

一类动力学系统通过函数耦合实现混沌同步*

秦卫阳[†] 孙涛 焦旭东 杨永锋

(西北工业大学工程力学系, 西安 710072)

(2011年5月13日收到; 2011年9月23日收到修改稿)

非线性动力学系统的混沌同步, 一般采用单向线性耦合的控制方式, 对于函数耦合方式研究的比较少. 这就存在一个问题, 对于非线性动力学系统, 在线性耦合实现混沌同步后, 是否其他函数的耦合方式都可以实现混沌同步? 本文对于一类非线性动力学系统, 研究了其线性耦合同步与函数耦合同步的关系, 证明当线性耦合实现同步后, 函数在满足一定的条件下, 可以通过函数耦合实现系统的混沌同步. 最后对于 Duffing 系统采用两种函数耦合进行了仿真计算, 证明了结论的正确性.

关键词: 函数耦合, 混沌同步, 动力学

PACS: 05.45.Gg

1 引言

非线性动力学系统出现混沌响应时, 通过线性耦合可以实现其混沌同步^[1]. 目前, 这方面的研究开展了很多, 正在逐渐深入^[2-5]. 有一些文献考虑了采用函数耦合实现混沌同步的情况^[6-8]. 这就提出了一个问题: 一个非线性动力学系统, 如果线性耦合可以实现混沌同步, 那么这一结论是否可以推广到其他函数的耦合情况, 即是否其他任何函数的耦合都可以实现系统的混沌同步. 本文在这方面进行了研究, 对于一类非线性动力学系统, 在线性耦合实现混沌同步后, 对于任何函数, 如果满足一定条件, 则通过此函数耦合也可以实现与原系统的同步. Duffing 系统的仿真计算结果证明了这一结论.

2 理论推导

研究的一类非线性动力学系统为

$$\ddot{x} + c\dot{x} + f(x) = p(t), \quad (1)$$

其中, $f(x)$ 为非线性弹性力, $p(t)$ 为激励力.

下面证明一个结论, 即如果可以通过线性耦合实现同步, 那么增加耦合的高次项不会影响系统的

同步. 即如果系统

$$\ddot{y} + c\dot{y} + f(y) + k(y-x) = p(t) \quad (2)$$

与方程 (1) 保持同步. 那么

$$\begin{aligned} & \ddot{y} + c\dot{y} + f(y) + k(y-x) + s_2(t)(y-x)^2 \\ & = p(t) \end{aligned} \quad (3)$$

也与方程 (1) 同步. 推而广之,

$$\begin{aligned} & \ddot{y} + c\dot{y} + f(y) + k(y-x) \\ & + \sum_{i=2}^n s_i(t)(y-x)^i = p(t) \end{aligned} \quad (4)$$

也会与方程 (1) 保持同步.

对于同步的系统, 方程 (2)–方程 (1), 可以得到对应的差别动力学系统

$$\ddot{e} + c\dot{e} + f(y) - f(x) + ke = 0, \quad (5)$$

此处, $e = y - x$, 将 (5) 式写成状态方程形式, 有

$$\begin{bmatrix} \dot{e}_1 \\ \dot{e}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k & -c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ f(y) - f(x) \end{bmatrix}. \quad (6)$$

方程 (6) 的扰动方程为

$$\begin{bmatrix} \delta\dot{e}_1 \\ \delta\dot{e}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{df}{de_1} - k & -c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta e_1 \\ \delta e_2 \end{bmatrix}. \quad (7)$$

* 国家自然科学基金 (批准号: 10902084) 资助的课题.

[†] E-mail: qinweiyang@yahoo.com.cn

因为已知系统之间同步, 所以扰动方程 (7) 的解最终会稳定到不动点上.

再来看增加了高次耦合项的系统 (3). (3) 式 -(1) 式, 相应的差别方程为

$$\ddot{e}_p + c\dot{e}_p + f(y) - f(x) + ke_p + s_2(t)e_p^2 = 0, \quad (8)$$

此处, $e_p = y - x$, 将 (8) 式写成状态方程

$$\begin{bmatrix} \dot{e}_{p1} \\ \dot{e}_{p2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k & -c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{p1} \\ e_{p2} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ f(y) - f(x) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ s_2(t)e_{p1}^2 \end{bmatrix}, \quad (9)$$

(9) 式的扰动方程为

$$\begin{bmatrix} \delta\dot{e}_{p1} \\ \delta\dot{e}_{p2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{df}{de_{p1}} - k & -c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta e_{p1} \\ \delta e_{p2} \end{bmatrix}. \quad (10)$$

可以看出, (7) 式与 (10) 式两个扰动方程完全相同, 因此系统 (3) 也将与系统 (1) 保持同步. 与上面的过程类似, 对于方程 (4) 可以得出相同的结论, 即系统 (4) 也会与系统 (1) 实现同步. 所以对于线性耦合同步的非线性动力学系统, 增加高次的耦合项不会影响系统的同步.

对于任意函数 $(g(u))$ 耦合的情况, 即派生动力学系统为

$$\ddot{y} + c\dot{y} + f(y) + \beta(g(y) - g(x)) = p(t). \quad (11)$$

将耦合函数展开成泰勒级数, 有

$$\ddot{y} + c\dot{y} + f(y) + \beta\left(\frac{dg}{dx}e + \frac{1}{2!}\frac{d^2g}{dx^2}e^2 + \dots\right) = p(t). \quad (12)$$

由前面证明的结论, 可以知道, 只要下面的系统:

$$\ddot{y} + c\dot{y} + f(y) + \beta\frac{dg}{dx}e = p(t) \quad (13)$$

与系统 (1) 保持同步, 那么系统 (12) 也将与系统 (1) 保持同步.

分析 (13) 式与 (1) 式同步的条件. (13) 式 -(1) 式, 得到其差别方程

$$\ddot{e}_r + c\dot{e}_r + \frac{df}{dx}e_r + \beta\frac{dg}{dx}e_r = 0, \quad (14)$$

此处, $e_r = y - x$. 方程 (14) 为 Liénard 方程, 系统的响应要么出现极限环, 要么衰减到稳定的不动点

上. 现在来看差别方程 (5), 其对应的是方程 (2) 与方程 (1) 之间的误差, 将其展开, 有

$$\ddot{e} + c\dot{e} + \frac{df}{dx}e + ke = 0. \quad (15)$$

因为系统 (2) 与系统 (1) 同步, 方程 (15) 中 e 的解不会出现极限环, 响应只会稳定到不动点上. Bendixson 定理指出, 对于二维自治系统, 如在某一区域 D 中的散度 $\nabla \mathbf{f} = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2}$ 不改变符号, 则在 D 中不可能存在极限环^[9]. 按照 Bendixson 定理, 对于方程 (15), 应当有

$$1 - k - \frac{df}{dx} < 0. \quad (16)$$

如果要求方程 (14) 的响应最终也衰减到平衡点上 (即系统 (13) 与系统 (1) 同步), 那么需要满足

$$1 - \frac{df}{dx} - \beta\frac{dg}{dx} < 0. \quad (17)$$

将 (17) 式改写

$$1 - \frac{df}{dx} - \beta\frac{dg}{dx} = \left(1 - \frac{df}{dx} - k\right) + \left(k - \beta\frac{dg}{dx}\right), \quad (18)$$

考虑 (16) 式, 只要

$$k - \beta\frac{dg}{dx} < 0, \quad (19)$$

就可以保证 (17) 式成立. 对于 (19) 式, 由于 β 可以选择, 因此只要 $\frac{dg}{dx}$ 不改变符号, 就一定可以找到常数 β , 使 (19) 式成立.

这样 (14) 式的解就会最终稳定到不动点上, 即系统 (13) 与系统 (1) 会保持同步, 进而保证了系统 (11) 也与系统 (1) 保持同步. 即通过函数 $g(u)$ 的耦合也可以保证与原动力学系统的同步.

3 仿真计算

选择的仿真模型为 Duffing 方程

$$\ddot{y} + ay + by + cy^3 = f \cos(\omega t). \quad (20)$$

当 $a = 0.2, b = 1.0, c = 1.0, \omega = 1.0, f = 27$ 时, 系统会出现混沌响应. 此时 $y \in (-6, 6)$, 已经证明, 在线性耦合情况下, 系统会实现混沌同步^[10]. 下面对于 2 种耦合函数进行了仿真计算.

1) 耦合函数为 $g(u) = \sqrt[3]{10 + u}$.

对于此时 Duffing 系统的混沌响应, 由于 $\frac{dg}{du} = \frac{1}{3(10+u)^{2/3}} > 0$, 因此通过 $g(u)$ 可以实现函数耦合同步. 此时派生系统方程为

$$\ddot{y} + a\dot{y} + by + cy^3 + \beta(\sqrt[3]{10+y} - \sqrt[3]{10+x}) = f \cos(\omega t). \quad (21)$$

图 1 与图 2 为仿真计算的结果, 可以看出派生系统与原系统实现了混沌同步.

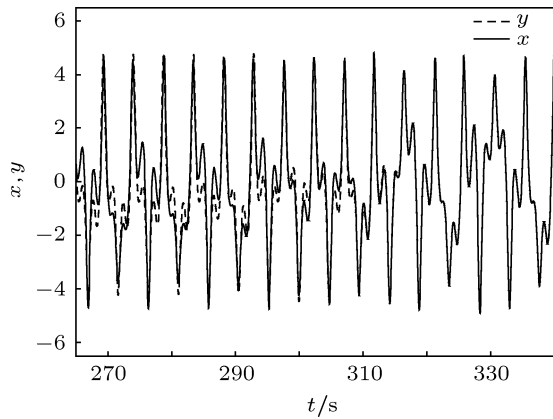


图 1 耦合函数为 $g(u) = \sqrt[3]{10+u}$ 系统响应对比图

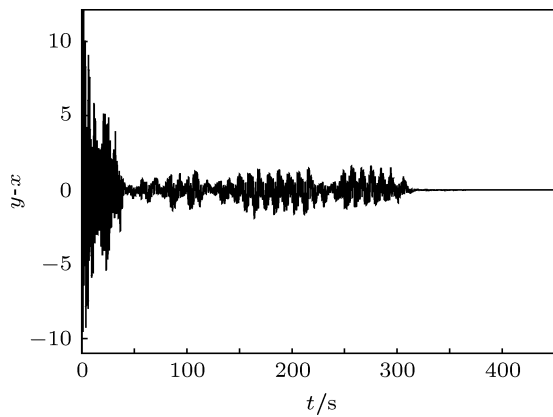


图 2 耦合函数为 $g(u) = \sqrt[3]{10+u}$ 时系统响应差别图

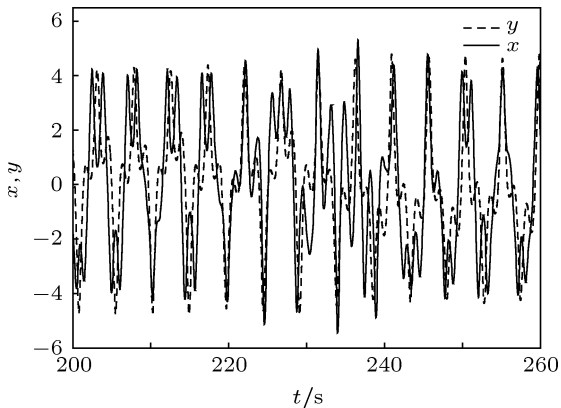


图 3 耦合函数为 $g(u) = \sin(u)$ 时系统响应对比图

2) 耦合函数为 $g(u) = \sin(u)$.

此时由于 $\frac{dg}{du} = \cos(u)$, 不能满足 $\frac{dg}{du}$ 不改变符号的条件, 则派生系统

$$\ddot{y} + a\dot{y} + by + cy^3 + \beta(\sin(y) - \sin(x)) = f \cos(\omega t), \quad (22)$$

与原系统无法实现混沌同步, 计算结果 (图 3) 可以明显看到这一点.

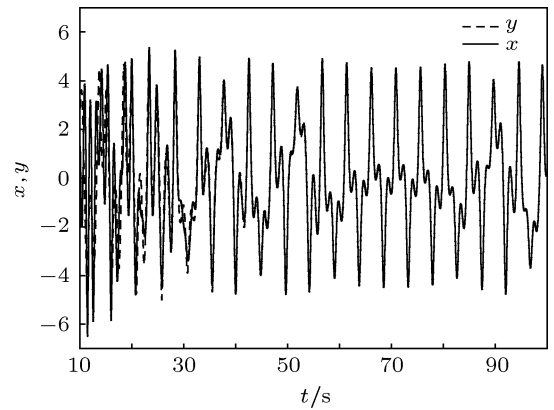


图 4 耦合函数为 $g(u) = -1.2u + \sin(u)$ 时系统响应对比图

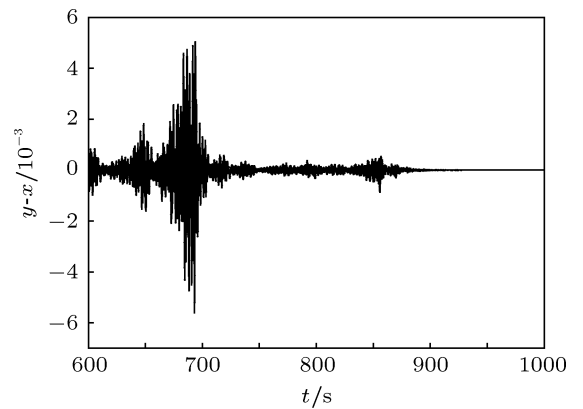


图 5 耦合函数为 $g(u) = -1.2u + \sin(u)$ 时系统响应的差别图

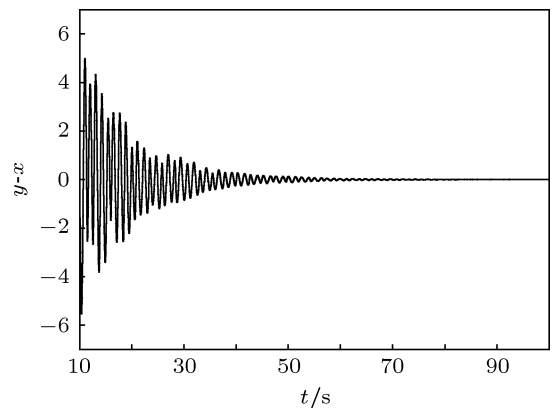


图 6 耦合函数为 $g(u) = 1.2u + \sin(u)$ 时系统响应的差别图

但如果将耦合函数改为 $g(u) = -1.2u + \sin(u)$, 那么由于 $\frac{dg}{du} = -1.2 + \cos(u) < 0$, 此耦合就可以实现派生系统

$$\ddot{y} + a\dot{y} + by + cy^3 + \beta(-1.2y + \sin(y) + 1.2x - \sin(x)) = f \cos(\omega t), \quad (23)$$

与原系统 (方程 (20)) 同步. 由计算结果 (图 4 与图 5) 可以看出, 两个系统的响应趋于一致, 实现了同步 (此时 $\beta = -17$). 另外, 如果取耦合函数为 $g(u) = 1.2u + \sin(u)$, 则 $\frac{dg}{du} = 1.2 + \cos u > 0$, 那么派生系统

$$\ddot{y} + a\dot{y} + by + cy^3 + \beta(1.2y + \sin(y) - 1.2x - \sin(x)) = f \cos(\omega t) \quad (24)$$

也将与原系统 (方程 (20)) 实现同步 (此时 $\beta = 10$), 仿真结果证明了这一点 (图 6). 这说明了只

要 dg/du 不改变符号, 就一定存在 β , 可以保证实现与原系统的混沌同步. 而从实际的仿真来看, 如果在线性耦合时, 能够实现混沌同步的最小耦合系数为 k_{\min} . 那么函数耦合系数 β 的选择只要保证 $\|\beta(g(y) - g(x))\| > \|k_{\min}(y - x)\|$ 就可以满足要求.

4 结论

由以上的理论分析与仿真计算结果可以看出, 对于常见的一类非线性动力学系统, 如果通过线性耦合可以实现系统间混沌的同步, 那么只要函数满足一定的条件 (即 $\frac{dg}{du}$ 不改变符号), 通过函数耦合, 系统可以实现混沌同步. 由于非线性动力学系统的混沌响应一般是有界的, 因此此时的函数 $g(u)$ 的选择的范围是很宽的.

-
- [1] Pecora L M Carroll T L 1990 *Phy Rev Lett.* **64** 821
 [2] Han Q, Li C, Huang T 2009 *Chaos* **19** 023105
 [3] Monetti R, Bunk W, Aschenbrenner T 2009 *Phys. Rev. E* **79** 046207
 [4] Ge Z, Yang C 2008 *Chaos* **18** 043129
 [5] Zhou P, Cheng X, Zhang N 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 5407 (in Chinese) [周平, 程雪峰, 张年英 2008 物理学报 **57** 5407]
 [6] Yu H, Zheng N 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 4712 (in Chinese) [于洪洁, 郑宁 2008 物理学报 **57** 4712]
 [7] Yu H, Peng J 2006 *Chin. J. comput. Phys.* **23** 626 (in Chinese) [于洪洁, 彭建华 2006 计算物理 **23** 626]
 [8] Jing X, Lü L 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 7539 (in Chinese) [敬晓丹, 吕翎 2009 物理学报 **58** 7539]
 [9] Liu B, Peng J 2004 *Nonlinear Dynamics* (Beijing: High Education Press) (in Chinese) [刘秉正, 彭建华 2004 非线性动力学 (北京: 高等教育出版社)]
 [10] Wu X, Cai J, Wang M 2008 *Chaos, Soliton. Fract.* **36** 121

Chaos synchroniztion by function coupling in a class of nonlinear dynamical system*

Qin Wei-Yang[†] Sun Tao Jiao Xu-Dong Yang Yong-Feng

(Department of Engineering Mechanics, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China)

(Received 13 May 2011; revised manuscript received 23 September 2011)

Abstract

To realize the synchronization of nonlinear dynamical system, the general control method is unidirectional linear coupling. Research on function coupling of chaos synchronization is not enough, so there arises a question: for nonlinear dynamical system, if chaos synchronization is realized by linear coupling, whether can any type of function coupling always make the system go to chaos synchronization? In this paper, a class of nonlinear dynamical system is considered and the relation between linear coupling and function coupling is investigated. It is proved that if linear coupling can make chaos synchronization, then any function satisfying some conditions can do so too. The condition is given and proved. Finally for Duffing system, three coupling functions are used to prove the analytical result. The simulation results show that the conclusion is correct.

Keywords: function coupling, chaos synchronization, dynamics

PACS: 05.45.Gg

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 10902084).

[†] E-mail: qinweiyang@yahoo.com.cn