

## 节点结构互异的复杂网络的时空混沌反同步\*

吕翎<sup>†</sup> 柳爽 张新 朱佳博 沈娜 商锦玉

(辽宁师范大学物理与电子技术学院, 大连 116029)

(2011年8月17日收到; 2011年9月13日收到修改稿)

研究了节点结构互异的离散型时空混沌系统构成复杂网络的反同步问题. 通过构造合适的 Lyapunov 函数, 确定了复杂网络中连接节点之间的耦合函数的结构以及控制增益的取值范围. 以物理中具有时空混沌行为的激光相位共轭波空间扩展系统、Gibbs 电光时空混沌模型、Bragg 声光时空混沌模型以及一维对流方程的离散形式作为网络节点构成的复杂网络为例进行了仿真模拟, 发现整个网络存在稳定的混沌反同步现象.

**关键词:** 反同步, 复杂网络, 异结构, 时空混沌

**PACS:** 05.45.Xt, 05.45.Pq

## 1 引言

自 Pecora 和 Carroll 首次提出主稳定函数法实现了连续时间耦合网络的完全同步以来<sup>[1]</sup>, 复杂网络的混沌同步作为网络动力学研究的主要内容, 以其在物理、通信、生物以及计算机等领域所显现的应用潜力而成为目前诸多科学领域研究的热点<sup>[2-10]</sup>. 迄今, 人们针对小世界网络、无标度网络以及大量的规则网络设计了不同的混沌同步方案, 实现了复杂网络的完全同步、广义同步以及相同步, 一些典型的同步方案已被报道. 例如, 基于 Pecora 和 Carroll 针对连续时间耦合网络提出的网络同步方法, Gade 和 Hu 将其从规则网络的同步推广到小世界网络的同步, 并给出了耦合矩阵最大本征值与耦合的节点数之间的关系<sup>[11]</sup>; Wang 和 Chen 也利用同样的方法研究了无标度网络的完全同步问题, 拓宽了这种网络同步判据的应用范围<sup>[12]</sup>; Earl 和 Strogatz 鉴于实际网络节点之间信号的传输和响应时常会出现时滞现象, 提出了一种实现时滞网络的同步方法, 给出了时滞网络的同步判据<sup>[13]</sup>; Lü 等构造了一类时变动态网络模型, 并研究了这种时变动态网络模型的混沌同步特性<sup>[14]</sup>; Donetti 等研究了网络结构的特征量与网络同步能力之间关系<sup>[15]</sup>; Ji 等推导出了时变和时滞效应共存时复杂动力学

网络的混沌同步准则<sup>[16]</sup>; Li 和 Lai 等完成了不确定复杂动力学网络的自适应脉冲混沌同步研究<sup>[17]</sup>; 卢静等进行了具有一般结构的动态网络的相同步研究<sup>[18]</sup>; 曾长燕等通过自适应脉冲控制法获得了时变时滞网络的投影同步判据<sup>[19]</sup>.

在已有的这些复杂网络混沌同步的文献报道中, 均假设网络中所有节点都是同结构的混沌系统, 即处于网络节点的混沌系统仅仅是初始条件有所差异. 在这样的假设下, 实现这些同结构混沌系统的同步只要抑制由于混沌系统对初值的敏感性而引起的轨道分离即可. 而在实际中, 复杂网络节点的结构常常存在互异的情况. 在这种情况下, 实现这些异结构混沌系统的同步还要考虑抑制由于混沌系统不同的分岔特性以及不同的吸引域引起的轨道分离. 另外, 与复杂网络的同步相比较, 复杂网络的反同步, 即网络相邻节点混沌系统状态变量的绝对值相同但符号相反的同步在加密通信、信息处理等领域的应用中安全性会更强. 显然, 研究节点结构互异的复杂网络的反同步问题将更具有实用性.

本文研究了节点结构互异的离散型时空混沌系统构成复杂网络的反同步问题. 通过构造合适的 Lyapunov 函数, 确定了复杂网络中连接节点之间的耦合函数的结构以及控制增益的取值范围. 以

\* 辽宁省自然科学基金(批准号: 20082147)和辽宁省教育厅创新团队计划(批准号: 2008T108)资助的课题.

<sup>†</sup> E-mail: luling1960@yahoo.com.cn

物理中具有时空混沌行为的激光相位共轭波空间扩展系统、Gibbs 电光时空混沌模型、Bragg 声光时空混沌模型以及一维对流方程的离散形式作为网络节点构成的复杂网络为例进行了仿真模拟,发现整个网络存在稳定的混沌反同步现象.

## 2 反同步原理

设一个任意的复杂网络具有  $N$  个节点,节点的状态方程是异结构的离散型时空混沌系统. 其中第  $j$  个节点的状态变量是  $x_n^{(j)}(i), x_n^{(j)}(i) \in R^m$ . 单个节点在不考虑耦合作用时所满足的状态方程为

$$x_{n+1}^{(j)}(i) = F_j(x_n^{(j)}(i)), \quad (1)$$

式中  $n$  表示离散化的时间,  $i$  为空间格点坐标 ( $i = 1, 2, \dots, L$ ),  $L$  为系统的尺寸.  $F_j: R^m \rightarrow R^m$ .

对节点状态方程 (1) 中的  $F_j(x_n^{(j)}(i))$  进行适当的分离

$$\begin{aligned} x_{n+1}^{(j)}(i) &= F_j(x_n^{(j)}(i)) \\ &= G_j(x_n^{(j)}(i)) + Q_j(x_n^{(j)}(i)), \end{aligned} \quad (2)$$

这里  $G_j(x_n^{(j)}(i))$  为一个线性项,

$$G_j(x_n^{(j)}(i)) = (C_j - M_j)x_n^{(j)}(i), \quad (3)$$

$C_j$  为节点时空混沌系统线性项的系数,  $M_j$  为控制增益. 显然,

$$Q_j(x_n^{(j)}(i)) = F_j(x_n^{(j)}(i)) - G_j(x_n^{(j)}(i)) \quad (4)$$

考虑网络耦合作用时,网络中第  $j$  个节点所满足的状态方程为

$$\begin{aligned} x_{n+1}^{(j)}(i) &= F_j(x_n^{(j)}(i)) \\ &\quad + S_j(x_n^{(1)}(i), x_n^{(2)}(i), \dots, x_n^{(N)}(i)) \\ &= G_j(x_n^{(j)}(i)) + Q_j(x_n^{(j)}(i)) \\ &\quad + S_j(x_n^{(1)}(i), x_n^{(2)}(i), \dots, x_n^{(N)}(i)) \\ &\quad (j = 1, 2, \dots, N), \end{aligned} \quad (5)$$

其中  $S_j(x_n^{(1)}(i), x_n^{(2)}(i), \dots, x_n^{(N)}(i))$  为连接节点之间待定的耦合函数.

定义网络各节点时空混沌系统中的状态变量之间的误差

$$\begin{aligned} e_n^{(j)}(i) &= x_n^{(j)}(i) + x_n^{(j+1)}(i) \\ &\quad (j = 1, 2, \dots, N - 1). \end{aligned} \quad (6)$$

基于 (5) 式和 (6) 式,可以进一步得到误差演化方程

$$e_{n+1}^{(j)}(i) = (C_j - M_j)e_n^{(j)}(i) + [(C_{j+1} - M_{j+1})$$

$$- (C_j - M_j)]x_n^{(j+1)}(i) + \Delta Q_j + \Delta S_j, \quad (7)$$

这里  $\Delta Q_j = Q_j(x_n^{(j)}(i)) + Q_{j+1}(x_n^{(j+1)}(i))$ ,  $\Delta S_j = S_j + S_{j+1}$ .

若下列关系成立,  $\Delta S_j = -\Delta Q_j$ , 即连接网络节点之间待定的耦合函数取

$$\begin{aligned} S_k &= (-1)^{k-1} [S_1 + Q_1(x_n^{(1)}(i))] - Q_k(x_n^{(k)}(i)) \\ &\quad (k = 2, 3, \dots, N), \end{aligned} \quad (8)$$

则误差演化方程 (7) 式可以简化为

$$\begin{aligned} e_{n+1}^{(j)}(i) &= (C_j - M_j)e_n^{(j)}(i) + [(C_{j+1} - M_{j+1}) \\ &\quad - (C_j - M_j)]x_n^{(j+1)}(i). \end{aligned} \quad (9)$$

构造网络的 Lyapunov 函数

$$V_n = \sum_{j=1}^{N-1} |e_n^{(j)}(i)|, \quad (10)$$

考虑到 (9) 式,可以得到

$$\begin{aligned} \Delta V &= \sum_{j=1}^{N-1} (|e_{n+1}^{(j)}(i)| - |e_n^{(j)}(i)|) \\ &= \sum_{j=1}^{N-1} (|(C_j - M_j)e_n^{(j)}(i) + [(C_{j+1} - M_{j+1}) \\ &\quad - (C_j - M_j)]x_n^{(j+1)}(i)| - |e_n^{(j)}(i)|). \end{aligned} \quad (11)$$

在 (11) 式中,只要控制增益满足  $|(C_j - M_j)| < 1$ , 即

$$-1 + C_j < M_j < 1 + C_j \quad (12)$$

以及

$$M_{j+1} = C_{j+1} - C_j + M_j, \quad (13)$$

则必有

$$\Delta V < 0. \quad (14)$$

根据 Lyapunov 定理 [20], 此时, 整个网络各节点之间达到反同步.

## 3 仿真模拟分析

以物理中具有时空混沌行为的激光相位共轭波空间扩展系统、Gibbs 电光时空混沌模型、Bragg 声光时空混沌模型以及一维对流方程的离散形式这四个异结构时空混沌系统作为网络节点来说明上述同步机理. 显然, 网络节点数  $N = 4$ .

激光相位共轭波空间扩展系统的状态方程为<sup>[21,22]</sup>

$$\begin{aligned} x_{n+1}^{(1)}(i) &= (1 - \varepsilon)f(x_n^{(1)}(i)) + \varepsilon f(x_n^{(1)}(i - 1)) \\ &= (1 - \varepsilon)\omega J_0^2[(x_n^{(1)}(i) - B)^{1/2}] \\ &\quad + \varepsilon\omega J_0^2[(x_n^{(1)}(i - 1) - B)^{1/2}], \end{aligned} \quad (15)$$

其中  $\omega, B$  为系统的参量,  $J_0$  表示零级 Bessel 函数.  $\varepsilon$  为系统空间离散点间的耦合强度因子. 研究表明, 当  $\omega = 28, B = 1, \varepsilon = 0.1$  时, 系统呈现时空混沌态, 其相图如图 1 所示.

Gibbs 电光时空混沌模型具有下列形式<sup>[22,23]</sup>:

$$\begin{aligned} x_{n+1}^{(2)}(i) &= (1 - \varepsilon)f(x_n^{(2)}(i)) + \varepsilon f(x_n^{(2)}(i - 1)) \\ &= (1 - \varepsilon)A \sin^2(x_n^{(2)}(i) - x_b) \\ &\quad + \varepsilon A \sin^2(x_n^{(2)}(i - 1) - x_b), \end{aligned} \quad (16)$$

其中  $A, x_b$  为系统的参量,  $\varepsilon$  为系统空间离散点间的耦合强度因子. 参量  $A = 3, x_b = 0.85\pi$ , 空间离散点间的耦合强度因子  $\varepsilon = 0.4$  时系统的相图如图 2 所示.

Bragg 声光时空混沌模型为<sup>[22,24]</sup>

$$\begin{aligned} x_{n+1}^{(3)}(i) &= (1 - \varepsilon)f(x_n^{(3)}(i)) + \varepsilon f(x_n^{(3)}(i - 1)) \\ &= (1 - \varepsilon)\pi[r - \mu \sin^2(x_n^{(3)}(i) - V_b)] \\ &\quad + \varepsilon\pi[r - \mu \sin^2(x_n^{(3)}(i - 1) - V_b)], \end{aligned} \quad (17)$$

其中  $r, \mu, V_b$  为系统的参量,  $\varepsilon$  为系统空间离散点间的耦合强度因子. 参量  $r = 0.5, \mu = 1.5, V_b = 0.25\pi$ , 空间离散点间的耦合强度因子  $\varepsilon = 0.4$  时系统的相图如图 3 所示.

一维对流方程的离散形式可以表示为<sup>[25]</sup>

$$x_{n+1}^{(4)}(i) = 1 - \delta x_n^{(4)}(i+1) - \eta [(1 + \delta)x_n^{(4)}(i)]^2, \quad (18)$$

其中  $\delta, \eta$  为系统参量. 研究表明, 当  $\delta = -0.05, \eta = 1.75$  时, 系统呈现时空混沌态, 其相图如图 4 所示.

上述四个时空混沌模型由于其状态方程是异结构的, 因此, 由图 1—4 所示的相图有明显的差别.

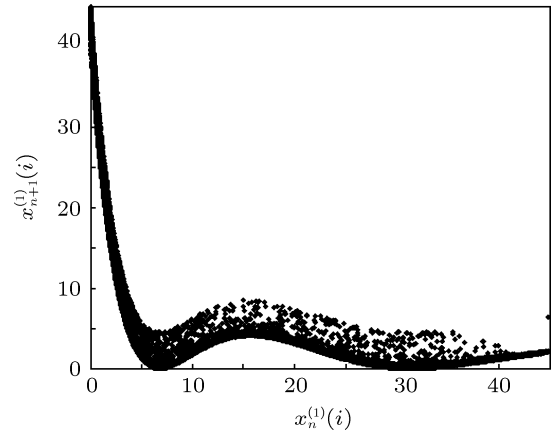


图 1 激光相位共轭波空间扩展系统的相图

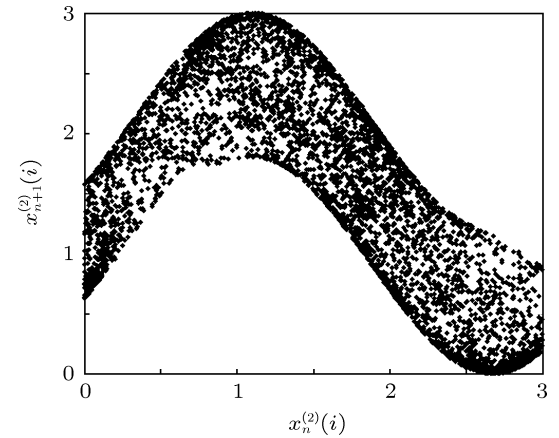


图 2 Gibbs 电光时空混沌模型的相图

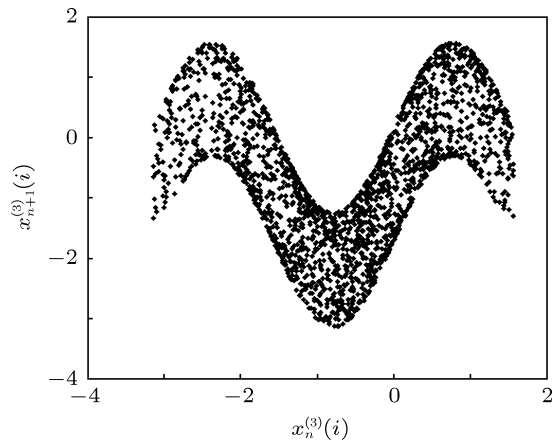


图 3 Bragg 声光时空混沌模型的相图

仿真模拟网络的反同步时, 将上述四个时空混沌模型 (15)—(18) 作为网络的节点, 按照 (5) 式的连接构成复杂网络. 网络中所有参量的取值均保持不变. 且由于  $C_j = 0$ , 所以, 根据 (12) 和 (13) 式, 控制增益  $M_j$  满足的取值范围为  $-1 < M_j < 1$ .

在这个范围内, 我们任意选取  $M_j = -0.5$ . 耦合函数  $S_1 = 0$ , 其余耦合函数  $S_k (k = 2, 3, 4)$  的选取满足 (8) 式, 这意味着复杂网络中第一个节点激光相位共轭波空间扩展系统被取作目标系统, 其余节点是响应系统. 状态变量的初始值  $x_0^{(1)}(i) = 0.1$ ,  $x_0^{(2)}(i) = 0.2$ ,  $x_0^{(3)}(i) = 0.3$ ,  $x_0^{(4)}(i) = 0.5$ . 在第 200 s 时进行网络的耦合连接, 仿真模拟网络误差变量  $e_n^{(j)}(i) (j = 1, 2, 3)$  随时空的演化规律以及网络各节点的相图如图 5—10 所示. 由图 5—7 可以看出, 实施网络耦合连接后, 网络的误差信号迅速平稳地趋于零, 网络反同步得以实现. 相应的图 8—10 中网络同步后所有节点的相图的形状由同步前图 1—4 所示的各不相同变为与节点 1 激光相位共轭波空间扩展系统的相图形状完全相同, 仅仅是符号互为相反.

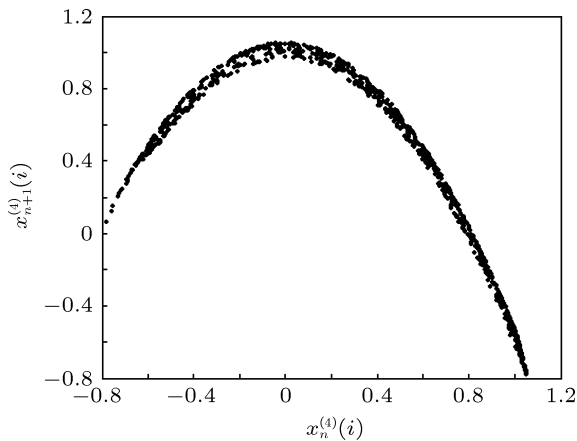


图 4 一维对流方程的相图

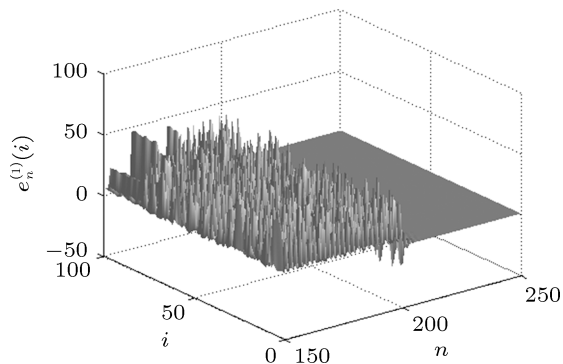


图 5 节点 1 与 2 误差变量的时空演化

实际上, 本文提出的节点结构互异的复杂网络的时空混沌反同步机理对节点结构相同的复杂网络也适用. 对于节点结构相同的复杂网络, 由于网络节点时空混沌系统线性项的系数  $C_j$  均相同, 所

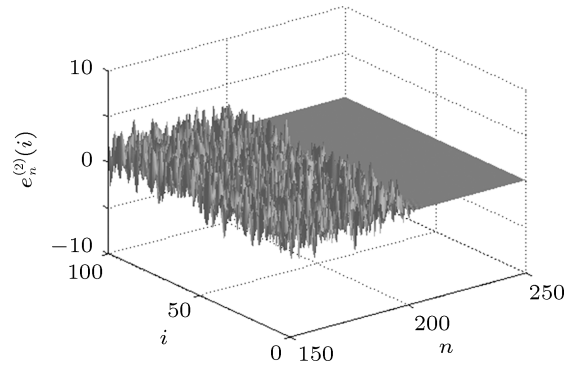


图 6 节点 2 与 3 误差变量的时空演化

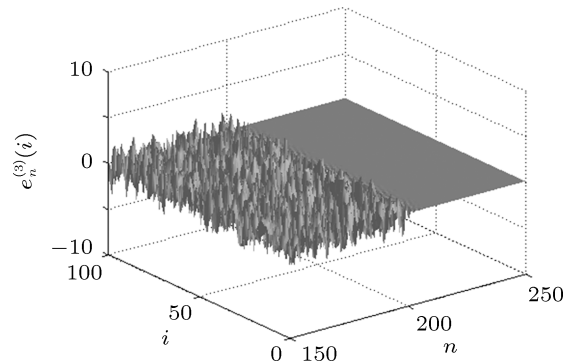


图 7 节点 3 与 4 误差变量的时空演化

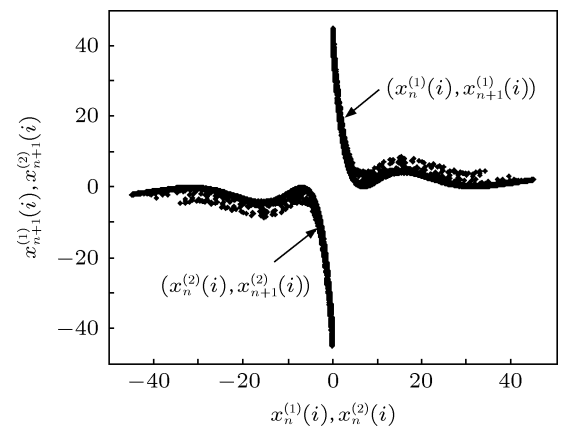


图 8 节点 1 与 2 的反同步相图

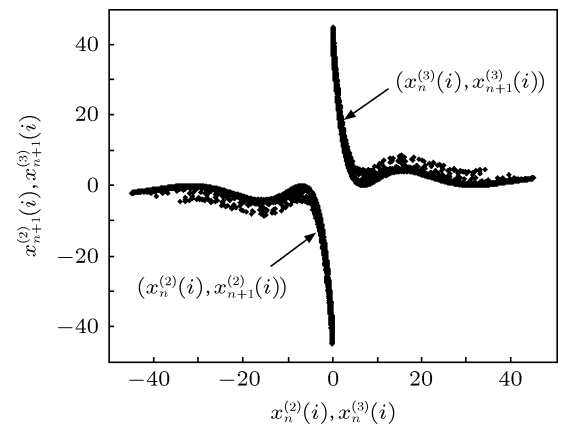


图 9 节点 2 与 3 的反同步相图

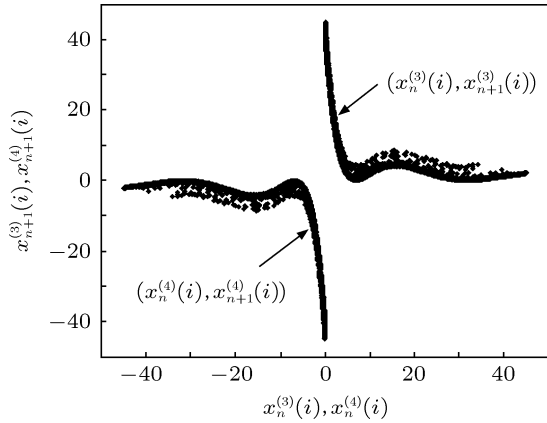


图 10 节点 3 与 4 的反同步相图

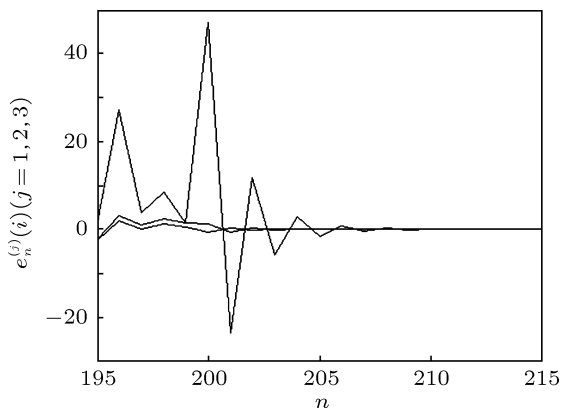


图 11 节点误差变量的时间演化 ( $N = 4$ )

以同步条件 (13) 式中网络各节点控制增益  $M_j$  取相同即可. 因而可以把节点结构相同的复杂网络的时空混沌反同步看成是节点结构互异的复杂网络反同步的特例. 另外, 仿真分析还发现, 网络规模的大小对网络反同步的稳定性没有明显影响. 我们对图 11 网络节点数  $N = 4$  以及图 12 网络节点数  $N = 500$  时的反同步仿真模拟结果进行了比较. 图 11 是激光相位共轭波空间扩展系统、Gibbs 电光时空混沌模型、Bragg 声光时空混沌模型以及一维对流方程的离散形式作为网络节点在空间任一

格点的网络误差变量  $e_n^{(j)}(i) (j = 1, 2, 3)$  随时间的演化规律. 图 12 是上述四个系统以相等的数目作为网络 500 个节点在空间任一格点的网络误差变量  $e_n^{(j)}(i) (j = 1, 2, \dots, 499)$  随时间的演化规律. 仿真结果显示, 在网络其他参量取值保持不变, 仍在第 200 s 进行网络的耦合连接时, 两者的反同步速率以及误差曲线的稳定性并无明显差别.

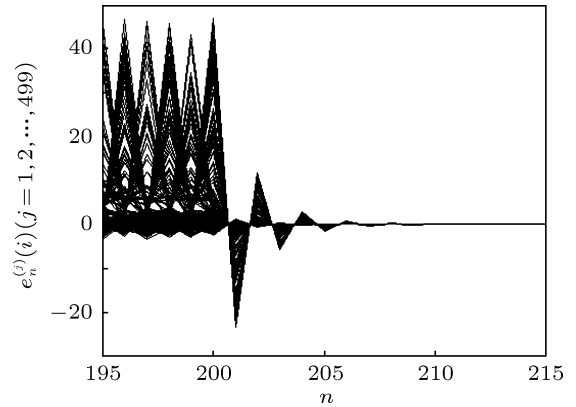


图 12 节点误差变量的时间演化 ( $N = 500$ )

## 4 结论

研究了节点结构互异的离散型时空混沌系统构成复杂网络的反同步问题. 通过构造合适的 Lyapunov 函数, 确定了复杂网络中连接节点之间的耦合函数的结构以及控制增益的取值范围. 以物理中具有时空混沌行为的激光相位共轭波空间扩展系统、Gibbs 电光时空混沌模型、Bragg 声光时空混沌模型以及一维对流方程的离散形式作为网络节点构成的复杂网络为例进行了仿真模拟, 以此验证网络反同步原理的有效性. 仿真结果表明, 控制增益在满足 (12) 和 (13) 式的条件下取值, 均可以使网络节点与节点之间达到反同步. 网络耦合连接后, 网络的误差信号迅速地稳定在零值.

[1] Pecora L M, Carroll T L 1998 *Phys. Rev. Lett.* **80** 2109  
 [2] Timme M, Wolf F, Geisel T 2004 *Phys. Rev. Lett.* **92** 74101  
 [3] Motter A E, Zhou C, Kurths, J 2005 *Phys. Rev. E* **71** 16116  
 [4] He G M, Yang J Y 2008 *Chaos, Solitons and Fractals* **38** 1254  
 [5] Li D, Leyva I, Almendral J A, Sendiña-Nadal I, Buldú J M, Havlin S, Boccaletti S 2008 *Phys. Rev. Lett.* **101** 168701  
 [6] Checco P, Biey M, Kocarev L 2008 *Chaos, Solitons and Fractals* **35** 562  
 [7] Pisarchik A N, Jaimes-Reátegui R, Sevilla-Escoboza R, Boccaletti

S 2009 *Phys. Rev. E* **79** 55202  
 [8] Chen L, Qiu C, Huang H B 2009 *Phys. Rev. E* **79** 45101  
 [9] Pisarchik A N, Jaimes-Reátegui R, Sevilla-Escoboza R, Boccaletti S 2009 *Phys. Rev. E* **79** 55202  
 [10] Agnes E J, Erichsen Jr R, Brunnet L G 2010 *Physica A* **389** 651  
 [11] Gade P M, Hu C K 2000 *Phys. Rev. E* **62** 6409  
 [12] Wang X F, Chen G R 2002 *IEEE Trans. Circuit Syst. I* **49** 54  
 [13] Earl M G, Strogatz S H 2003 *Phys. Rev. E* **67** 036204  
 [14] Lü J H, Yu X H, Chen G R 2004 *Physica A* **334** 281

- [15] Donetti L, Hurtado P I, Muñoz M A 2005 *Phys. Rev. Lett.* **95** 188701
- [16] Ji D H, Park J H, Yoo W J, Won S C, Lee S M 2010 *Phys. Lett. A* **374** 1218
- [17] Li K, Lai C H 2008 *Phys. Lett. A* **372** 1601
- [18] Lu J, Zhang R, Xu Z Y 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 5949 (in Chinese) [卢静, 张荣, 徐振源 2010 物理学报 **59** 5949]
- [19] Zeng C Y, Sun M, Tian L X 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 5288 (in Chinese) [曾长燕, 孙梅, 田立新 2010 物理学报 **59** 5288]
- [20] Lü L 2000 *Nonlinear dynamics and chaos* (Dalian: Dalian publishing house) (in Chinese) [吕翎 2000 非线性动力学与混沌 (大连: 大连出版社)]
- [21] Beli M R, Stojkov P 1990 *Opt. Quantum. Electron* **22** 157
- [22] Kaneko K 1985 *Phys. Lett. A* **111** 321
- [23] Gibbs H M, Hopf F A, Kaplan D L, Shoemaker R L 1981 *Phys. Rev. Lett.* **46** 474
- [24] Vallee R, Delisle C, Chrostowski J 1984 *Phys. Rev. A* **30** 336
- [25] Chen G R, Liu S T 2003 *J. Bifur. Chaos* **13** 935

## Spatiotemporal chaos anti-synchronization of a complex network with different nodes\*

Lü Ling<sup>†</sup> Liu Shuang Zhang Xin Zhu Jia-Bo Shen Na Shang Jin-Yu

(College of Physics and Electronic Technology, Liaoning Normal University, Dalian 116029, China)

(Received 17 August 2011; revised manuscript received 13 September 2011)

### Abstract

Anti-synchronization of complex network is investigated in which nodes are discrete spatiotemporal chaos systems with diverse structures. The form of the coupling functions connecting nodes in the complex network and the control gain are obtained through constructing an appropriate Lyapunov function. The spatially extended system of laser phase conjugate wave having spatiotemporal chaos behavior in physics, Gibbs electrical-optical spatiotemporal chaos model, Bragg acousto-optical spatiotemporal chaos model and the one-dimensional discrete convective equation are all taken as nodes of the complex network. Artificial results show that a stable anti-synchronization is obtained in the whole network.

**Keywords:** anti-synchronization, complex network, diverse structure, spatiotemporal chaos

**PACS:** 05.45.Xt, 05.45.Pq

\* Project supported by the Natural Science Foundation of Liaoning Province, China (Grant No. 20082147), and the Innovative Team Program of Liaoning Educational Committee, China (Grant No. 2008T108).

<sup>†</sup> E-mail: luling1960@yahoo.com.cn