模问题, 并研究模型的数值计算方法.

## 2 内穿式线圈阻抗解析模型

### 2.1 单层管材试件

管壁为无限厚的单层管材试件在实际工程中是不存在的, 但当某检测频率下管壁厚度远大于渗透深度时, 可将检测试件看作单层管材试件. 单层管材试件是建模研究的典型问题, 模型如图 1 所示, 图中  $r_1$  和  $r_2$  分别为线圈的内外半径,  $z_1$  和  $z_2$  分别为线圈的  $z$  轴坐标位置,  $h$  为模型求解区域的高度,  $d_1$  为管材内半径.

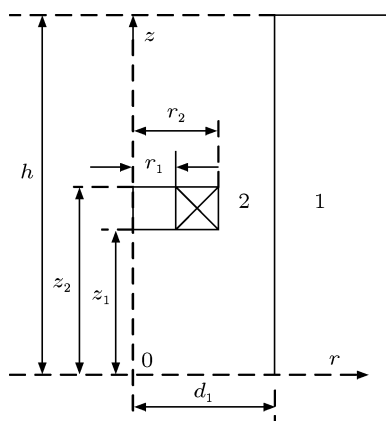


图 1 单层管材结构内穿式线圈模型

单频正弦波激励时, 根据轴对称条件下的 Maxwell 方程组, 并引入库仑规范有

$$\nabla^2 \dot{\mathbf{A}} = -\mu \dot{\mathbf{J}}_s + j\omega\mu\sigma \dot{\mathbf{A}}, \quad (1)$$

式中,  $\dot{\mathbf{J}}_s$  为线圈施加的激励电流密度,  $\dot{\mathbf{A}}$  为矢量磁位,  $\omega$  为激励信号角频率,  $\mu$  为材料的磁导率,  $\sigma$  为材料的电导率.

根据文献 [9], 当在  $z = h$  和  $z = 0$  处施加磁绝缘边界条件时, 应用分离变量法和 TREE 法可得线

圈阻抗变化量表达式为

$$\Delta Z = K_c \sum_{i=1}^{\infty} I(\alpha_i r_2, \alpha_i r_1)^2 \frac{A^2}{\alpha_i^6} R'_i. \quad (2)$$

这里,

$$K_c = \frac{j\omega 4\pi\mu_0 N^2}{h(r_2 - r_1)^2(z_2 - z_1)^2},$$

$$A = \sin(\alpha_i z_1) - \sin(\alpha_i z_2),$$

$$\alpha_i = \frac{i\pi}{h},$$

$$I(\alpha_i r_2, \alpha_i r_1) = \int_{\alpha_i r_1}^{\alpha_i r_2} x I_1(x) dx,$$

$$R'_i = [\alpha_i K_0(\alpha_i d_1) K_1(\alpha_i d_1) - \alpha_{1i} K_1(\alpha_i d_1) K_0(\alpha_{1i} d_1)] \times [\alpha_i I_0(\alpha_i d_1) K_1(\alpha_i d_1) + \alpha_{1i} I_1(\alpha_i d_1) K_0(\alpha_{1i} d_1)],$$

其中,  $I_m$  和  $K_m$  分别为第一类和第二类  $m$  阶虚宗量 Bessel 函数,  $\alpha_{1i} = \sqrt{\alpha_i^2 + j\omega\mu_1\sigma_1}$ ,  $\mu_1$  和  $\sigma_1$  分别为区域 1 中金属管材试件的磁导率和电导率.

### 2.2 多层管材试件

工程应用中, 部分管材试件由多层材料构成, 如保温层管道由铝皮、保温材料、防腐漆以及管壁组成. 因此, 在单层管材试件研究基础上进一步研究多层管材试件线圈阻抗模型是非常必要的, 模型如图 2 所示.

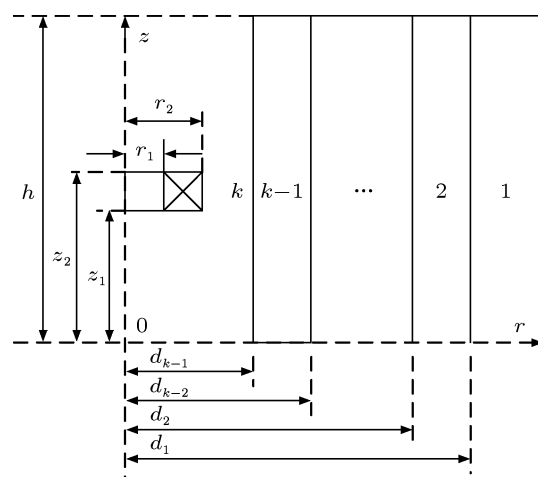


图 2 多层管材试件内穿式线圈模型

文献 [16] 研究表明, 空间电磁场由线圈激励场和导体中的涡流场线性叠加组成. 对于导电平板检测线圈阻抗变化量的表达式, 当导电材料属性和层

数变化时, 表达式仅反映在广义反射系数的计算不同, 并应用 Cheng 矩阵法求解.

对于多层管材试件, 线圈阻抗变化量的积分表达式具有同样的规律. 据此, 由 (2) 式并应用 TREE 法可得线圈阻抗变化量  $\Delta Z$  的解析表达式为

$$\Delta Z = K_c \sum_{i=1}^{\infty} I(\alpha_i r_2, \alpha_i r_1)^2 \frac{A^2}{\alpha_i^6} R'_i, \quad (3)$$

式中,

$$R'_i = \frac{U_{i.12}}{U_{i.22}},$$

$$U_i = \mathbf{T}_i(k, k-1) \mathbf{T}_i(k-1, k-2) \cdots \mathbf{T}_i(2, 1).$$

这里矩阵  $\mathbf{T}_i(n+1, n)$  是  $2 \times 2$  矩阵, 各元素如下:

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_{i.11}(n+1, n) &= [K_0(\alpha_{(n+1)i} r_n) I_1(\alpha_{ni} r_n) \\ &\quad + (\beta_{ni} / \beta_{(n+1)i}) \\ &\quad \times I_0(\alpha_{ni} r_n) K_1(\alpha_{(n+1)i} r_n)] \\ &\quad \times (\alpha_{(n+1)i} r_n), \\ \mathbf{T}_{i.12}(n+1, n) &= [K_0(\alpha_{(n+1)i} r_n) K_1(\alpha_{ni} r_n) \\ &\quad - (\beta_{ni} / \beta_{(n+1)i}) \\ &\quad \times K_0(\alpha_{ni} r_n) K_1(\alpha_{(n+1)i} r_n)] \\ &\quad \times (\alpha_{(n+1)i} r_n), \\ \mathbf{T}_{i.21}(n+1, n) &= [I_0(\alpha_{(n+1)i} r_n) I_1(\alpha_{ni} r_n) \\ &\quad - (\beta_{ni} / \beta_{(n+1)i}) \\ &\quad \times I_0(\alpha_{ni} r_n) I_1(\alpha_{(n+1)i} r_n)] \\ &\quad \times (\alpha_{(n+1)i} r_n), \\ \mathbf{T}_{i.22}(n+1, n) &= [I_0(\alpha_{(n+1)i} r_n) K_1(\alpha_{ni} r_n) \\ &\quad + (\beta_{ni} / \beta_{(n+1)i}) \\ &\quad \times K_0(\alpha_{ni} r_n) I_1(\alpha_{(n+1)i} r_n)] \\ &\quad \times (\alpha_{(n+1)i} r_n), \end{aligned}$$

其中,  $\beta_{ni} = \frac{\alpha_{ni}}{\mu_{nr}}$ ,  $\mu_{nr}$  为第  $n$  层管材试件的相对磁导率,  $\alpha_{ni} = \sqrt{\alpha_i^2 + j\omega\mu_n\sigma_n}$ ,  $\mu_n$  和  $\sigma_n$  分别为第  $n$  层材料的磁导率和电导率.

### 3 外穿式管道检测线圈阻抗解析模型

内穿式电涡流检测有着很广泛的应用, 然而对于直径较小的管材, 因探头尺寸太小导致灵敏度低, 而对棒材以及线材, 内穿式检测无法实现. 外穿式检测因试件从线圈内部穿过, 容易实现高速批量检

测, 被广泛用于小直径的管材、棒材及线材的质量检测. 外穿式线圈检测模型如图 3 所示.

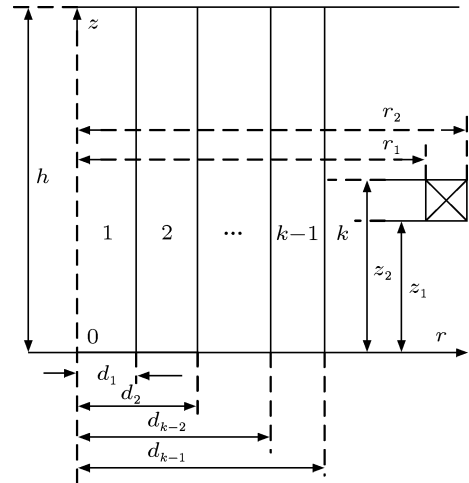


图 3 多层管材试件外穿式线圈模型

对于 Dodd 推导的多层管材试件线圈阻抗积分模型, 其表达式与内穿式检测线圈阻抗积分模型非常相似, 不同点在于内穿式线圈阻抗表达式中含有第一类一阶虚宗量 Bessel 积分, 而外穿式线圈阻抗表达式的对应部分是第二类一阶虚宗量 Bessel 积分. 因此, 根据文献 [8, 16] 并比照 (3) 式可得多层管材试件外穿式线圈阻抗变化量表达式为

$$\Delta Z = K_c \sum_{i=1}^{\infty} K(\alpha_i r_2, \alpha_i r_1)^2 \frac{A^2}{\alpha_i^6} R'_i, \quad (4)$$

式中

$$K(\alpha_i r_2, \alpha_i r_1) = \int_{\alpha_i r_1}^{\alpha_i r_2} x K_1(x) dx.$$

### 4 模型的数值计算

建立的内穿式和 外穿式线圈阻抗模型表达式比较复杂, 且含有特殊函数, 因此需要研究数值计算方法. 对于 (3) 和 (4) 式, 计算的难点在于特殊函数及其积分. 为方便计算和图形显示, 程序在 Matlab 平台中编写, Matlab 提供了 Bessel 函数  $I_1$  和  $K_1$ , 分别为 besseli 和 bessellk.

为精确计算积分  $I(\alpha_i r_2, \alpha_i r_1)$  和  $K(\alpha_i r_2, \alpha_i r_1)$ , 需要研究被积函数特性. 积分变量  $\alpha_i$  的取值范围可从零到数千, 而线圈直径通常为若干毫米到几十毫米, 为此, 一般只需研究被积函数  $xI_1(x)$  和  $xK_1(x)$  在  $\alpha = 0-50$  以内的特性即可, 所得结果分别如图 4 和图 5 所示.

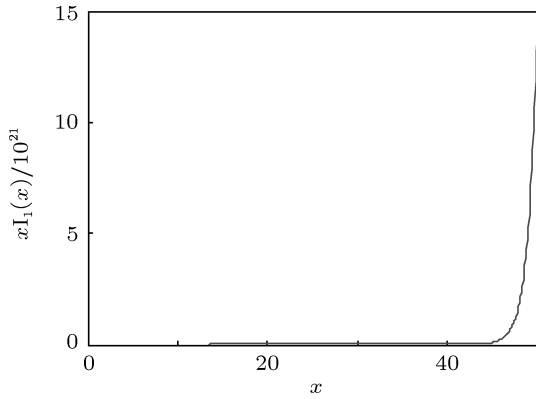


图4 被积函数  $xI_1(x)$  的特性

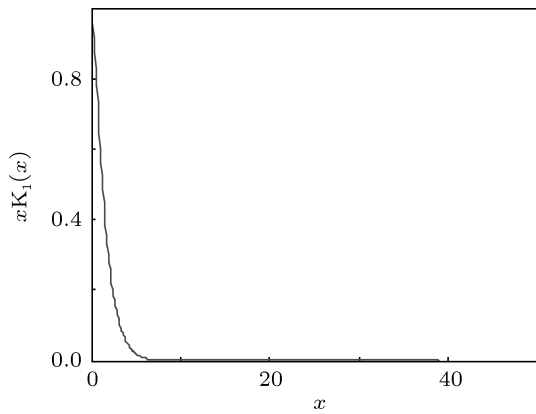


图5 被积函数  $xK_1(x)$  的特性

从图4和图5可知,积分  $I$  和积分  $K$  的被积函数都是单调的. 据此,选用高效高精度的三阶高斯积分算法<sup>[17]</sup>计算积分  $I$  和积分  $K$ .

### 5 仿真验证

铜管和钛管在冶金、机械行业中的应用非常广泛,仿真以铜管管壁减薄为研究对象,内穿式与外穿式线圈参数如表1所列.

表1 线圈参数

参数名称	内穿式	外穿式
内半径 $r_1/\text{mm}$	3	8
外半径 $r_2/\text{mm}$	5	10
轴向高度/ $\text{mm}$	4	4
匝数 $N$	600	600

根据 Ansoft 软件的材料库,铜管的电导率为  $58 \text{ MS/m}$ ,铜管内外半径分别为  $5.5$  和  $7.5 \text{ mm}$ .当铜管的内壁减薄  $10\%$ ,  $20\%$  和  $40\%$  时,分别仿真内穿式与外穿式检测条件下线圈阻抗的变化.

为验证模型的正确性,采用本文模型得到的仿真结果分别与 Dodd 积分模型和有限元模型的计算结果进行了对比,如表2所列.

表2 三种模型得到的内穿式线圈检测管壁减薄仿真结果(单位为  $\Omega$ )

检测方式	管壁减薄	Dodd 模型	有限元模型	本文模型
内穿式	10%	$-0.2845 + j 0.7274$	$-0.2849 + j 0.7294$	$-0.2817 + j 0.7118$
	20%	$-0.4858 + j 1.3937$	$-0.4855 + j 1.3943$	$-0.4820 + j 1.3635$
	40%	$-0.6802 + j 2.6371$	$-0.6814 + j 2.6394$	$-0.6803 + j 2.5781$
外穿式	10%	$-0.3328 + j 1.6379$	$-0.3410 + j 1.6249$	$-0.3313 + j 1.6025$
	20%	$-0.6170 + j 3.2793$	$-0.6333 + j 3.2552$	$-0.6169 + j 3.2069$
	40%	$-1.1818 + j 6.7044$	$-1.2168 + j 6.6467$	$-1.1889 + j 6.5472$

表3 三种模型的计算耗时(单位为 s)

次数	Dodd 模型	有限元模型	本文模型
1	0.04	1.58	0.01
10	0.14	9.67	0.02
100	2.59	54.1	0.09

由表2可知,本文所建模型与有限元模型、Dodd 模型得到的结果基本一致,表明所建模型是正确的.为进一步证明所建模型在计算效率方面的优势,在 Intel 双核 CPU 内存为  $1 \text{ Gbit}$ 、激励频率为  $1 \text{ kHz}$  的情况下,应用上述模型仿真计

算  $1, 10, 100$  次时计算机所耗用的时间,结果如表3所列.

从表3可知,本文模型的计算效率远高于有限元模型,在多次计算时效率显著高于 Dodd 模型.并且,本文模型为无穷级数,数值求解时具有无需确定积分上限、精度调整方便的优点.

### 6 结论

以单层管材内穿式线圈阻抗模型为基础,通过

施加磁绝缘边界条件,采用类比分析法建立了多层管道内穿式和外穿式检测线圈阻抗变化量解析模型.通过研究模型中含有 Bessel 函数的积分核函数特性,提出了基于高斯积分算法的数值计算方法.以铜管管壁减薄为例进行仿真研究,结果表明,本文所建立的模型与 Dodd 模型、有限元模型的结果

符合良好,验证了所建模型的正确性,且模型具有效率高、精度调整方便等优点.

本文建立的解析模型可用于仪器检测参数和探头参数的优化设计.下一步将以所建立的解析模型为基础,研究求解脉冲涡流检测探头响应.

- 
- [1] Yusa N 2009 *Nondestruct. Test. Eval.* **24** 39
- [2] Huang S L, Xu C, Zhao W, Xu P 2011 *J. Tsinghua Univ. (Sci. Techn.)* **51** 390 (in Chinese) [黄松岭, 徐琛, 赵伟, 许鹏 2011 清华大学学报(自然科学版) **51** 390]
- [3] Chen D Z, Huang Z H, Liao S S, Nie Y 2007 *J. Huazhong Univ. Sci. Techn. (Nat. Sci. Ed.)* **35** 41 (in Chinese) [陈德智, 黄振华, 廖述圣, 聂勇 2007 华中科技大学学报(自然科学版) **35** 41]
- [4] Wu X J, Huang C, Ding X, Lin S Q, Shen G T 2010 *Nondestruct. Test.* **32** 127 (in Chinese) [武新军, 黄琛, 丁旭, 林树青, 沈功田 2010 无损检测 **32** 127]
- [5] Hao K S, Huang S L, Zhao W, Wang S 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 078103 (in Chinese) [郝宽胜, 黄松岭, 赵伟, 王坤 2011 物理学报 **60** 078103]
- [6] Xie L, Lei Y Z 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 4397 (in Chinese) [谢莉, 雷银照 2006 物理学报 **55** 4397]
- [7] Dodd C V, Deeds W E 1968 *J. Appl. Phys.* **39** 2829
- [8] Dodd C V, Cheng C C, Deeds W E 1974 *J. Appl. Phys.* **45** 638
- [9] Theodoulidis T P, Kriezis E E 2005 *J. Mater. Process. Technol.* **161** 343
- [10] Theodoulidis T P 2004 *Int. J. Appl. Electromagn. Mech.* **19** 207
- [11] Theodoulidis T P 2008 *J. Appl. Phys.* **103** 024905
- [12] Theodoulidis T P, Poulakis N 2010 *NDT E Int.* **43** 13
- [13] Bowler J R, Theodoulidis T P 2005 *J. Phys. D* **38** 2861
- [14] Sun H, Bowler J R, Theodoulidis T P 2005 *IEEE Trans. Magn.* **41** 2455
- [15] Skarlatos A, Theodoulidis T P 2010 *IEEE Trans. Magn.* **46** 3885
- [16] Fan M B, Huang P J, Ye B, Hou D B, Zhang G X, Zhou Z K 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 5950 (in Chinese) [范孟豹, 黄平捷, 叶波, 侯迪波, 张光新, 周泽魁 2009 物理学报 **58** 5950]
- [17] Hu J H 2008 *Numerical Method* (Xuzhou: China University of Mining and Technology Press) p119 (in Chinese) [胡建华 2008 数值计算方法(徐州:中国矿业大学出版社)第119页]

# Analytical modeling of coil impedance based on truncated region eigenfunction expansion method in eddy current tube inspection\*

Fan Meng-Bao<sup>1)†</sup> Yin Ya-Dan<sup>1)</sup> Cao Bing-Hua<sup>2)</sup>

1) (College of Mechanical and Electrical Engineering, China University of Mining and Technology, Xuzhou 221116, China)

2) (College of Information and Electrical Engineering, China University of Mining and Technology, Xuzhou 221116, China)

(Received 26 June 2011; revised manuscript received 26 December 2011)

## Abstract

In order to calculate theoretically the coil impedance, the separation of variables method and the Cheng matrix method are used to establish the analytical model by applying the magnetic insulation condition in eddy current tube detection with encircling probes inside and outside respectively. In the established model, there exists a definite integral related to modified Bessel function. Gaussian integral algorithm is proposed to accurately perform the numerical calculation. Simulations are carried out on the thinning of a copper tube wall thickness using the presented model, traditional Dodd model and finite element model. Their results are in good agreement with each other, demonstrating that the derived analytical model is correct. Compared with the Dodd and finite element models, the improved model has some advantages such as good efficiency, easy adjustment of accuracy and so on.

**Keywords:** conducting tubes, eddy current testing, coil impedance, truncated region eigenfunction expansion method

**PACS:** 81.70.Ex, 41.20.-q

---

\* Project supported by the National High Technology Research and Development Program of China (Grant No. 2008AA062202), the China Postdoctoral Science Foundation (Grant Nos. 20090460086, 201003606), and the Natural Science Foundation for Young Scholar of China University of Mining and Technology (Grant No. 2009A018).

† E-mail: wuzhi3495@yahoo.com.cn