

# 水平层状横向同性地层中频率测深资料 全参数快速迭代反演\*

周建美<sup>1)</sup> 汪宏年<sup>1)†</sup> 姚敬金<sup>2)</sup> 杨守文<sup>1)</sup> 马寅芝<sup>1)</sup>

1) (吉林大学物理学院, 长春 130012)

2) (中铁资源地质勘查有限公司, 北京 100039)

(2011年4月27日收到; 2011年12月28日收到修改稿)

提出水平层状横向同性地层中频率测深资料的全参数快速迭代反演算法, 以便从测量资料中同时确定各个地层的横向、纵向电导率及层界面深度. 首先, 利用水平层状介质中电磁场并矢 Green 函数在频率波数域中的解析解和 Sommerfeld 积分的快速计算技术确定正演响应. 然后, 利用摄动理论和 Fourier 逆变换公式, 研究建立一套快速求解全参数 Fréchet 导数的有效算法, 并利用规范化处理和奇异值分解技术给出迭代反演过程. 最后, 给出数值试验证明反演理论有效性以及反演算法的抗噪声能力.

**关键词:** 横向同性, 频率电磁测深, Fréchet 导数, 全参数反演

**PACS:** 91.25.Qi, 02.30.Zz, 41.20.-q

## 1 引言

频率测深法是一种可控源频率域电磁测深方法, 通常采用电偶极源激发电磁场并保持收发距不变, 通过观测不同频率下电磁场变化特征来研究地层电阻率在纵向上的分布. 由于具有较大的勘探深度与较强的分辨能力, 频率测深法在研究地壳和上地幔的物质结构, 探测油气与矿产资源、煤田、地热田以及地下水资源等领域已经成为不可缺少的地球物理勘探方法之一<sup>[1]</sup>. 如何从实际测量数据有效反演出地层电导率及层界面深度是频率测深资料处理和解释中非常重要的技术, 一维反演已经得到了较广泛的研究和应用<sup>[2,3]</sup>. 特别是 Occam 反演方法, 由于其不依赖于初始模型并且能够有效地避免多余构造而得到了广泛的应用<sup>[4-6]</sup>. 然而, 越来越多的理论研究和实际观测资料均表明, 自然界的很多岩性存在着较明显的各向异性<sup>[7]</sup>. 例如, 由于泥岩和砂岩的电阻率相差很大, 砂泥岩薄

交互地层在水平方向和垂直方向上的电阻率完全不同. 此外, 地层裂缝的有规律定向排列也会产生大的电各向异性. 地层各向异性对频率测深的测量结果有较大影响<sup>[8-12]</sup>, 在进行资料处理时如果忽略各向异性效应, 往往会得不到正确的处理结果. 最近几年来, 各向异性地层中可控源大地电磁资料处理与反演问题也已成为非常重要的研究课题. 例如, 方位角各向异性地层的可控源音频大地电磁数据的一维反演<sup>[13]</sup>、各向异性地层的大地电磁数据的一维反演<sup>[14,15]</sup>等均已得到研究. 需要指出的是, 可控源电磁资料反演涉及到电磁响应数值模拟、Fréchet 导数计算及模型参数修改等方面的内容, 特别是 Fréchet 导数的快速准确计算是整个反演过程中非常重要的关键技术, 对于提高反演效率和反演质量具有重要意义. 然而, 在目前所有的有关一维反演的文献中, 均没有建立可有效计算 Fréchet 导数的算法, 从而使可控源电磁资料反演理论存在缺憾.

\* 国家自然科学基金 (批准号: 40874058) 和吉林大学基本科研基金 (批准号: 200903318, 201001006) 资助的课题.

† E-mail: wanghn@jlu.edu.cn

本文将研究建立一套水平层状横向同性 (TI) 地层中频率测深资料的全参数反演算法, 以便能够同时确定各个地层的横向和纵向电阻率及地层界面深度. 首先利用水平层状 TI 地层电磁场并矢 Green 函数在频率空间域中的解析解 [16], 并利用样条插值 [17] 与 Lommel 积分公式 [18] 给出 Sommerfeld 积分的半解析算法, 实现水平层状 TI 地层中频率测深响应的快速正演. 然后结合摄动理论以及 Fourier 逆变换公式将频率测深响应 Fréchet 导数表示成关于纵向和径向坐标的二重积分, 并通过纵向上的解析方法和径向上的半解析算法快速计算 Fréchet 导数. 在此基础上利用规范化处理和奇异值分解技术, 给出迭代反演过程 [19]. 最后, 利用数值结果考察了反演理论的有效性, 并且进一步讨论了测量数据存在 5% 和 10% 随机噪声对反演结果的影响.

## 2 正演理论

频率测深的发射源和接收点往往位于地面, 发射源采用水平电偶极子, 偶极矩为  $\mathbf{J}_x$ , 偶极矩方向与发射源位置  $\mathbf{r}_s$  和接收点位置  $\mathbf{r}_r$  的连线方向垂直, 其基本原理是保持接收点与发射源之间的距离  $L$  固定不变同时测量不同发射频率  $f$  下两个相互正交的电场  $E_x$  分量和磁场  $H_y$  分量来确定地下电阻率的空间分布. 对于  $N$  层水平层状 TI 地层模型 (图 1), 各个地层的横向、纵向电导率和地层界面深度分别用  $\sigma_{hn}, \sigma_{vn}$  和  $d_n (n = 1, 2, \dots, N)$  表示, 整个地层电导率空间分布是分片常数函数, 且可以表示为 [19]

$$\bar{\sigma}(z) = \sum_{N=1}^{n-1} \bar{\sigma}_n [H(z - d_n^+) - H(z - d_{(n+1)}^-)] + \bar{\sigma}_N H(z - d_N^+), \quad (1)$$

其中,  $k_x$  和  $k_y$  分别为  $x$  方向和  $y$  方向的波数,  $k_\rho = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$ ,  $V_i^q(z, z_s)$  和  $I_i^q(z, z_s)$  (或  $V_v^q(z, z_s)$  和  $I_v^q(z, z_s)$ ) 分别表示位于  $z_s$  的 1 A 并联脉冲电流

其中,  $\bar{\sigma}_n$  为地层  $n$  中的电导率张量,  $\bar{\sigma}_n = \text{diag}(\sigma_{hn}, \sigma_{hn}, \sigma_{vn})$ ;  $H(z)$  为 Heaviside 函数,

$$H(z) = \begin{cases} 1 & (z \geq 0), \\ 0 & (z < 0); \end{cases}$$

上标符号“±”分别对应变量的上下极限.

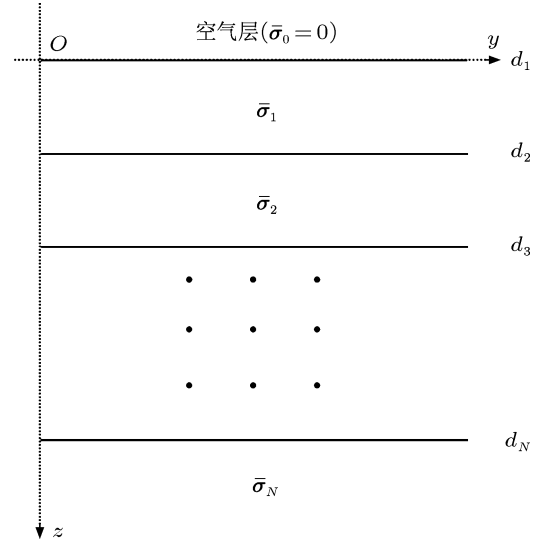


图 1 地层模型

频率测深正演响应需要求解如下的 Maxwell 方程:

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_s) = i\omega\mu\mathbf{H}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_s), \quad (2)$$

$$\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_s) = \bar{\sigma}^*(\mathbf{r})\mathbf{E}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_s) + \mathbf{J}_x\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_s),$$

其中,  $\bar{\sigma}^* = \bar{\sigma} - i\omega\epsilon$  为复电导率张量,  $\mu$  和  $\epsilon$  分别为地层的磁导率和介电常数 (假定为常数). 选取偶极子中心为坐标原点, 偶极矩方向为  $x$  方向, 则  $\mathbf{J}_x = J_x(1, 0, 0)^T$ . 对 (2) 式中  $x$  变量和  $y$  变量进行二维 Fourier 变换, 利用文献 [13] 中层状各向异性地层中电流源并矢 Green 函数  $\bar{\mathbf{G}}^{JE}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  和  $\bar{\mathbf{G}}^{JH}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  的定义及其在频率波数域中的解析解 (附录 A), 容易得到方程 (2) 在频率波数域中的解, 即

$$\tilde{\mathbf{E}}(k_x, k_y, z; \mathbf{r}_s) = J_x \left( -\frac{1}{k_\rho^2} (k_x^2 V_i^e + k_y^2 V_i^h) \frac{k_x k_y}{k_\rho^2} (-V_i^e + V_i^h) \frac{ik_x V_v^e}{\sigma_v^*(z_s)} \right)^T, \quad (3)$$

$$\tilde{\mathbf{H}}(k_x, k_y, z; \mathbf{r}_s) = J_x \left( \frac{k_x k_y}{k_\rho^2} (I_i^e - I_i^h) \frac{1}{k_\rho^2} (k_y^2 I_i^e + k_x^2 I_i^h) - \frac{ik_y I_v^e}{\sigma_v^*(z_s)} \right)^T,$$

源 (或 1 V 串联脉冲电压源) 在深度  $z$  处的电压和电流, 上标  $q = e, h$  分别表示横磁波或横电波.

对 (3) 式进行 Fourier 逆变换并利用 Bessel 函

数积分公式 (附录 B), 频率空间域中的电场水平分量  $E_x$  和磁场水平分量  $H_y$  的解可整理为如下形式的 Sommerfeld 型积分:

$$E_x(\mathbf{r}, \mathbf{r}_s) = -\frac{J_x}{2\pi} \int_0^{+\infty} V_i^e(z, z_s) [J_0(k_\rho \rho) \cos^2 \theta - \frac{\cos 2\theta}{k_\rho \rho} J_1(k_\rho \rho)] k_\rho dk_\rho - \frac{J_x}{2\pi} \int_0^{+\infty} V_i^h(z, z_s) [J_0(k_\rho \rho) \sin^2 \theta + \frac{\cos 2\theta}{k_\rho \rho} J_1(k_\rho \rho)] k_\rho dk_\rho, \quad (4)$$

$$H_y(\mathbf{r}, \mathbf{r}_s) = -\frac{J_x}{2\pi} \int_0^{+\infty} I_i^e(z, z_s) [J_0(k_\rho \rho) \cos^2 \theta - \frac{\cos 2\theta}{k_\rho \rho} J_1(k_\rho \rho)] k_\rho dk_\rho - \frac{J_x}{2\pi} \int_0^{+\infty} I_i^h(z, z_s) [J_0(k_\rho \rho) \sin^2 \theta + \frac{\cos 2\theta}{k_\rho \rho} J_1(k_\rho \rho)] k_\rho dk_\rho, \quad (5)$$

其中,

$$\rho = \sqrt{(x - x_s)^2 + (y - y_s)^2},$$

$$\cos \theta = (x - x_s) / \rho.$$

利用样条插值和 Lommel 积分公式能够快速计算 (4) 和 (5) 式的积分 (附录 C), 测量地层的视电阻率  $\rho_a$  和相位差  $\phi_a$  可分别表示为

$$\rho_a = \frac{1}{\omega \mu} \frac{|E_x|^2}{|H_y|^2}, \quad (6)$$

$$\phi_a = \text{Im}(\ln \frac{E_x}{H_y}).$$

$$\delta E_x(\mathbf{r}_r, \mathbf{r}_s) = \int_{\Omega} \begin{pmatrix} G_{11}^{JE}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_r) & G_{21}^{JE}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_r) & G_{31}^{JE}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_r) \end{pmatrix} \delta \bar{\sigma}(\mathbf{r}) \mathbf{E}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_s) d\mathbf{r}, \quad (10)$$

$$\delta H_y(\mathbf{r}_r, \mathbf{r}_s) = \int_{\Omega} \begin{pmatrix} G_{12}^{JH}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_r) & G_{22}^{JH}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_r) & G_{32}^{JH}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_r) \end{pmatrix} \delta \bar{\sigma}(\mathbf{r}) \mathbf{E}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_s) d\mathbf{r}.$$

(10) 式中的等号右端被积函数中电场强度与 Green 函数各个分量需要通过 Sommerfeld 积分确定, 再加上体积分, 涉及到一个五重积分, 如果直接计算工作量往往较大. 为简化计算过程并提高效率, 将电场强度、Green 函数各个分量的二维 Fourier 逆变换和 (7) 式代入 (10) 式, 并利用积分公式

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\{i[(k_x - k'_x)x + (k_y - k'_y)y]\} dx dy = 4\pi^2 \delta(k_x - k'_x) \delta(k_y - k'_y) \quad (11)$$

### 3 Fréchet 导数的快速计算

如果地层  $n$  的电导率  $\bar{\sigma}_n$  和地层界面  $d_n$  分别存在微小摄动  $\delta \bar{\sigma}_n$  和  $\delta d_n$ , 则通过对 (1) 式微分得到地下电导率的变化为 [19]

$$\delta \bar{\sigma}(z) = \sum_{n=1}^{N-1} \delta \bar{\sigma}_n [H(z - d_n^+) - H(z - d_{n+1}^-)] + \delta \bar{\sigma}_N H(z - d_N^+) + \sum_{n=2}^N (\bar{\sigma}_{n-1} \delta(z - d_n^-) - \bar{\sigma}_n \delta(z - d_n^+)) \delta d_n. \quad (7)$$

这时, 通过对 (2) 式变分得到模型参数摄动导致的电磁场微小变化为

$$\nabla \times \delta \mathbf{E}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_s) = i\omega \mu \delta \mathbf{H}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_s), \quad (8)$$

$$\nabla \times \delta \mathbf{H}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_s) = \bar{\sigma}^* \delta \mathbf{E}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_s) + \delta \bar{\sigma} \mathbf{E}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_s).$$

将附录 A 中 (A1) 式和 (8) 式代入到 Green 函数第二公式可得

$$\delta \mathbf{E}(\mathbf{r}_r, \mathbf{r}_s) = \int_{\Omega} [\bar{\mathbf{G}}^{JE}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_r)]^T \times \delta \bar{\sigma}(\mathbf{r}) \mathbf{E}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_s) d\mathbf{r}, \quad (9)$$

$$\delta \mathbf{H}(\mathbf{r}_r, \mathbf{r}_s) = \int_{\Omega} [\bar{\mathbf{G}}^{JH}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_r)]^T \times \delta \bar{\sigma}(\mathbf{r}) \mathbf{E}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_s) d\mathbf{r}.$$

电场水平分量  $E_x$  和磁场水平分量  $H_y$  的变化为

以及地层边界上电场的连续性条件, (10) 式可以简化为如下线性化方程:

$$\delta E_x = J_x \sum_{n=1}^N (A_{\sigma_{hn}} \delta \sigma_{hn} + A_{\sigma_{vn}} \delta \sigma_{vn}) + J_x \sum_{n=2}^N A_{d_n} \delta d_n, \quad (12)$$

$$\delta H_y = J_x \sum_{n=1}^N (B_{\sigma_{hn}} \delta \sigma_{hn} + B_{\sigma_{vn}} \delta \sigma_{vn})$$

$$+ J_x \sum_{n=2}^N B_{d_n} \delta d_n,$$

其中各个系数是电场和磁场相对于模型参数的 Fréchet 导数, 且可表示成如下的二重积分形式:

$$\begin{aligned} A_{\sigma_{\text{hn}}} = & \frac{1}{2\pi} \left\{ \int_0^{+\infty} \int_{d_n}^{d_{n+1}} [V_i^e(z, z_r) V_i^e(z, z_s) \cos^2 \theta \right. \\ & + V_i^h(z, z_r) V_i^h(z, z_s) \sin^2 \theta] \\ & \times J_0(k_\rho \rho) k_\rho dz dk_\rho \\ & - \frac{\cos 2\theta}{\rho} \int_0^{+\infty} \int_{d_n}^{d_{n+1}} \\ & \times [V_i^e(z, z_r) V_i^e(z, z_s) \\ & - V_i^h(z, z_r) V_i^h(z, z_s)] \\ & \times J_1(k_\rho \rho) dz dk_\rho \left. \right\}, \quad (13a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_{\sigma_{\text{vn}}} = & \frac{1}{2\pi\omega^2 \varepsilon_z^2(z)} \left\{ -\cos^2 \theta \int_0^{+\infty} \int_{d_n}^{d_{n+1}} I_i^e(z, z_r) \right. \\ & \times I_i^e(z, z_s) J_0(k_\rho \rho) k_\rho^3 dz dk_\rho \\ & + \frac{\cos 2\theta}{\rho} \int_0^{+\infty} \int_{d_n}^{d_{n+1}} I_i^e(z, z_r) \\ & \times I_i^e(z, z_s) J_1(k_\rho \rho) k_\rho^2 dz dk_\rho \left. \right\}, \quad (13b) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_{\sigma_{\text{hn}}} = & -\frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} \int_{d_n}^{d_{n+1}} [I_i^h(z, z_r) V_i^e(z, z_s) \cos^2 \theta \\ & + I_i^e(z, z_r) V_i^h(z, z_s) \sin^2 \theta] J_0(k_\rho \rho) k_\rho dz dk_\rho \\ & + \frac{\cos 2\theta}{2\pi\rho} \int_0^{+\infty} \int_{d_n}^{d_{n+1}} [I_i^h(z, z_r) V_i^e(z, z_s) \\ & - I_i^e(z, z_r) V_i^h(z, z_s)] J_1(k_\rho \rho) dz dk_\rho, \quad (13c) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_{\sigma_{\text{vn}}} = & -\frac{i \cos^2 \theta}{2\pi\omega\mu\sigma_v^*(z)} \int_0^{+\infty} \int_{d_n}^{d_{n+1}} V_i^h(z, z_r) \\ & \times I_i^e(z, z_s) J_0(k_\rho \rho) k_\rho^3 dz dk_\rho \\ & + \frac{i \cos 2\theta}{2\pi\omega\mu\sigma_v^*(z)\rho} \int_0^{+\infty} \int_{d_n}^{d_{n+1}} V_i^h(z, z_r) \\ & \times I_i^e(z, z_s) J_1(k_\rho \rho) k_\rho^2 dz dk_\rho, \quad (13d) \end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned} A_{d_n} = & (\sigma_{\text{h}(n-1)} - \sigma_{\text{hn}}) I_h(d_n^+, z_r, z_s) \\ & + \sigma_{\text{vn}} (\sigma_{\text{vn}} / \sigma_{\text{v}(n-1)} - 1) I_v(d_n^+, z_r, z_s), \quad (14) \\ B_{d_n} = & (\sigma_{\text{h}(n-1)} - \sigma_{\text{hn}}) J_h(d_n^+, z_r, z_s) \\ & + \sigma_{\text{vn}} (\sigma_{\text{vn}} / \sigma_{\text{v}(n-1)} - 1) J_v(d_n^+, z_r, z_s). \end{aligned}$$

这里,

$$I_h(z, z_r, z_s) = \frac{1}{2\pi} \left\{ \int_0^{+\infty} [V_i^e(z, z_r) V_i^e(z, z_s) \cos^2 \theta \right.$$

$$\begin{aligned} & + V_i^h(z, z_r) V_i^h(z, z_s) \sin^2 \theta] \\ & \times J_0(k_\rho \rho) k_\rho dk_\rho \\ & - \frac{\cos 2\theta}{\rho} \int_0^{+\infty} \\ & \times [V_i^e(z, z_r) V_i^e(z, z_s) \\ & - V_i^h(z, z_r) V_i^h(z, z_s)] J_1(k_\rho \rho) dk_\rho \left. \right\}, \quad (15a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_v(z, z_r, z_s) = & \frac{1}{2\pi\omega^2 \varepsilon_z^2(z)} \left\{ -\cos^2 \theta \int_0^{+\infty} I_i^e(z, z_r) \right. \\ & \times I_i^e(z, z_s) J_0(k_\rho \rho) k_\rho^3 dz dk_\rho \\ & + \frac{\cos 2\theta}{\rho} \int_0^{+\infty} I_i^e(z, z_r) I_i^e(z, z_s) \\ & \times J_1(k_\rho \rho) k_\rho^2 dk_\rho \left. \right\}, \quad (15b) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J_h(z, z_r, z_s) = & -\frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} [I_i^h(z, z_r) V_i^e(z, z_s) \cos^2 \theta \\ & + I_i^e(z, z_r) V_i^h(z, z_s) \sin^2 \theta] \\ & \times J_0(k_\rho \rho) k_\rho dk_\rho \\ & \times [I_i^h(z, z_r) V_i^e(z, z_s) \\ & - I_i^e(z, z_r) V_i^h(z, z_s)] \\ & \times J_1(k_\rho \rho) dk_\rho, \quad (15c) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J_v(z, z_r, z_s) = & -\frac{i \cos^2 \theta}{2\pi\omega\mu\sigma_v^*(z)} \int_0^{+\infty} V_i^h(z, z_r) \\ & \times I_i^e(z, z_s) J_0(k_\rho \rho) k_\rho^3 dk_\rho \\ & + \frac{i \cos 2\theta}{2\pi\omega\mu\sigma_v^*(z)\rho} \int_0^{+\infty} V_i^h(z, z_r) \\ & \times I_i^e(z, z_s) J_1(k_\rho \rho) k_\rho^2 dk_\rho. \quad (15d) \end{aligned}$$

由于  $V_i^q(z, z_s)$  和  $I_i^q(z, z_s)$  (或  $V_v^q(z, z_s)$  和  $I_v^q(z, z_s)$ ) 均是变量  $z$  的解析函数, 所以 (13) 式中关于变量  $z$  的积分可以解析求解, 而 (13) 和 (15) 式中关于  $k_\rho$  的积分与正演结果类似, 通过附录 C 中的样条插值和 Lommel 积分公式, 可快速计算出 Fréchet 导数. 对 (6) 式微分, 得到视电阻率和相位差变化与电场、磁场摄动间的关系为

$$\begin{aligned} \delta \ln \rho_a = & 2\text{Re}(\delta \ln \frac{E_x}{H_y}) \\ = & 2\text{Re}(\frac{\delta E_x}{E_x} - \frac{\delta H_y}{H_y}), \quad (16) \end{aligned}$$

$$\delta\phi_a = -\text{Im} \left[ \frac{\delta E_x}{E_x} - \frac{\delta H_y}{H_y} \right]. \quad (17)$$

将(12)式代入(16)和(17)式,经整理可以将视电阻率和相位差变化与模型参数摄动间的关系表示成如下矩阵乘积的形式:

$$\delta\mathbf{y} = \mathbf{F}\delta\mathbf{q}, \quad (18)$$

其中  $\delta\mathbf{y}$  是由视电阻率和相位差变化组成的列向量,

$$\delta\mathbf{y} = (\delta \ln \rho_a, \delta\phi_a)^T;$$

$\delta\mathbf{q}$  是模型参数的摄动,

$$\delta\mathbf{q} = (\delta \ln \sigma_{h1}, \delta \ln \sigma_{h2}, \dots, \delta \ln \sigma_{hN},$$

$$\delta \ln \sigma_{v1}, \delta \ln \sigma_{v2}, \dots, \delta \ln \sigma_{vN},$$

$$\delta \ln d_2, \dots, \delta \ln d_N)^T;$$

$\mathbf{F}$  为规范化的 Fréchet 导数矩阵<sup>[19,20]</sup>.  $\delta\mathbf{y}$  和  $\delta\mathbf{q}$  采用对数形式表示,一是保证电导率各分量和地层界面  $d_n$  恒为正数;二是实际地层电导率变化范围很大,用对数表示可以大大减小参数波动,降低非线性响应对反演结果的影响<sup>[6]</sup>.

#### 4 快速迭代反演理论

设

$$\mathbf{y}^{\text{obs}} = (\rho_{a,1}, \rho_{a,2}, \dots, \rho_{a,M},$$

$$\phi_{a1}, \phi_{a2}, \dots, \phi_{a,M})^T$$

是不同频率点测得的视电阻率和相位差组成

的数据向量,一维频率测深反演的目的就是在某个模型空间上搜寻出一个模型参数  $\mathbf{m} = (\sigma_{h1}, \sigma_{h2}, \dots, \sigma_{hN}, \sigma_{v1}, \sigma_{v2}, \dots, \sigma_{vN}, d_2, d_3, \dots, d_N)^T$ ,使其对应的理论响应  $\mathbf{y} = \mathbf{y}(\mathbf{m})$  能够最佳拟合于  $\mathbf{y}^{\text{obs}}$ . 由于理论响应  $\mathbf{y} = \mathbf{y}(\mathbf{m})$  本身是非线性的,所以需要采用如下的迭代方法确定反问题的解<sup>[19]</sup>:

$$\mathbf{m}^{(k+1)} = [\mathbf{I} + \text{diag}(\delta\mathbf{q}^{(k)})]\mathbf{m}^{(k)} \quad (k = 0, 1, 2, \dots, K), \quad (19)$$

其中,  $\mathbf{I}$  为单位矩阵,  $\mathbf{m}^{(0)}$  为模型向量初值,  $\mathbf{m}^{(k)}$  为第  $k$  次迭代反演结果,  $K$  为预定的迭代总次数,  $\delta\mathbf{q}^{(k)}$  为(18)式的广义解.

对规范化处理后的 Fréchet 导数矩阵  $\mathbf{F}$  进行奇异值分解  $\mathbf{F} = \mathbf{U}\mathbf{\Lambda}\mathbf{V}^T$ , 代入(18)式可以得到模型参数的摄动  $\delta\mathbf{q}^{(k)}$  为

$$\delta\mathbf{q}^{(k)} = \mathbf{V}\mathbf{\Lambda}^{-1}\mathbf{U}^T\Delta\mathbf{y}^{(k)}, \quad (20)$$

其中  $\Delta\mathbf{y}^{(k)} = \text{diag}(\mathbf{y}^{\text{obs}-1})[\mathbf{y}^{\text{obs}} - \mathbf{y}(\mathbf{m}^{(k)})]$  为迭代模型响应与真实地层模型响应的相对误差. 这里为了避免小的奇异值导致反演结果的不稳定,采用阻尼最小二乘法,对奇异值项添加一个适当的阻尼因子  $\alpha$ , 这样得到广义解为

$$\delta\mathbf{q}^{(k)} = \mathbf{V}(\mathbf{\Lambda} + \alpha\mathbf{I})^{-1}\mathbf{U}^T\Delta\mathbf{y}^{(k)}. \quad (21)$$

同时,为了避免迭代过程中  $\delta\mathbf{q}^{(k)}$  各个分量可能波动太大,影响反演效果,这里将  $\delta q_l^{(k)}$  换成  $\exp(-\omega |\delta q_l^{(k)}|) \delta q_l^{(k)}$ , 其中  $\delta q_l^{(k)}$  为  $\delta\mathbf{q}^{(k)}$  的第  $l$  分量,  $\omega > 0$  为衰减因子<sup>[19]</sup>.

表 1 三层水平层状 TI 模型参数

层数	层界面深度 $d/m$	横向电阻率 $\rho_h/\Omega m$	纵向电阻率 $\rho_v/\Omega m$	各向异性系数 $\lambda$
1	0	50	450	3
2	100	10	90	3
3	200	100	100	1

表 2 四层水平层状 TI 模型参数

层号	层界面深度 $d/m$	横向电阻率 $\rho_h/\Omega m$	纵向电阻率 $\rho_v/\Omega m$	各向异性系数 $\lambda$
1	0	100	400	2
2	100	10	90	3
3	190	50	450	3
4	490	100	100	1

## 5 数值结果

为了检验本文提出的相关算法并考察反演效果, 分别在三层和四层水平层状 TI 模型上进行试验. 试验中设定发射源频率范围为 0.1—10 kHz, 其中三层模型的接收点与发射源之间的距离  $L = 5$  km, 四层模型的接收点与发射源之间的距离  $L = 8$  km, 地层模型参数分别列于表 1 和表 2, 各向异性系数定义为

$$\lambda = \sqrt{\rho_v/\rho_h}.$$

### 5.1 Fréchet 导数快速算法的检验

为检验本文提出的 Fréchet 导数的快速算法, 将分别采用快速算法和有限差分方法(即  $\partial \ln y/\partial \ln x \approx (\Delta y_a/y_a)/(\Delta x/x)$ ) 计算得到的规范化 Fréchet 导数进行比较. 图 2 所示为利用差分法和摄动法得到的三层模型中视电阻率和相位差响应对地层模型参数的 Fréchet 导数对比, 其中  $F_{\rho-h,n}$ ,  $F_{\rho-v,n}$  和  $F_{\rho-d,n}$  分别为视电阻率对地层  $n$  的模型参数  $\sigma_{hn}$ ,  $\sigma_{vn}$  和  $d_n$  的 Fréchet 导数,  $F_{\phi-h,n}$ ,  $F_{\phi-v,n}$  和  $F_{\phi-d,n}$  分别为相位差对地层  $n$  的模型参数  $\sigma_{hn}$ ,  $\sigma_{vn}$  和  $d_n$  的 Fréchet 导数. 比较表明, 两种算法所得结果完全符合. 在同一台机器上两种方法所用的 CPU 时间分别为 6.2 和 14.8 s, 快速算法比差分法计算效率高 2 倍以上.

图 2 的结果显示, 频率测深数据对浅层纵向电导率  $\sigma_v$  的 Fréchet 导数值均很小, 表明测深数据对浅层纵向电导率  $\sigma_v$  变化的灵敏度较低; 但在低频段, 测深数据对  $\sigma_{v3}$  的 Fréchet 导数明显增大, 说明电磁测深的低频段数据对深部地层纵向电导率的变化有明显反映. 产生这种现象的主要原因可解释如下: 图 2 中采用的接收点与发射源之间的距离  $L$  固定为 5 km, 由于高频电磁场的波长较短, 该距离接收的高频电磁信号主要反映电磁场的远区特征, 高频电磁波近似于完全垂直入射到地表, 在地下只能感应出水平方向环流, 因此高频电磁场只对地层横向电导率变化有反应, 对纵向电导率  $\sigma_v$  变化不敏感. 当频率很低时, 其相应的波长变长, 接收点将对应于电磁场的近区和过渡带, 低频电磁散射特点更倾向于类似点电流源在半空间的散射, 在地下近似呈现出半球形的放射状, 感应环流不再只沿水平

方向, 整个电磁场对横向电导率和纵向电导率的变化均相关. 以上现象也可用定量方法进一步加以解释, 我们知道电磁场远区满足的条件为  $L > 5\delta$ , 其中  $\delta = 503\sqrt{\rho/f}$  为趋肤深度, 表 1 中三层模型的平均电导率  $\rho \approx 100 \Omega\text{m}$ , 当收发距固定为  $L = 5$  km, 远区对应的发射频率为  $f > 25$  Hz, 相应的探测深度为  $d = 356\sqrt{\rho/f} > 700$  m, 显然大于第二边界深度. 因此,  $f > 25$  Hz 的电磁测深数据对于纵向电导率均不敏感, 导致图 2 中高频测深数据对纵向电导率  $\sigma_v$  的 Fréchet 导数值均很小. 但对于  $f < 25$  Hz 的电磁测深数据, 随着频率逐渐降低, 趋肤深度  $\delta$  也随之增加, 5 km 收发距对应的电磁场将逐渐表现为近区和过渡带的特征, 使得  $\sigma_{v3}$  的 Fréchet 导数值也逐渐增大.

### 5.2 反演结果

为了检验全参数快速迭代反演理论, 这里设定各个地层的初始电阻率为其真值的 1/3, 各个地层层厚的初始相对误差为 30%. 图 3 是三层模型上的模型参数真值、初值与反演结果以及输入资料与反演结果理论合成资料的对比. 结果显示, 通过迭代反演, 模型参数的真值得到较好的恢复, 且横向电阻率的反演结果比纵向电阻率的反演结果要好(图 2). 由图 3 可知, 反演结果的合成响应和输入响应基本重合.

图 4 是四层模型上的模型参数真值、初值与反演结果以及输入资料与反演结果理论合成资料的对比, 且地层电阻率和层厚的初始误差与图 3 相同(电阻率为其真值的 1/3, 层厚初始相对误差为 30%). 图 4 中同样显示出满意的反演效果.

为检验反演算法的抗噪能力, 对三层模型和四层模型的输入资料均分别添加 5% 和 10% 随机白噪声, 利用上述的初始模型进行反演. 图 5 和图 6 是在分别添加 5% 和 10% 随机白噪声后三层模型的反演结果, 图 7 和图 8 是分别添加 5% 和 10% 噪声的四层模型的反演结果. 反演结果显示, 具有较大 Fréchet 导数的地层参数, 其反演结果的抗噪能力较强. 例如, 地层横向电阻率、层界面深度及最下层的纵向电阻率, 在 10% 噪声情况下这些模型参数真值依然能得到较好的恢复. 而 Fréchet 导数较小的地层参数, 其反演结果的抗噪能力明显变

弱. 例如, 三层模型中的  $\sigma_{v1}$  和  $\sigma_{v2}$  以及四层模型中的  $\sigma_{v1}$ ,  $\sigma_{v2}$  和  $\sigma_{v3}$ , 在 5% 的噪声情况下反演结果

就存在较大的误差, 而在 10% 的噪声情况下已经得不到有效的反演结果.

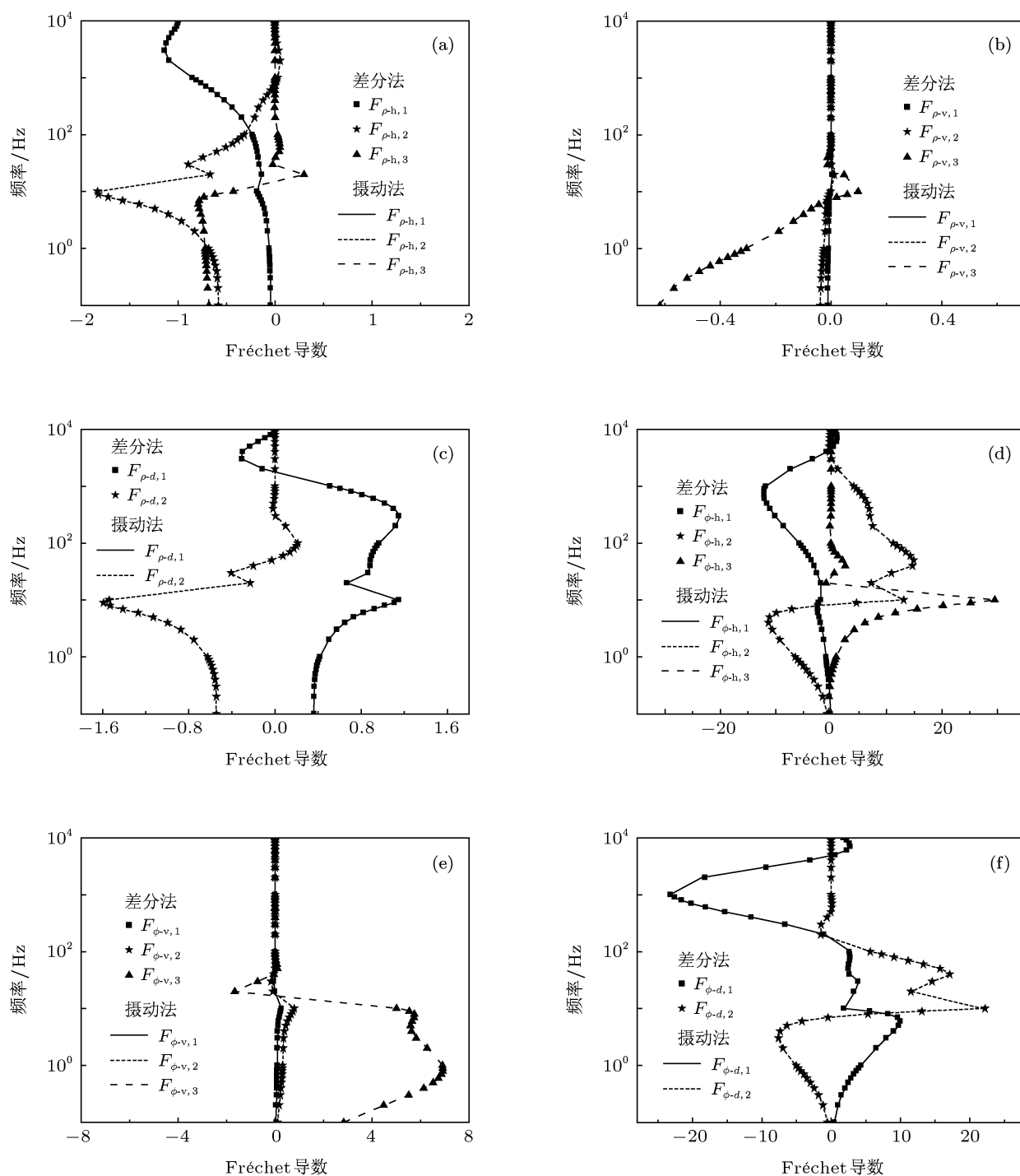


图 2 摄动法与差分法得到的三层模型的 Fréchet 导数比较 (a) $F_{\rho-h,n}$ ; (b) $F_{\rho-v,n}$ ; (c) $F_{\rho-d,n}$ ; (d) $F_{\phi-h,n}$ ; (e) $F_{\phi-v,n}$ ; (f) $F_{\phi-d,n}$

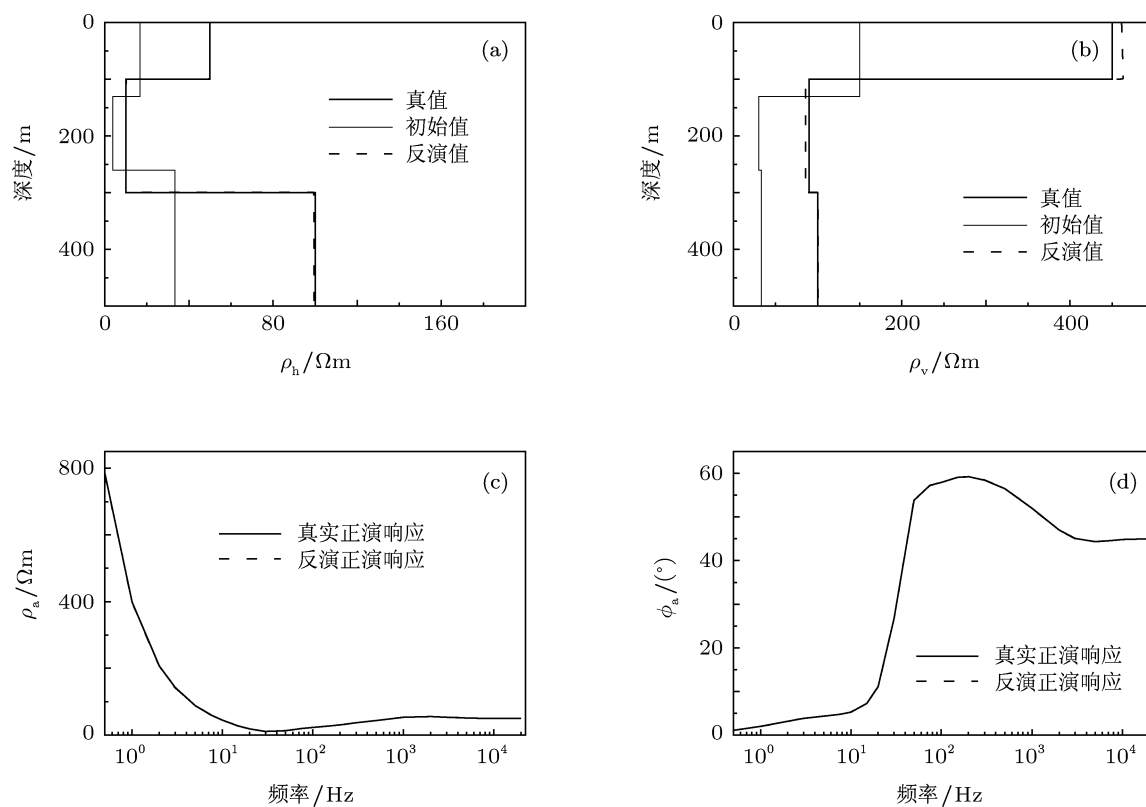


图3 不含噪声的三层模型的反演结果 (a) 横向电阻率; (b) 纵向电阻率; (c) 视电阻率响应; (d) 视相位响应

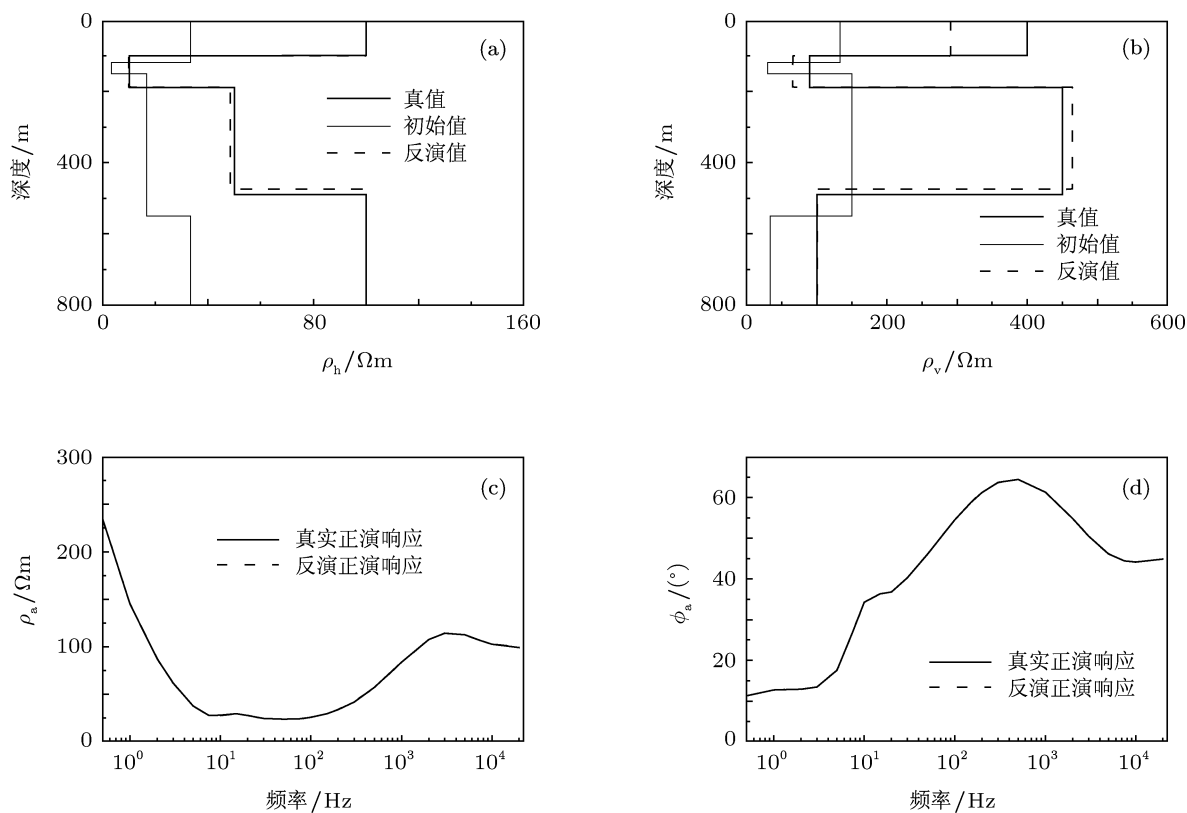


图4 不含噪声的四层模型的反演结果 (a) 横向电阻率; (b) 纵向电阻率; (c) 视电阻率响应; (d) 视相位响应



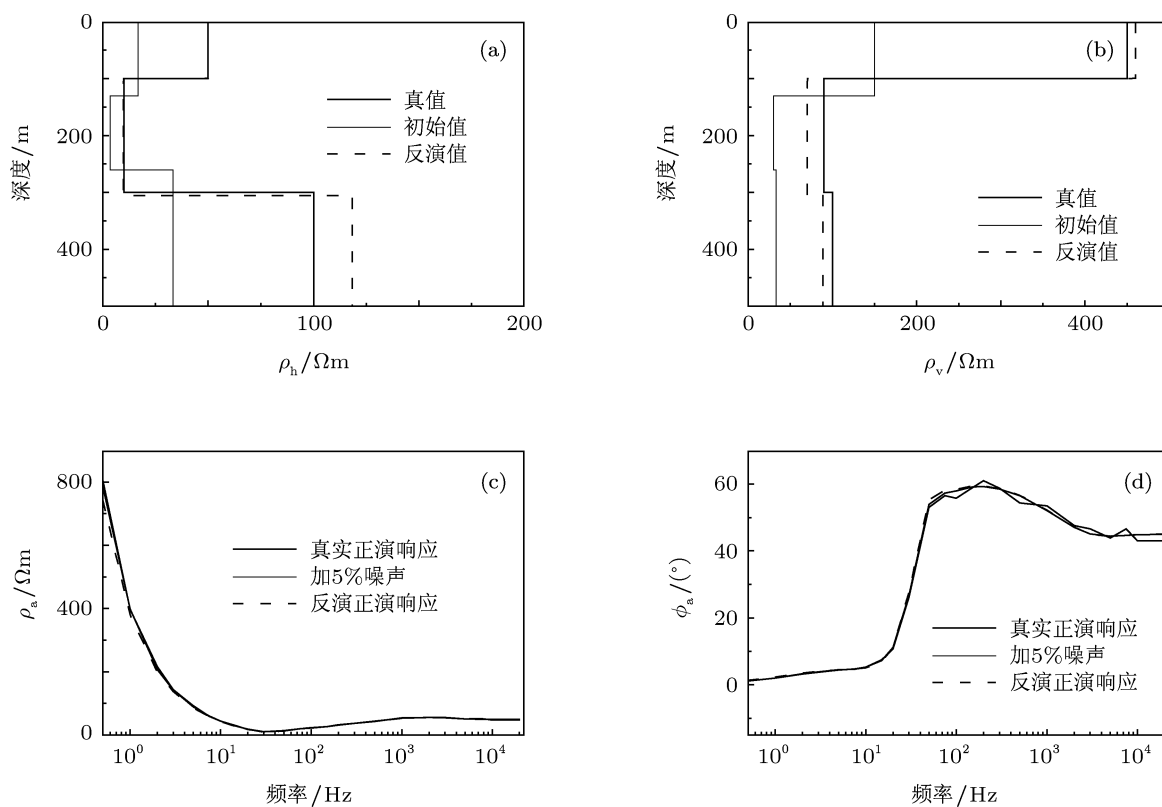


图5 含5%噪声的三层模型的反演结果 (a) 横向电阻率; (b) 纵向电阻率; (c) 视电阻率响应; (d) 视相位响应

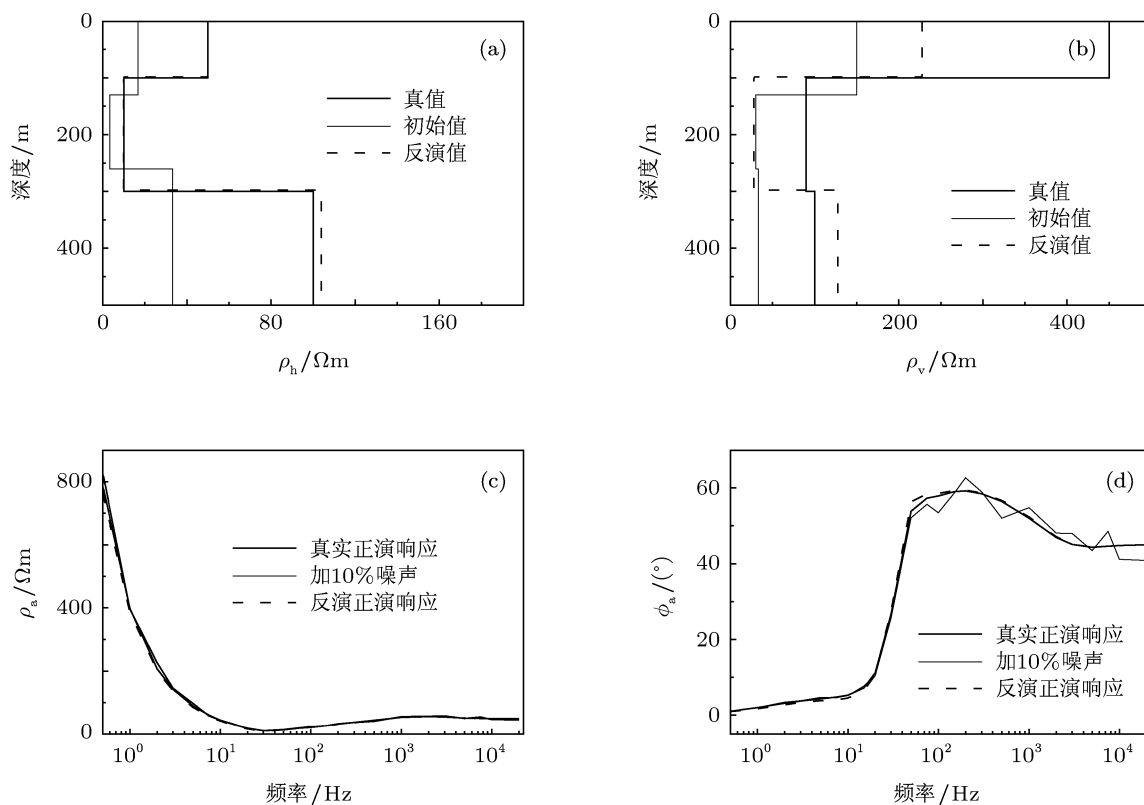


图6 含10%噪声的三层模型的反演结果 (a) 横向电阻率; (b) 纵向电阻率; (c) 视电阻率响应; (d) 视相位响应

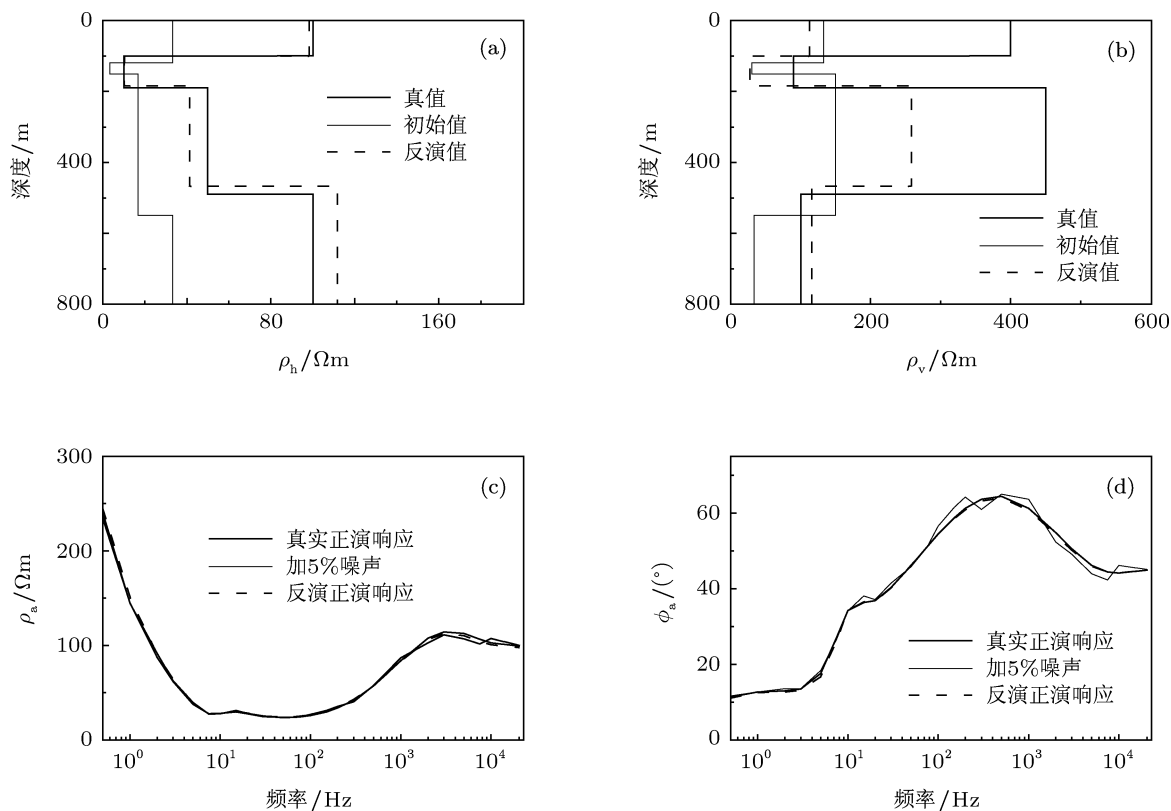


图7 含5%噪声的四层模型的反演结果 (a) 横向电阻率; (b) 纵向电阻率; (c) 视电阻率响应; (d) 视相位响应

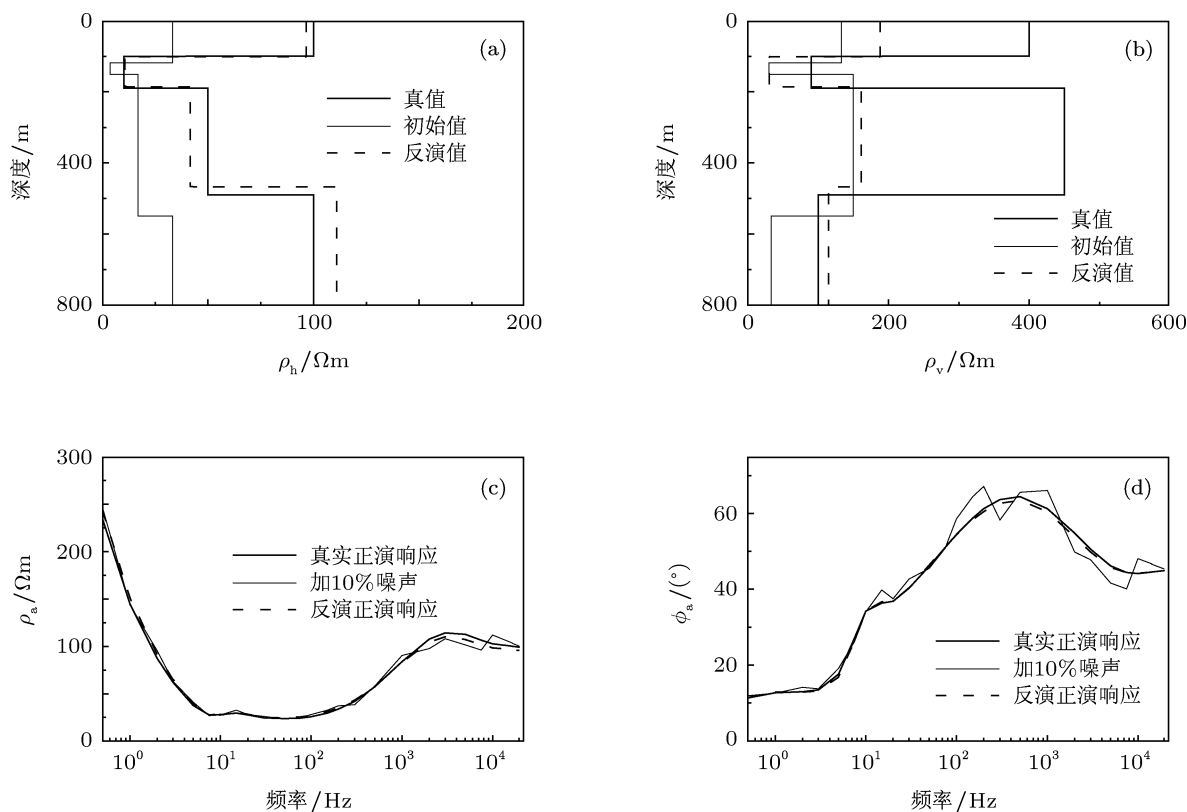


图8 含10%噪声的四层模型的反演结果 (a) 横向电阻率; (b) 纵向电阻率; (c) 视电阻率响应; (d) 视相位响应

## 6 结论

本文研究建立了一套水平层状 TI 地层中频率测深资料的全参数快速迭代反演算法. 利用摄动理论, 结合水平层状介质中电磁场并矢 Green 函数在频率波数域中的解析解, 可以快速计算全参数 Fréchet 导数. 规范化 Fréchet 导数不仅可以反映出不同电磁测深资料对各个模型参数的灵敏度, 且通过奇异值分解技术并结合阻尼最小二乘法可以有效提高反演结果的稳定性和抗噪能力. 理论模型的数值结果表明: 横向电阻率和层界面深度的反演结果与模型符合很好, 加入噪声后依然能够得到较好的结果. 由于受频率测深方法本身的限制, 往往只有深部纵向电阻率的反演效果较好且具有良好

的抗噪能力; 但对于浅层地层的纵向电阻率的反演则只能在一定程度上改善初始模型, 当存在噪声时, 则得不到有效的反演结果.

## 附录 A 水平层状 TI 介质中的并矢 Green 函数及其表达式

电流源并矢 Green 函数  $\bar{\mathbf{G}}^{JE}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  和  $\bar{\mathbf{G}}^{JH}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  分别满足

$$\begin{aligned} \nabla \times \bar{\mathbf{G}}^{JE}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') &= i\omega\mu\bar{\mathbf{G}}^{JH}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'), \\ \nabla \times \bar{\mathbf{G}}^{JH}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') &= \sigma^*(\mathbf{r})\bar{\mathbf{G}}^{JE}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \\ &\quad + \bar{\mathbf{I}}\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \end{aligned} \quad (\text{A1})$$

通过对变量  $x, y$  进行 Fourier 变换并结合传输线理论, 可以得到频率波数域并矢 Green 函数的表达式

$$\tilde{\mathbf{G}}^{JE}(k_\rho; z, z') = \begin{pmatrix} -\frac{1}{k_\rho^2}(k_x^2 V_i^e + k_y^2 V_i^h) & \frac{k_x k_y}{k_\rho^2}(-V_i^e + V_i^h) & \frac{ik_x V_v^e}{\sigma_v^*(z')} \\ \frac{k_x k_y}{k_\rho^2}(-V_i^e + V_i^h) & -\frac{1}{k_\rho^2}(k_y^2 V_i^e + k_x^2 V_i^h) & \frac{ik_y V_v^e}{\sigma_v^*(z')} \\ \frac{ik_x}{\sigma_v^*(z)} I_i^e & \frac{ik_y}{\sigma_v^*(z)} I_i^e & \frac{1}{\sigma_v^*(z)} \frac{k_\rho^2 I_v^e - \delta(z, z')}{\sigma_v^*(z')} \end{pmatrix}, \quad (\text{A2})$$

$$\tilde{\mathbf{G}}^{JH}(k_\rho; z, z') = \begin{pmatrix} \frac{k_x k_y}{k_\rho^2}(I_i^e - I_i^h) & \frac{1}{k_\rho^2}(k_y^2 I_i^e + k_x^2 I_i^h) & -\frac{ik_y I_v^e}{\sigma_v^*(z')} \\ -\frac{1}{k_\rho^2}(k_x^2 I_i^e + k_y^2 I_i^h) & -\frac{k_x k_y}{k_\rho^2}(I_i^e - I_i^h) & \frac{ik_x I_v^e}{\sigma_v^*(z')} \\ \frac{k_y}{\omega\mu} V_i^h & -\frac{k_x}{\omega\mu} V_i^h & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{A3})$$

其中,  $k_x$  和  $k_y$  分别为  $x$  方向和  $y$  方向的波数,  $k_\rho = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$ ,  $V_i^q(z, z_s)$  和  $I_i^q(z, z_s)$  (或  $V_v^q(z, z_s)$  和  $I_v^q(z, z_s)$ ) 分别表示位于  $z_s$  的 1 A 并联脉冲电流源 (或 1 V 串联脉冲

电压源) 在深度  $z$  处的电压和电流, 上标  $q = e, h$  分别表示横磁波或横电波. 传输线 Green 函数在每个地层  $m$  中均有如下形式的解析解:

$$V_{i,m}^p(z, z') = \begin{cases} A_m^{v+}(\exp[-ik_{z,m}(z - d_{m+1})] + \tilde{R}_{m,m+1}^{(p,i)} \exp[-ik_{z,m}(d_{m+1} - z)]) & (z > z'), \\ A_m^{v-}(\exp[-ik_{z,m}(d_m - z)] + \tilde{R}_{m,m-1}^{(p,i)} \exp[-ik_{z,m}(z - d_m)]) & (z < z'), \end{cases} \quad (\text{A4})$$

$$I_{i,m}^p(z, z') = \frac{1}{ik_{z,m} Z_m^p} \frac{d}{dz} V_{i,m}^p(z, z'), \quad (\text{A5})$$

$$V_{v,m}^p(z, z') = \begin{cases} A_m^{i(+)}(\exp[-ik_{z,m}(z - d_{m+1})] + \tilde{R}_{m,m+1}^{(p,v)} \exp[-ik_{z,m}(d_{m+1} - z)]) & (z > z'), \\ A_m^{i(-)}(\exp[-ik_{z,m}(d_m - z)] + \tilde{R}_{m,m-1}^{(p,v)} \exp[-ik_{z,m}(z - d_m)]) & (z < z'), \end{cases} \quad (\text{A6})$$

$$V_{v,m}^p(z, z') = \frac{1}{ik_{z,m} Y_m^p} \frac{d}{dz} I_{v,m}^p(z, z'). \quad (\text{A7})$$

这里,  $A_m^{v\pm}$  和  $A_m^{i\pm}$  分别为地层  $m$  中的电位和电流场的振幅.  $\tilde{R}_{m,m+1}^{(p,i)}$  和  $\tilde{R}_{m,m-1}^{(p,i)}$  以及  $\tilde{R}_{m,m+1}^{(p,v)}$  和  $\tilde{R}_{m,m-1}^{(p,v)}$  分别为电流和电压源入射时的广义反射系数,  $k_m = \sqrt{i\mu\omega\sigma_m^*}$  为地层  $m$  的波数,  $k_\rho^2 = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$  为水平方向的波数,  $k_{z,m} = \sqrt{k_m^2 - k_\rho^2}$  为地层  $m$  中垂直方向的波数分量.  $Z_m^e = k_{z,m}/i\sigma_m^*$  和  $Y_m^e = 1/Z_m^e$  分别为地层  $m$  中横磁

波的波阻抗和波导,  $Z_m^h = \omega\mu/k_{z,m}$  和  $Y_m^h = 1/Z_m^h$  分别为地层  $m$  中横电波的波阻抗和波导.

### 附录 B Bessel 函数积分公式

Bessel 函数积分公式如下:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{k_x^2}{k_\rho^2} \exp(i[k_x(x_r - x_s) + k_y(y_r - y_s)]) dk_x dk_y \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} [J_0(k_\rho\rho) \cos^2\theta - \frac{\cos 2\theta}{k_\rho\rho} J_1(k_\rho\rho)] k_\rho dk_\rho, \end{aligned} \quad (B1)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{k_y^2}{k_\rho^2} \exp(i[k_x(x_r - x_s) + k_y(y_r - y_s)]) dk_x dk_y \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} [J_0(k_\rho\rho) \sin^2\theta + \frac{\cos 2\theta}{k_\rho\rho} J_1(k_\rho\rho)] k_\rho dk_\rho, \end{aligned} \quad (B2)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{k_x k_y}{k_\rho^2} \exp(i[k_x(x_r - x_s) + k_y(y_r - y_s)]) dk_x dk_y \\ &= \frac{\sin 2\theta}{4\pi} \int_0^{+\infty} [J_0(k_\rho\rho) - \frac{2}{k_\rho\rho} J_1(k_\rho\rho)] k_\rho dk_\rho. \end{aligned} \quad (B3)$$

### 附录 C 三次样条插值法求解 Sommerfeld 积分

Sommerfeld 积分一般可表示为如下形式:

$$G(\rho) = \int_0^{+\infty} \tilde{G}(k_\rho; z, z') J_m(k_\rho\rho) k_\rho^n dk_\rho \quad (m = 0, 1; n = 0, 1, 2, 3), \quad (C1)$$

其中,  $J_m(k_\rho\rho)$  为  $m$  阶 Bessel 函数, 核函数  $\tilde{G}(k_\rho; z, z')$  为频率域并矢格林函数的各个分量. 首先用一个足够大区间代替半无限积分区间,

$$\begin{aligned} G(\rho) &\approx \int_{k_{\rho,MN}}^{k_{\rho,MX}} \tilde{G}(k_\rho; z, z') J_m(k_\rho\rho) k_\rho^n dk_\rho \\ &= \sum_{i=1}^K \int_{k_{\rho,i}}^{k_{\rho,i+1}} \tilde{G}(k_\rho; z, z') J_m(k_\rho\rho) k_\rho^n dk_\rho, \end{aligned} \quad (C2)$$

其中  $[k_{\rho,MN}, k_{\rho,MX}]$  为相应的足够大的积分区间. 根据核函数随  $k_\rho$  变化近似按指数衰减的特点划分为  $K$  个子区间,  $k_{\rho,j} = k_{\rho,1} \exp[(j-1) \cdot \Delta k] (j = 2, 3, \dots, K+1)$  为相应的插值节点, 其中  $\Delta k = \frac{\log(k_{\rho,MX}/k_{\rho,MN})}{K}$ . 这样, 积分转化为一系列的有限子区间的部分积分的和. 计算核函数  $\tilde{G}(k_\rho)$  在各节点  $k_{\rho,j} (j = 1, 2, \dots, K+1)$  处的值并利用三次样条插值算法,  $\tilde{G}(k_\rho)$  在每个区间  $(k_{\rho,j}, k_{\rho,j+1})$  具有如下的近似解析式:

$$\tilde{G}_j = \frac{M_j}{6h_j} (k_{\rho,j+1} - k_\rho)^3 + \frac{M_{j+1}}{6h_j} (k_\rho - k_{\rho,j})^3$$

$$\begin{aligned} & + \left( \frac{\tilde{G}(k_{\rho,j+1})}{h_j} - \frac{M_{j+1}h_j}{6} \right) (k_\rho - k_{\rho,j}) \\ & + \left( \frac{\tilde{G}(k_{\rho,j})}{h_j} - \frac{M_j h_j}{6} \right) (k_{\rho,j+1} - k_\rho), \end{aligned} \quad (C3)$$

其中,  $k_{\rho,j} \leq k_\rho \leq k_{\rho,j+1}$ ,  $h_j = k_{\rho,j+1} - k_{\rho,j}$ ,  $M_j = \tilde{G}''(k_{\rho,j})$  为函数  $\tilde{G}_j$  在节点  $k_{\rho,j}$  上的二阶导数. 将 (C3) 式代入 (C2) 式, 并利用递推公式  $xJ_0(x) = \frac{d}{dx}[xJ_1(x)]$ ,  $J_0'(x) = -J_1(x)$ , (C1) 式简化为

$$G(\rho) = \sum_{i=1}^K \left( A_i + B_i \int_{x_i}^{x_{i+1}} J_0(t) dt \right), \quad (C4)$$

其中  $A_i$  和  $B_i$  为各子区间相应的参数. 为了计算 (C4) 式等号右端的积分, 需要确定  $\int_0^x J_0(t) dt$  的值. 这里采用 Lommel 函数的渐近展开式与 Bessel 函数的解析表达式相结合来求解.

当  $x > 15$  时, 采用 Lommel 渐近展开公式<sup>[18]</sup>

$$\begin{aligned} \int_0^x J_0(t) dt &= 1 - xS_{-1,-1}(x)J_0(x) \\ &\quad + xS_{0,0}(x)J_1(x). \end{aligned} \quad (C5)$$

这里,

$$xS_{0,0}(x) = {}_3F_0 \left( 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}; \frac{-4}{x^2} \right),$$

$$x^2 S_{-1,-1}(x) = {}_3F_0 \left( 1, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}; \frac{-4}{x^2} \right)$$

为广义超几何函数, 定义为

$${}_pF_0(a_1, a_2, \dots, a_p; z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(a_1)_k (a_2)_k \cdots (a_p)_k z^k}{k!}, \quad (\text{C6})$$

其中  $(a)_0 = 1$ ,  $(a)_k = a(a+1)(a+2)\cdots(a+k-1)$ .

当  $x < 15$  示, 利用 Bessel 函数的解析表达式, 则

$$\int_0^x J_0(t) dt \simeq \sum_{k=0}^{30} (-1)^k \frac{x}{(2k+1)(k!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}. \quad (\text{C7})$$

相应的截断误差小于  $5 \times 10^{-15}$ .

- [1] Liu G X 2003 *Principles and Methods of Electrical Prospecting* (Beijing: Geological Publishing House) p173 (in Chinese) [刘国兴 2003 电法勘探原理与方法 (北京: 地质出版社) 第 173 页]
- [2] Li D Q, Wang G J, Di Q Y, Wang M Y, Wang R 2008 *Chin. J. Geophys.* **51** 1234 (in Chinese) [李帝铨, 王光杰, 底青云, 王妙月, 王若 2008 地球物理学报 **51** 1234]
- [3] Routh P S, Oldenburg D W 1999 *Geophysics* **64** 1689
- [4] Constable S C, Parker R L, Constable C G 1987 *Geophysics* **52** 289
- [5] Wu X P, Xu G M 1998 *Chin. J. Geophys.* **41** 547 (in Chinese) [吴小平, 徐果明 1998 地球物理学报 **41** 547]
- [6] Wu X P, Xu G M 2000 *Chin. J. Geophys.* **43** 420 (in Chinese) [吴小平, 徐果明 2000 地球物理学报 **43** 420]
- [7] Lu X Y, Martyn U, John B 1999 *Geophys. J. Int.* **138** 381
- [8] Moran J H, Gianzero S 1979 *Geophysics* **44** 1266
- [9] Chen G B, Wang H N, Yao J J, Han Z Y, Yang S W 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 1608 (in Chinese) [陈桂波, 汪宏年, 姚敬金, 韩子夜, 杨守文 2009 物理学报 **58** 1608]
- [10] Chen G B, Wang H N, Yao J J, Han Z Y 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 3848 (in Chinese) [陈桂波, 汪宏年, 姚敬金, 韩子夜 2009 物理学报 **58** 3848]
- [11] Wannamaker P E 2005 *Surv. Geophys.* **26** 733
- [12] Ramananjaona C, MacGregor L, Andréis D 2011 *Geophys. Prospect.* **59** 341
- [13] Li X B, Oskooi B, Pedersen L B 2000 *Geophysics* **65** 452
- [14] Yin C C 2003 *Geophysics* **68** 138
- [15] Pek J, Santos F A M 2006 *Phys. Earth Planet. Int.* **158** 139
- [16] Michalski K A, Mosig J R 1997 *IEEE Trans. Antennas Propag.* **45** 508
- [17] Wang H N, So P, Yang S W, Hofer W J R, Du H L 2008 *IEEE Trans. Geosci. Remote Sens.* **46** 1134
- [18] Luke Y L 1962 *Integrals of Bessel Functions* (New York: McGraw-Hill Book Company) p88
- [19] Wang H N, Tao H G, Yao J J, Chen G B 2008 *IEEE Trans. Geosci. Remote Sens.* **46** 1525
- [20] Wang H N 2011 *IEEE Trans. Geosci. Remote Sens.* **49** 4483

# Parameterized inversion of frequency sounding data in horizontally stratified transverse isotropic medium\*

Zhou Jian-Mei<sup>1)</sup> Wang Hong-Nian<sup>1)†</sup> Yao Jing-Jin<sup>2)</sup>  
Yang Shou-Wen<sup>1)</sup> Ma Yin-Zhi<sup>1)</sup>

1) (College of Physics, Jilin University, Changchun 130012, China)

2) (China Railway Resources Mineral Exploration Company, Beijing 100039, China)

(Received 27 April 2011; revised manuscript received 28 December 2011)

## Abstract

In this paper, we advance a fast iterative inversion algorithm of frequency electromagnetic sounding data to simultaneously reconstruct the horizontal and the vertical conductivities and interface each bed in the horizontally stratified transversely isotropic (TI) medium. First, applying the analytic expression of the electromagnetic dyadic Green's functions in the TI medium, we realize the forward modeling of the frequency sounding via the fast algorithm of Sommerfeld integral. Then using the perturbation principles and Fourier inversion transform, we establish an efficient computation of Fréchet derivatives of the frequency sounding data with respect to all the model parameters. And we use the least square criterion, the normalization and singular value decomposition to iteratively recovery all model parameters. Finally, numerical results validate the inversion algorithms and their antinoise ability.

**Keywords:** transverse isotropic, frequency electromagnetic sounding, Fréchet derivative, parameterized inversion

**PACS:** 91.25.Qi, 02.30.Zz, 41.20.-q

---

\* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 40874058) and the Fundamental Scientific Research Foundation of Jilin University, China (Grant Nos. 200903318, 201001006).

† E-mail: wanghn@jlu.edu.cn