

基于比较系统方法的分数阶混沌系统脉冲同步控制*

马铁东^{1)†} 江伟波¹⁾ 浮洁²⁾

1) (重庆大学自动化学院, 重庆 400044)

2) (重庆大学光电工程学院光电技术及系统教育部重点实验室, 重庆 400044)

(2011年7月27日收到; 2011年9月18日收到修改稿)

针对一类分数阶混沌系统的同步问题, 提出基于比较系统理论的脉冲同步方法. 通过构造新的响应系统, 可将原分数阶同步误差系统转化为整数阶同步误差系统, 基于 Lyapunov 稳定性理论与脉冲微分方程理论, 给出一组新的分数阶混沌系统全局渐近同步判据. 特别地, 当脉冲间距与脉冲控制增益为常数时, 可获得更为简单和实用的同步判据. 与现有结果相比, 所得充分条件更为严格和实用. 通过对分数阶 Chen 系统同步问题的数值仿真研究, 验证了所提方法的有效性和可行性.

关键词: 分数阶混沌系统, 混沌同步, 脉冲控制, 比较系统

PACS: 05.45.Xt, 05.45.Jn, 05.45.Pq

1 引言

分数阶微积分几乎与整数阶微积分具有同样长的历史, 但由于长期没有实际应用背景而发展缓慢. 1983年 Mandelbort 首次指出了自然界及众多科学技术领域中存在大量的分数维事实, 且在整数阶微积分与分数阶微积分理论描述的动力学系统之间存在自相似现象^[1]. 作为分形几何和分数维的动力学基础, 分数阶微积分开始获得新的发展并成为当前国际上的研究热点.

许多物理系统可表现出分数阶动力学行为, 如黏滞系统、介质极化、电极-电解液极化、管道边界层效应、有色噪声和电磁波等. 以上系统的分数阶行为大都与特殊材料和化学特性有关. 最近, 分数阶混沌系统得到了广泛的关注, 研究发现, 部分整数阶混沌系统的阶数变为分数时, 系统仍呈现混沌行为, 且更能反映系统所呈现的物理现象, 如分数阶 Chua 电路^[2]、分数阶 Duffing 系统^[3]、分数阶 jerk 模型^[4]、分数阶 Lorenz 系统^[5]、分数阶 Chen 系统^[6]、分数阶 Lü 系统^[7]、

分数阶 Rössler 系统^[8]等.

另一方面, 自从 Pecora 和 Carroll 在电子学电路的实验中实现了两个混沌系统的同步以来^[9], 就掀起了混沌同步的研究热潮. 由于分数阶混沌信号在加密性能上的潜在优势, 使得分数阶混沌系统同步在保密通信、信号处理和系统控制等领域体现出巨大的应用前景. 目前, 人们已提出许多分数阶混沌同步方法, 如主动控制方法^[10,11]、滑模变结构控制方法^[12,13]、自适应控制方法^[14,15]、无源控制方法^[16]、脉冲控制方法^[17,18]等. 其中脉冲控制能够用很小的控制脉冲即能镇定混沌系统, 被广泛应用于混沌系统的稳定与同步. 在同步过程中, 响应系统只需获取驱动系统脉冲时刻的状态信息即可实现同步控制, 这大大降低了传送信息被破译的可能性, 提高了保密性能^[19-24].

文献 [17] 与文献 [18] 分别考虑了分数阶超混沌 Chen 系统与分数阶 Newton-Leipnik 系统的脉冲同步问题, 然而, 以上文献中所设计脉冲控制器仅适用于整数阶混沌系统, 仅在数值仿真部分将所设计控制器用于分数阶混沌同步, 缺少理论依据. 基

* 国家自然科学基金 (批准号: 61104080, 60804006), 重庆市自然科学基金 (批准号: CSTC,2010BB2238), 教育部博士点基金 (批准号: 20100191120025) 和中国博士后科学基金 (批准号: 20100470813, 20100480043) 资助的课题.

† E-mail: tdma@cqu.edu.cn

于此, 本文将针对一类典型的分数阶混沌系统同步问题, 通过构造新的响应系统, 实现分数阶误差系统至整数阶误差系统的转化, 建立一种分数阶混沌系统脉冲同步的间接分析方法. 采用响应系统与驱动系统状态变量误差的线性反馈作为脉冲控制信号, 建立基于比较系统方法的分数阶混沌系统脉冲同步判据, 控制方法简单快速且可适用于大部分典型的分数阶混沌系统. 最后通过数值仿真结果验证了上述方法的有效性.

2 脉冲微分方程基本理论

对于如下给定的非线性脉冲微分系统

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(t, x(t)), \quad t \neq t_k, \quad k \in N, \\ \Delta x(t) &= x(t_k^+) - x(t_k^-) \\ &= U(k, x(t)), \quad t = t_k, \end{aligned} \quad (1)$$

其中 $x \in R^n$ 为状态向量, $f: R_+ \times R^n \rightarrow R^n$, 且 R, R^n 和 $R^{n \times m}$ 分别表示实数、 n 维欧氏空间和所有实矩阵的集合, $R_+ := [0, \infty)$, $N := \{1, 2, \dots\}$. 离散时刻集合 $\{t_k\}$ 满足 $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_k < t_{k+1} < \dots$, $\lim_{k \rightarrow \infty} t_k = \infty$, 且初始时刻 t_0 满足 $0 \leq t_0 < t_1$. t_k^+ 与 t_k^- 分别表示脉冲时刻 t_k 前后的瞬时, $\lim_{h \rightarrow 0^+} x(t_k + h) = x(t_k^+)$, $\lim_{h \rightarrow 0^+} x(t_k - h) = x(t_k^-) = x(t_k)$ 表示状态 x 在 t_k 时刻满足左连续, $U(k, x)$ 为状态变量 x 在脉冲时刻 t_k 的变化量.

为研究脉冲可控微分系统 (1) 的稳定性, 引入以下定义和引理.

定义 1^[25,26] 令 $V: R_+ \times R^n \rightarrow R_+$, V 属于 ν_0 类函数, 若满足

1) V 在 $(t_{k-1}, t_k] \times R^n$ 上连续, 且有

$$\lim_{(t,y) \rightarrow (t_k^+, x)} V(t, y) = V(t_k^+, x). \quad (2)$$

2) V 关于 x 满足局部 Lipschitz 条件.

定义 2^[25,26] 对于任何 $(t, x) \in (t_{k-1}, t_k] \times R^n$, 定义 Dini 导数

$$\begin{aligned} D^+V(t, x) &\triangleq \limsup_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} [V(t+h, x+hf(t, x)) \\ &\quad - V(t, x)]. \end{aligned} \quad (3)$$

对于 n 阶脉冲微分系统 (1), 若能找到一个与之对应的一阶脉冲微分系统, 且二者的稳定性存在

某种关联, 这对于原系统 (1) 的稳定性分析是很方便的, 下面引入在脉冲微分系统稳定性分析中较为重要的比较系统.

定义 3^[25,26] 令 $V \in \nu_0$ 并假设

$$\begin{aligned} D^+V(t, x) &\leq g(t, V(t, x)), \\ t &\neq t_k, \quad k \in N, \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} V(t, x + U(k, x)) &\leq \psi_k(V(t, x)), \\ t &= t_k, \end{aligned} \quad (5)$$

其中 $g: R_+ \times R_+ \rightarrow R$ 连续, 并且 $\psi_k: R_+ \rightarrow R_+$ 为非减函数, 则以下一阶脉冲微分系统:

$$\begin{aligned} \dot{\omega} &= g(t, \omega), \quad t \neq t_k, \quad k \in N, \\ \omega(t_k^+) &= \psi_k(\omega(t_k)), \quad t = t_k, \\ \omega(t_0^+) &= \omega_0 \geq 0, \end{aligned} \quad (6)$$

称为系统 (1) 的比较系统.

定义 4^[25,26] 如果函数 $\alpha \in C[R_+, R_+]$ 是连续的严格单调上升函数, 且满足 $\alpha(0) = 0$, 则称 α 属于 K 类函数, 记为 $\alpha \in K$.

下面给出 n 阶脉冲微分系统 (1) 与其对应比较系统 (6) 稳定性的互为等价引理, 这将为研究复杂的 n 阶脉冲微分系统稳定性带来方便.

引理 1^[25] 假设

1) $V: R_+ \times s(\rho) \rightarrow R_+$, $V \in \nu_0$, 且有

$$D^+V(t, x) \leq g(t, V(t, x)), \quad t \neq t_k,$$

其中 $g: R_+ \times R_+ \rightarrow R$, $g(t, 0) = 0$, 函数 g 在 $t \in (t_{k-1}, t_k]$ 上连续.

2) 若存在常数 ρ_0 使得 $x \in s(\rho_0)$, 则有 $x + U(k, x) \in s(\rho_0)$, $V(t_k^+, x + U(k, x)) \leq \psi_k(V(t, x))$, $t = t_k$, 其中 $\psi_k: R_+ \rightarrow R_+$ 为非减函数.

3) 存在 $\alpha, \beta \in K$ 使得 $\beta(\|x\|) \leq V(t, x) \leq \alpha(\|x\|)$, $(t, x) \in R_+ \times S(\rho)$. 则系统 (1) 的稳定性等价于系统 (6) 的稳定性, 其中 $S(\rho) = \{x \in R^n \mid \|x\| < \rho\}$, $\|\cdot\|$ 表 R^n 上的欧氏范数.

引理 2^[25] 令 $g(t, w) = \dot{\lambda}(t)$, $\lambda \in C^1[R_+, R_+]$, $\psi_k(w) = d_k w$, $d_k \geq 0$, $k \in N$, 若存在常数 $\gamma > 1$ 使得如下不等式成立:

$$\lambda(t_{k+1}) + \ln(\gamma d_k) \leq \lambda(t_k), \quad (7)$$

$$\dot{\lambda}(t) \geq 0, \quad (8)$$

则系统 (1) 在原点是渐近稳定的.

3 主要结果

考虑如下分数阶混沌系统:

$$D^\alpha x(t) = Ax(t) + \phi(x(t)), \quad (9)$$

其中

$$D^\alpha x(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{x(\tau)}{(t-\tau)^\alpha} d\tau$$

表示 Riemann-Liouville 分数阶导数^[27], $\Gamma(\alpha)$ 为伽玛函数, $\alpha \in (0, 1]$ 为分数阶系统阶次.

为研究相同结构的分数阶混沌系统同步问题, 可将系统 (9) 作为驱动系统, 并选择如下形式的响应系统:

$$D^\alpha y(t) = Ay(t) + \phi(y(t)). \quad (10)$$

采用系统 (10) 与系统 (9) 状态变量误差的线性反馈作为脉冲控制信号, 则可得如下脉冲被控响应系统:

$$\begin{aligned} D^\alpha y(t) &= Ay(t) + \phi(y(t)), \quad t \neq t_k, \quad k \in N, \\ \Delta y &= y(t_k^+) - y(t_k^-) = B_k e(t_k), \quad t = t_k, \end{aligned} \quad (11)$$

其中 $e(t) = y(t) - x(t) = [y_1(t) - x_1(t), y_2(t) - x_2(t), \dots, y_n(t) - x_n(t)]^T$ 为同步误差向量, $B_k = B_k^T \in R^{n \times n}$ 为脉冲控制增益矩阵, 并满足谱半径条件 $\rho(I + B_k) \leq 1$, I 表示适当维数的单位矩阵. 由系统 (9) 和 (11) 可得如下同步误差系统:

$$\begin{aligned} D^\alpha e(t) &= Ae(t) + \varphi(x(t), y(t)), \quad t \neq t_k, \\ \Delta e &= e(t_k^+) - e(t_k^-) = B_k e(t_k), \quad t = t_k. \end{aligned} \quad (12)$$

其中

$$\begin{aligned} \varphi(x(t), y(t)) &= \phi(y(t)) - \phi(x(t)) \\ &= N(x(t), y(t))e(t), \end{aligned}$$

$N(x(t), y(t))$ 是由状态 $x(t)$ 和 $y(t)$ 决定的范数有界矩阵. 且大部分典型分数阶混沌系统均满足 $\varphi(x(t), y(t)) = N(x(t), y(t))e(t)$, 如分数阶 Lorenz 系统、分数阶 Chen 系统、分数阶 Rössler 系统、分数阶 Lü 系统、分数阶统一系统等.

针对系统 (9) 和 (11) 的同步问题, 通常可通过研究误差系统 (12) 的渐近稳定性来实现. 然而, 据作者所知, 针对形如系统 (12) 的分数阶脉冲微分系统渐近稳定性分析问题, 目前还没有成熟的理论. 为解决该问题, 本节将通过构造一个新的脉冲可控

响应系统, 以将分数阶脉冲系统 (12) 转化为整数阶脉冲系统进行分析, 具体形式构造如下:

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) &= Ay(t) + \phi(y(t)) + \eta(x(t)), \quad t \neq t_k, \\ \Delta y &= y(t_k^+) - y(t_k^-) = B_k e(t_k), \quad t = t_k, \end{aligned} \quad (13)$$

其中 $\eta(x(t)) = \dot{x}(t) - D^\alpha x(t)$, $\dot{x}(t)$ 与 $D^\alpha x(t)$ 可来自于系统 (9)(注意到在对系统 (9) 进行分析与仿真过程中, $\dot{x}(t)$ 和 $D^\alpha x(t)$ 不难获得, 这也使得构造新的响应系统 (13) 成为可能). 于是由系统 (9) 和 (13), 可得如下新的同步误差系统:

$$\begin{aligned} \dot{e}(t) &= (A + N(x(t), y(t)))e(t), \quad t \neq t_k, \\ \Delta e &= e(t_k^+) - e(t_k^-) = B_k e(t_k), \quad t = t_k. \end{aligned} \quad (14)$$

显然, 通过构造响应系统 (13), 分数阶混沌系统同步问题转化为整数阶同步误差系统 (14) 的脉冲控制问题. 接下来, 将根据脉冲微分系统理论讨论系统 (14) 的稳定性条件, 进而实现系统 (9) 与 (13) 的渐近同步.

定理 1 令 β_k , λ_A 和 λ_N 分别为 $(I + B_k)^T(I + B_k)$, $A + A^T$ 和 $N(x, y) + N^T(x, y)$ 的最大特征值. 如果存在常数 $\gamma > 1$ 使得如下不等式成立:

$$\ln(\gamma\beta_k) + (\lambda_A + \lambda_N)(t_{k+1} - t_k) \leq 0, \quad (15)$$

$$\lambda_A + \lambda_N \geq 0, \quad (16)$$

则同步误差系统 (14) 是全局渐近稳定的, 即脉冲可控响应系统 (13) 渐近同步于驱动系统 (9).

证明 取 Lyapunov 函数为 $V(e) = e^T e$, 则对于 $t \in (t_{k-1}, t_k]$, $k \in N$, $V(e)$ 沿误差系统 (14) 轨迹的 Dini 导数为

$$\begin{aligned} D^+ V(e) &= \dot{e}^T e + e^T \dot{e} \\ &= (Ae + N(x, y)e)^T e \\ &\quad + e^T (Ae + N(x, y)e) \\ &= e^T (A + A^T)e \\ &\quad + e^T (N(x, y) + N^T(x, y))e \\ &\leq \lambda_A e^T e + \lambda_N e^T e \\ &= (\lambda_A + \lambda_N)V(e), \end{aligned} \quad (17)$$

于是由引理 1 中的条件 1 有 $g(t, \omega) = (\lambda_A + \lambda_N)\omega$. 给定任意 $\rho_0 > 0$, 若 $e \in S(\rho_0)$, 则有

$$\begin{aligned} \|e + U(k, e)\| &= \|e + B_k e\| \\ &= \|(I + B_k)e\| \leq \|I + B_k\| \|e\| \end{aligned}$$

$$= \rho(I + B_k)\|e\| \leq \|e\| \leq \rho_0,$$

于是有 $e + U(k, e) \in S(\rho_0)$.

另一方面, 当 $t = t_k$ 时,

$$\begin{aligned} V(e(t_k^+)) &\leq ((I + B_k)e(t_k))^T (I + B_k)e(t_k) \\ &\leq e^T(t_k)(I + B_k)^T (I + B_k)e(t_k) \\ &\leq \beta_k V(e(t_k)). \end{aligned} \quad (18)$$

由引理 1 的条件 2 可得 $\psi_k(w) = \beta_k w$. 于是由引理 1 可知系统 (14) 稳定性等价于如下比较系统的稳定性:

$$\begin{aligned} \dot{\omega}(t) &= (\lambda_A + \lambda_N)\omega(t), \quad t \neq t_k, \\ \omega(t_k^+) &= \beta_k \omega(t_k), \quad t = t_k, \\ \omega(t_0^+) &= \omega_0 \geq 0. \end{aligned} \quad (19)$$

由引理 2 可知, 如果有

$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} (\lambda_A + \lambda_N) dt + \ln(\gamma\beta_k) \leq 0,$$

即

$$\ln(\gamma\beta_k) + (\lambda_A + \lambda_N)(t_{k+1} - t_k) \leq 0,$$

以及

$$\lambda_A + \lambda_N \geq 0$$

成立时 (对应本定理的条件 (23) 和 (24)), 则系统 (14) 在原点是渐近稳定的, 证毕.

考虑到实际应用中控制器的可实现性与可操作性, 脉冲间距和控制增益常选为常数, 于是根据定理 1 可获得如下结果.

推论 1 假定 $t_k - t_{k-1} = \tau$, $B_k = B$, β , λ_A 和 λ_N 分别为 $(I + B)^T(I + B)$, $A + A^T$ 和 $N(x, y) + N^T(x, y)$ 的最大特征值. 如果存在常数 $\gamma > 1$ 使得如下不等式成立:

$$\ln(\gamma\beta) + (\lambda_A + \lambda_N)\tau \leq 0, \quad (20)$$

$$\lambda_A + \lambda_N \geq 0. \quad (21)$$

则同步误差系统 (14) 是全局渐近稳定的, 即脉冲可控响应系统 (13) 渐近同步于驱动系统 (9).

定理 1 与推论 1 给出了针对一般分数阶混沌系统的脉冲同步判据, 而对于具体的分数阶混沌系统, 可根据混沌状态有界性对 λ_N 作进一步估计. 接下来, 我们将以分数阶 Chen 混沌系统为例, 估

计 λ_N 并给出更为实用的同步判据, 针对其他具体系统的分析过程类似, 不再赘述.

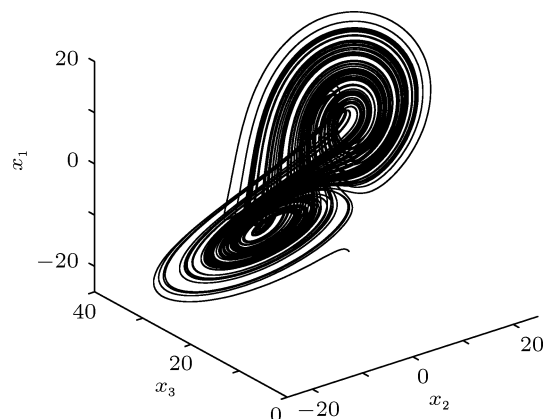


图 1 分数阶 Chen 系统的混沌吸引子

分数阶 Chen 系统同样可以由系统 (9) 来描述,

其中

$$A = \begin{bmatrix} -a & a & 0 \\ c - a & c & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{bmatrix},$$

$$\phi(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ -x_1 x_3 \\ x_1 x_2 \end{bmatrix}.$$

当 $a = 35, b = 3, c = 28, \alpha = 0.9$ 时, 系统呈现混沌行为, 其混沌吸引子如图 1 所示.

另外, 由

$$\begin{aligned} \varphi(x, y) &= \phi(y) - \phi(x) \\ &= \begin{bmatrix} 0 \\ x_1 x_3 - y_1 y_3 \\ y_1 y_2 - x_1 x_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -x_3 & 0 & -y_1 \\ x_2 & y_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} \\ &= N(x, y)e, \end{aligned}$$

可以获得

$$N(x, y) + N^T(x, y) = \begin{bmatrix} 0 & -x_3 & x_2 \\ -x_3 & 0 & 0 \\ x_2 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

进一步有 $0 \leq \lambda_N = \sqrt{x_2^2 + x_3^2} \leq \sqrt{M^2 + M^2} = \sqrt{2}M$ (由混沌状态的有界性可知, 存在正常数 M 满足 $|x_2| \leq M$ 与 $|x_3| \leq M$), 所以针对分数阶 Chen 混沌系统, 定理 1 中的不等式 (17) 可进一步整理为

$$\dot{V}(e) \leq (\lambda_A + \sqrt{2}M)V(e). \quad (22)$$

由不等式 (22) 以及与定理 1 类似的分析过程, 我们容易获得如下针对分数阶 Chen 混沌系统的脉冲同步条件.

定理 2 令 β_k 和 λ_A 分别为 $(I + B_k)^T(I + B_k)$ 和 $A + A^T$ 的最大特征值. 如果存在常数 $\gamma > 1$ 使得如下不等式成立:

$$\ln(\gamma\beta_k) + (\lambda_A + \sqrt{2}M)(t_{k+1} - t_k) \leq 0, \quad (23)$$

$$\lambda_A + \sqrt{2}M \geq 0. \quad (24)$$

则同步误差系统 (14) 是全局渐近稳定的, 即脉冲可控响应系统 (13) 渐近同步于驱动系统 (9).

推论 2 假定 $t_k - t_{k-1} = \tau$, $B_k = B$, β 和 λ_A 分别为 $(I + B)^T(I + B)$ 和 $A + A^T$ 的最大特征值. 如果存在常数 $\gamma > 1$ 使得如下不等式成立:

$$\ln(\gamma\beta) + (\lambda_A + \sqrt{2}M)\tau \leq 0, \quad (25)$$

$$\lambda_A + \sqrt{2}M \leq 0. \quad (26)$$

则同步误差系统 (14) 是全局渐近稳定的, 即脉冲可控响应系统 (13) 渐近同步于驱动系统 (9).

4 数值仿真

以分数阶 Chen 混沌系统为例, 由图 1 所示的混沌吸引子可得 $M = 36.3$. 而由

$$A + A^T = \begin{bmatrix} -70 & 28 & 0 \\ 28 & 56 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{bmatrix}$$

可得 $\lambda_A = 61.9420$, 显然有 $\lambda_A + 2M \geq 0$. 取 $\gamma = 1.1$, $B_k = B = -0.8I$, 则有 $\beta = 0.04$. 由不等

式 (25), 可获得如下的稳定域范围 (即保证系统稳定情况下允许的最大脉冲间距):

$$0 \leq \tau \leq -\ln(\gamma\beta)/(\lambda_A + \sqrt{2}M) = 0.0276.$$

取驱动系统初值为 $[2, -1, 6]^T$, 响应系统初值为 $[6, 4, 1]^T$, 脉冲间距为 $\tau = 0.025$, 仿真结果见图 2. 可见, 在脉冲控制器 ($\tau = 0.025$, $B = -0.8I$) 的作用下, 同步误差系统迅速收敛至零, 具有较好的同步效果.

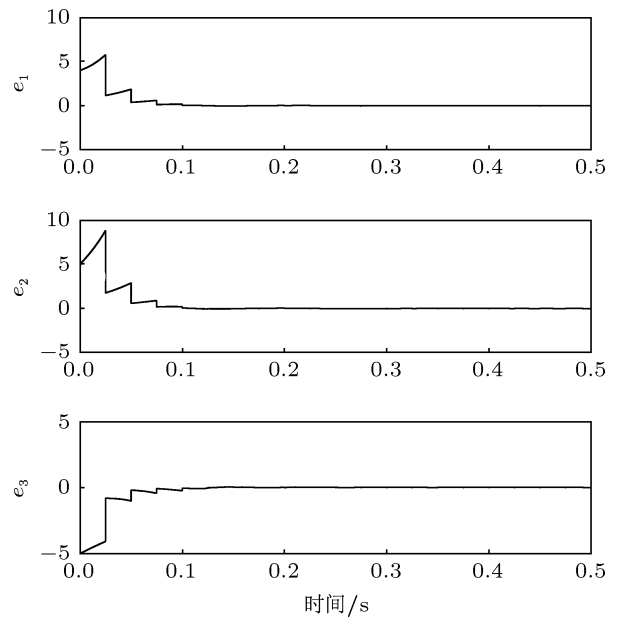


图 2 $\tau = 0.025$ 和 $B = -0.8I$ 时分数阶 Chen 系统的同步误差曲线

5 结论

针对一类典型分数阶混沌系统的同步问题, 提出基于比较系统理论的脉冲同步方法. 该方法采用响应系统与驱动系统状态变量误差的线性反馈作为脉冲控制信号, 驱动两个分数阶混沌系统实现全局渐近同步. 同时以具体系统 (分数阶 Chen 混沌系统) 为例, 给出更为实用的全局渐近同步判据, 仿真结果验证了方法的有效性.

[1] Mandelbrot B B 1983 *The Fractal Geometry of Nature* (New York: Freeman)
 [2] Hartley T T, Lorenzo C F, Qammer H K 1995 *IEEE Transactions CAS-I* **42** 485
 [3] Arena P, Caponetto R, Fortuna L, Porto D 1997 *In: Proceedings*

ECCTD, Budapest **42** 1259
 [4] Ahmad W M, Sprott J C 2003 *Chaos Solitons and Fract.* **16** 339
 [5] Li C P, Peng G J 2004 *Chaos Solitons and Fract.* **22** 443
 [6] Lu J G, Chen G R 2006 *Chaos Solitons and Fract.* **27** 685
 [7] Lu J G 2006 *Phys. Lett. A* **354** 305

- [8] Li C G, Chen G R 2004 *Physica A* **341** 55
- [9] Pecora L M, Carroll T L 1990 *Phys. Rev. Lett.* **64** 821
- [10] Bhalekar S, Daftardar-Gejji V 2010 *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.* **15** 3536
- [11] Taghvaeifard H, Erjaee G H 2011 *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.* **16** 4079
- [12] Cao H F, Zhang R X 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 050510 (in Chinese) [曹鹤飞, 张若洵 2011 物理学报 **60** 050510]
- [13] Sun N, Zhang H G, Wang Z L 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 050511 (in Chinese) [孙宁, 张化光, 王智良 2011 物理学报 **60** 050511]
- [14] Zhao L D, Hu J B, Liu X H 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 2305 (in Chinese) [赵灵冬, 胡建兵, 刘旭辉 2010 物理学报 **59** 2305]
- [15] Zhang R X, Yang S P 2010 *Chin. Phys. B* **19** 020510
- [16] Wu C J, Zhang Y B, Yang N N 2011 *Chin. Phys. B* **20** 060505
- [17] Wang X Y, Zhang Y L, Li D, Zhang N 2011 *Chin. Phys. B* **20** 030506
- [18] Sheu L J, Tam L M, Lao S K, Kang Y, Lin K T, Chen J H, Chen H K 2009 *Int. J. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.* **10** 33
- [19] Zhang H G, Ma T D, Huang G B, Wang Z L 2010 *IEEE Trans. Syst. Man Cybern. B* **40** 831
- [20] Ma T D, Fu J, Sun Y 2010 *Chin. Phys. B* **19** 090502
- [21] Ma T D, Zhang H G, Wang Z L 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 3796 (in Chinese) [马铁东, 张化光, 王智良 2007 物理学报 **56** 3796]
- [22] Zhang H G, Ma T D, Yu W, Fu J 2008 *Chin. Phys. B* **17** 3616
- [23] Zhang H G, Ma T D, Fu J, Tong S C 2009 *Chin. Phys. B* **18** 3742
- [24] Zhang H G, Ma T D, Fu J, Tong S C 2009 *Chin. Phys. B* **18** 3751
- [25] Yang T 1999 *IEEE Trans. Autom. Contr.* **44** 1081
- [26] Yang T 2001 *Impulsive Control Theory* (Berlin: Spinger-Verlag)
- [27] Podlubny I 1999 *Fractional Differential Equations* (New York: Academic)

Impulsive synchronization of fractional order hyperchaotic systems based on comparison system*

Ma Tie-Dong^{1)†} Jiang Wei-Bo¹⁾ Fu Jie²⁾

1) (College of Automation, Chongqing University, Chongqing 400044, China)

2) (Key Lab of Optoelectronic Technology and System, Ministry of Education, College of Optoelectronic Engineering, Chongqing University, Chongqing 400044, China)

(Received 27 July 2011; revised manuscript received 18 September 2011)

Abstract

In this paper, a novel impulsive control method based on comparison system is proposed to realize complete synchronization of a class of fractional order chaotic systems. By constructing the suitable response system, the original fractional order error system can be converted into the integral order one. Based on the theory of Lyapunov stability and impulsive differential equations, some effective sufficient conditions are derived to guarantee the asymptotical stability of synchronization error system. In particular, some simpler and more convenient conditions are derived by taking the same impulsive distances and control gains. Compared with the existing results, the main results in this paper are more practical and rigorous. Simulation results for fractional order Chen system show the effectiveness and the feasibility of the proposed impulsive control method.

Keywords: fractional order chaotic systems, chaos synchronization, impulsive control, comparison system

PACS: 05.45.Xt, 05.45.Jn, 05.45.Pq

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 61104080, 60804006), the Natural Science Foundation of Chongqing (Grant No. CSTC, 2010BB2238), the Research Fund for the Doctoral Program of Higher Education of China (Grant No. 20100191120025), and the China postdoctoral science foundation (Grant Nos. 20100470813, 20100480043).

† E-mail: tdma@cqu.edu.cn