多分界面下四维蔡氏电路的张弛簇发及其机制研究*

张晓芳† 陈小可 毕勤胜

(江苏大学土木工程与力学学院, 镇江 212013)

(2012 年 5 月 31 日 收到; 2012 年 7 月 26 日 收到修改稿)

在经典蔡氏电路的基础上, 引入反馈元件, 建立了包含多个分界面的四维广义蔡氏电路. 在适当的参数条件下, 状态变量之间会存在量级上的差距, 从而构成了包含两个时间尺度的快慢耦合系统. 分析了快子系统的平衡点及其性质, 进而利用微分包含理论, 探讨了不同的非光滑分界面上的奇异性. 给出了系统在两组参数条件下的不同周期簇发行为, 应用快慢分析法探讨了系统轨迹在经过多个分界面时的特殊簇发现象, 揭示了多吸引子共存时不同的簇发行为的形成机理以及非光滑分岔对簇发行为的影响.

关键词: 非光滑分岔, 多分界面, 簇发, 快慢系统

PACS: 05.45.Ac, 05.45.Pq **DOI:** 10.7498/aps.62.010502

1 引 言

近年来, 一类含有多时间尺度的非线性动力系统由于其广泛的工程背景引起了国内外学者的广泛关注 [1]. 其动力学行为通常表现为周期簇发 (periodic bursting)[2], 即周期过程呈现出大幅振动和小幅振动的组合特征. 一般地, 系统的行为会在不同时间尺度上来回变化, 即表现出张弛振动特性, 称其为簇发. 迄今为止, 在多时间尺度非线性系统的复杂性领域已经取得了一定的成果 [3−8], 但是大多数工作都是围绕光滑系统开展的 [9,10], 而对于在多时间尺度下非光滑分界面上出现的复杂动力学行为则研究较少 [11]. 而在实际工程系统中往往包含大量非光滑因素, 该类系统中存在着不同于光滑系统的复杂现象, 尤其当存在多个非光滑分界面时, 系统在穿越不同分界面时会产生更为复杂的动力学行为 [12], 这些行为及其产生原因还没有被深刻地揭示, 需要在该领域进行深入细致的研究.

作为简单而又典型的非光滑振子, 蔡氏电路具有各种丰富的非线性行为, 各国学者通过理论和实验等方法对其进行了相关的研究 [13,14]. 基于该系统, 各种修改或推广的模型被建立起来, 例如四阶混沌电路 [15]、五阶超混沌振子 [16], 并发现许多新的动力学特性. 然而, 这些工作大都是基于同一时间尺度的. 本文基于经典蔡氏电路, 引入反馈元件, 构建具有六个非光滑分界面特性的四阶快慢耦合系统, 其中, 快子系统的向量空间中存在多个稳定的吸引子. 利用快慢分析方法探讨了在两组参数条件下的不同簇发行为, 发现了系统轨迹在经过多个非光滑分界面时的特殊簇发现象, 揭示了多吸引子共存时不同的簇发行为的形成机理以及非光滑分岔对簇发行为的影响.

2 多分界面非光滑蔡氏电路模型

在经典蔡氏电路的基础上, 引入反馈元件, 得到一个四阶微分电路系统, 如图 1 所示. 电路中 L_1, L_2 为线性电感元件, C_1, C_2 为线性电容元件, R_1, R_2 为线性电阻元件, 而 N_R 则为电压控制电流分段线性型非线性电阻, 相应的伏安特性曲线如图 2 所示. 应用 KCL 与 KVL 可得该动力学系统的数学模型:

$$C_1\frac{\mathrm{d}V_{C_1}}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{R_1}(V_{C_2}-V_{C_1})+i_{L_1},$$

$$C_2\frac{\mathrm{d}V_{C_2}}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{R_1}(V_{C_1}-V_{C_2})-i_{N_R}-i_{L_2},$$

* 国家自然科学基金 (批准号: 10972091, 20976075) 和江苏大学高级人才基金 (批准号: 10JDG144) 资助的课题.

† 通讯作者. E-mail: xfzhang@ujs.edu.cn

$$\begin{aligned}
&\mathrm{L}_1\frac{\mathrm{d}i_{\mathrm{L}_1}}{\mathrm{d}t}=-V_{\mathrm{C}_1},\\
&\mathrm{L}_2\frac{\mathrm{d}i_{\mathrm{L}_2}}{\mathrm{d}t}=V_{\mathrm{C}_2}-i_{\mathrm{L}_2}\mathrm{R}_2,
\end{aligned}\tag{1}$$

其中通过非线性电阻 $\mathrm{N_R}$ 的电流 $i_{\mathrm{N_R}}$ 可表为

$$\begin{aligned}
i_{\mathrm{N_R}}&=g(V_{\mathrm{C}_2})\\
&=G_3V_{\mathrm{C}_2}+\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{3}(G_i-G_{i+1})(|V_{\mathrm{C}_2}+E_{i+1}|\\
&\quad-|V_{\mathrm{C}_2}-E_{i+1}|).
\end{aligned}$$

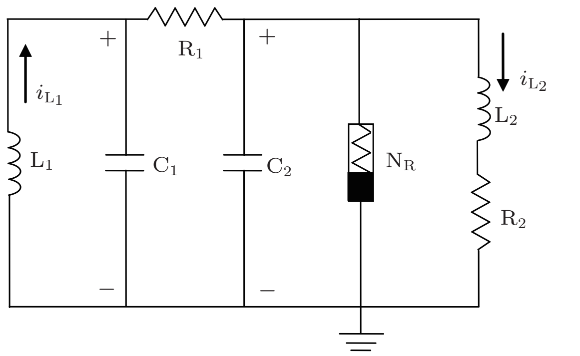

图 1　四维快慢耦合振子电路图

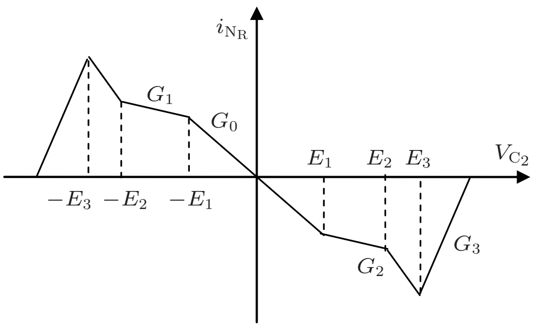

图 2　元件 $\mathrm{N_R}$ 的伏安特性曲线

引入相应变换 $x=V_{\mathrm{C}_1}, y=V_{\mathrm{C}_2}, z=\mathrm{R}_1i_{\mathrm{L}_1}, w=\mathrm{R}_2i_{\mathrm{L}_2}$, $\tau=\dfrac{t}{\mathrm{C}_1\mathrm{R}_1}$, 将 (1) 式化为无量纲形式如下:

$$\begin{cases}
\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau}=-x+y+z,\\
\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\tau}=\alpha(x-h(y)-\varepsilon w),\\
\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\tau}=-\beta x,\\
\dfrac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}\tau}=\delta(y-w),
\end{cases}\tag{2}$$

其中 $h(y)$ 的表达式如下:

$$\begin{aligned}
h(y)=&m_3y+\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{2}(m_i-m_{i+1})\\
&\times(|y+c_{i+1}|-|y-c_{i+1}|),
\end{aligned}$$

式中 $\alpha=\dfrac{\mathrm{C}_1}{\mathrm{C}_2}$, $\beta=\dfrac{\mathrm{C}_1}{\mathrm{L}_1\mathrm{R}_1^2}$, $\delta=\dfrac{\mathrm{C}_1\mathrm{R}_1\mathrm{R}_2}{\mathrm{L}_2}$, $\varepsilon=\dfrac{\mathrm{R}_1}{\mathrm{R}_2}$, $m_i=\mathrm{R}_1G_i, c_i=E_i$, 而 $y=\pm c_i$ $(i=1, 2, 3)$ 为非光滑分界面, 以 $\Sigma_{1\pm}$, $\Sigma_{2\pm}$, $\Sigma_{3\pm}$ 记之, 它将 y 划分为七个区间. 在分界面处向量场虽然保持了连续性, 但其光滑性却受到了破坏, 这也是系统具有非线性特征的根源.

为了讨论的方便, 现做如下约定:

在 y 值的不同区间 $(-\infty, -c_3)$, $[-c_3, -c_2)$, $[-c_2, -c_1)$, $[-c_1, c_1)$, $[c_1, c_2)$, $[c_2, c_3)$, $[c_3, -\infty)$ 中, 相应的平衡点、特征方程以及特征值, 分别在相应符号中用下标 $3-$, $2-$, $1-$, $0\pm$, $1+$, $2+$, $3+$ 以示区别.

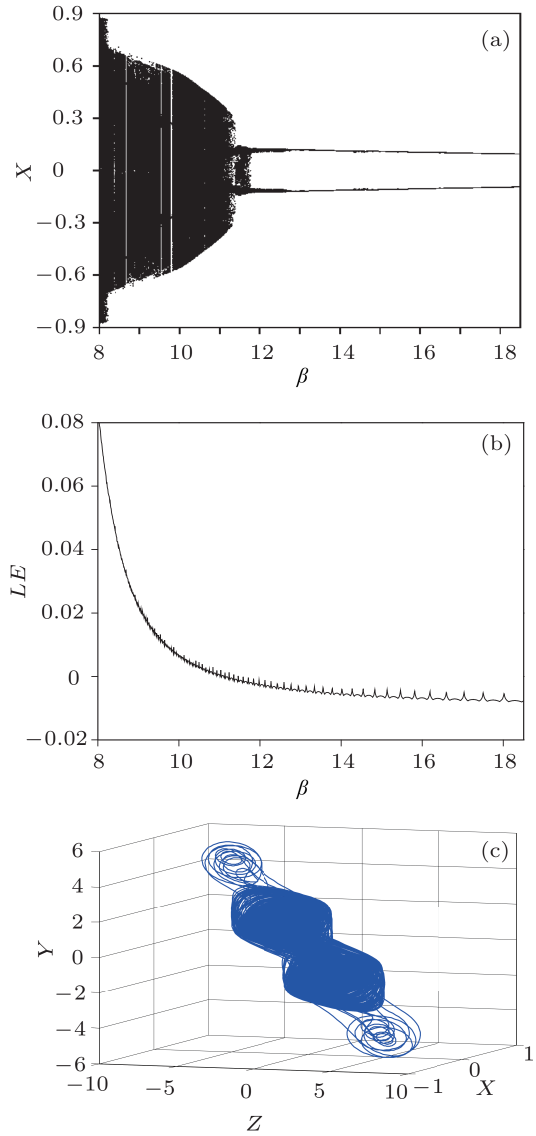

图 3　系统的动力学演化　(a) $y=0$ 截面的分岔图; (b) 最大 Lyapunov 指数; (c) 系统的相图

调整电路元件 L_2 的取值, 使得 δ 远小于其他参数 $\alpha, \beta, \varepsilon$ 等, 即这些参数之间存在量级上的差异, 从而导致状态变量可分为两组, 其中, x, y, z 为快变量, 而 w 为慢变量, 整个系统为含两时间尺度的快慢耦合系统.

取定参数 $\alpha = 6.58$, $\delta = 0.01$, $\varepsilon = 0.50$, $m = [-0.30,\ 0.59,\ -0.28,\ 0.22]$, $c = [1.00,\ 2.23,\ 4.00]$, 做出系统随参数 β 变化的分岔图和最大 Lyapunov 指数图, 如图 3(a) 和 3(b) 所示. 从图中不难发现, 在 $\beta > 11.35$ 的区域内, 系统为周期解, 当 $\beta \in [8.00,\ 11.35]$ 区域内, 系统为混沌解. 图 3(c) 为当 $\beta = 10.00$ 时的相图, 此时系统为多涡卷的混沌系统.

3 快子系统的平衡态及其相应特征

为了深入分析系统 (2) 的动力学特性, 我们首先分析快子系统平衡点的稳定性. 快子系统为

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + y + z, \\ \dot{y} = \alpha(x - h(y) - \varepsilon w), \\ \dot{z} = -\beta x. \end{cases} \tag{3}$$

在快子系统 (3) 中, 慢变量 w 是时间的函数, 将其作为参数来分析, 从而得到快子系统在不同区域中的平衡点为 $EF_{i\pm}$: $\left[o,\ -\dfrac{\varepsilon w \pm d_i}{m_i},\ \dfrac{\varepsilon w \pm d_i}{m_i}\right]$, $(i = 0,\ 1,\ 2,\ 3)$, 其中 $d_0 = 0$, $d_1 = c_1(m_0 - m_1)$, $d_2 = c_1(m_0 - m_1) + c_2(m_1 - m_2)$, $d_3 = c_1(m_0 - m_1) + c_2(m_1 - m_2) + c_3(m_2 - m_3)$.

计算表明, 在正负对称的区间内平衡点所对应的 Jacobian 矩阵形式相同, 故可统一表示之. 其相应的特征方程如下:

$$\begin{aligned} eq_{i\pm} :& \lambda^3 + (\alpha m_i + 1)\lambda^2 + (\alpha m_i - \alpha + \beta)\lambda \\ & + \alpha\beta m_i = 0, (i = 0,\ 1,\ 2,\ 3). \end{aligned} \tag{4}$$

对应于实际参数, 由 Routh-Hurwitz 判别准则可知, 当满足 $\alpha m_i + 1 > 0$ 且 $(\alpha m_i + 1)(\alpha m_i - \alpha + \beta) - \alpha\beta m_i > 0$ 时, 平衡点是稳定的. 由 Hopf 分岔定理知, 当 $(\alpha m_i + 1)(\alpha m_i - \alpha + \beta) - \alpha\beta m_i = 0$ 时, 会产生 Hopf 分岔, 导致周期振荡, 其振荡频率为 $\omega = \sqrt{\alpha m_i - \alpha + \beta}$.

对于快子系统 (3) 而言, 平衡态未失稳时表现为系统的沉寂态 (quiescent state), 而其不同的失稳模式会导致不同的激发态 (spiking state).

对于该动力学系统, 由于其非线性来源于分段函数, 其上存在着多个不同的分界面, 当系统轨迹穿越这些分界面时, 可能产生不同的分岔模式, 从而引起系统的各种特殊动力学行为. 这些不同的分岔模式, 将会导致系统在沉寂态和激发态之间转化. 为此, 下面分析系统在非光滑分界面上的分岔.

4 非光滑分岔分析

为了分析系统中连续而非光滑的向量场, 在此特引入微分包含来分析其中的非光滑分岔. 对于快子系统 (3), 存在有六个非光滑分界面, 而在各个分界面两边, 存在有各自相应的平衡点. 为此引入广义 Jacobian 矩阵. 表示为

$$\begin{aligned} \boldsymbol{J}(\pm c_i) = &\left\{ qJ_{(i-1)\pm} + (1-q)J_{i\pm},\ q \in [0,\ 1] \right\} \\ &(i = 1,\ 2,\ 3), \end{aligned}$$

其相应的特征值为 q 的函数, 特征方程由下式表示:

$$\begin{aligned} &\lambda^3 + (\alpha(m_i - m_{i+1})q + \alpha m_{i+1} + 1)\lambda^2 \\ &+ (\alpha(m_i - m_{i+1})q + \alpha m_{i+1} - \alpha + \beta)\lambda \\ &+ \alpha\beta((m_i - m_{i+1})q + m_{i+1}) = 0 \\ &(i = 0,\ 1,\ 2), \end{aligned} \tag{5}$$

当辅助参数 q 在 $[0,\ 1]$ 之间变化时, 若特征方程出现零实部特征值, 则在分界面上可能会产生非光滑分岔. 对应于实际参数, 当满足条件

$$\begin{aligned} &(\alpha(m_i - m_{i+1})q + \alpha m_{i+1} + 1)(\alpha(m_i - m_{i+1})q \\ &+ \alpha m_{i+1} - \alpha + \beta) - \alpha\beta((m_i - m_{i+1})q + m_{i+1}) = 0 \end{aligned}$$

时, 在分界面处可能会产生 Hopf 分岔, 其相应的振荡频率为

$$\Omega_i = \sqrt{\alpha(m_i - m_{i+1})q + \alpha m_{i+1} - \alpha + \beta}, \tag{6}$$

使得系统轨迹在抵达分界面 $\Sigma_{i\pm}$ 时, 按频率 Ω_i 振荡.

因此在分界面 $\Sigma_{i\pm}$ 处, (5) 式中所定义的特征值随辅助参数 q 的变化而穿越虚轴, 在相应的非光滑分界面上可能存在 Fold 分岔、Hopf 分岔或其组合. 在第二节的参数条件下, 取定 $\beta = 14.30$, 进行非光滑分岔的数值分析.

在分界面 $\Sigma_{1\pm}$ 上, 广义 Jacobian 矩阵的特征值曲线如图 4(a) 所示, 特征值多次穿越虚轴, 出现了 Fold 分岔与 Hopf 分岔的组合, 在同一分界面上出现了两对纯虚根, 即 $q = 0.143$ 和 $q = 0.230$ 时分别产生了一对纯虚根, 其相应的 Hopf 分岔频率分别为 $\omega = 3.281$ 和 $\omega = 3.202$.

同样的, 在分界面 $\Sigma_{2\pm}$ 上, 广义 Jacobian 矩阵的特征曲线如图 4(b) 所示, 其具体情况与 $\Sigma_{1\pm}$ 相似, 即 $q = 0.765$ 和 $q = 0.853$ 时分别产生了一对纯虚根, 其相应的 Hopf 分岔频率分别为 $\omega = 3.203$ 和 $\omega = 3.280$.

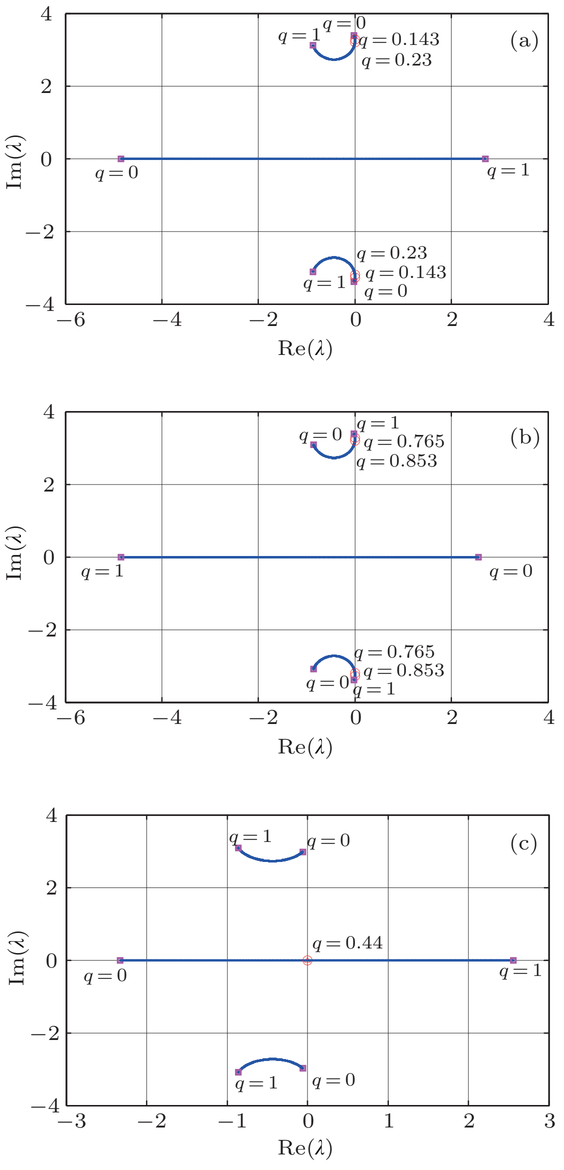

图 4　非光滑分界面上广义 Jacobian 矩阵的特征曲线 (a) $J(\pm c_1)$ 的特征值曲线; (b) $J(\pm c_2)$ 的特征值曲线; (c) $J(\pm c_3)$ 的特征值曲线

由此可见, 在上述两种非光滑分界面上可能会表现出复杂的簇发形式.

而在分界面 $\Sigma_{3\pm}$ 上, 广义 Jacobian 矩阵的特征曲线如图 4(c) 所示, 只有一零特征值, 因而在这对分界面上可能出现 Fold 分岔.

在此需要指出, 在整个系统的快速运动过程中, 快子系统起主导作用, 而在慢变过程中慢变量的调节行为将对系统的运动起到重要作用, 它们相互影响导致了系统的张弛簇发.

5　对称的 FFHF 簇发及其分岔机制

在上节同样的参数条件下, 做出系统的相图和时间历程图, 如图 5(a) 和 5(b), 此时 $m_2 = 0.59$, 系统为周期解 (与分岔图分析一致), 存在明显的快慢现象. 下面重点分析此周期簇发现象的产生原因.

由于系统的向量场关于原点对称, 其周期解亦会具有对称形式. 图 5(c) 为快子系统的平衡点, 其相应的特征值如表 1 所示. 图中, 实线为稳定的平衡点 (焦点), 而虚线为不稳定平衡点 (鞍 - 焦点). 也即 $EF_{1\pm}$ 与 $EF_{3\pm}$ 为稳定的焦点, 而其他平衡点为不稳定的鞍 - 焦点, 平衡态 EF_0 和 $EF_{1\pm}$, $EF_{2\pm}$, $EF_{3\pm}$ 对应于系统的沉寂态, 其不同的失稳模式会导致不同的激发态. 为方便叙述, 现将快子系统关于慢变参数的平衡点图与簇发轨迹进行叠加, 如图 5(d) 所示. 当 $w < y$ 时, $\dot{w} > 0$, 而 $w > y$ 时, $\dot{w} < 0$, 故而知相图沿顺时针循行.

我们以 P_0 [0.0260, −1.0000, 0.9991, 0.5973] 点为起点, 说明对称的 FFHF 簇发的产生机制. 由于 P_0 在非光滑分界面 Σ_{1-} 上, 在穿越此分界面时系统发生 Fold 分岔, 从 P_0 出发的轨迹受到快子系统中一个稳定焦点 EF_{3+} 的吸引, 很快到达 P_1. 由于此时快子系统平衡线 EF_{3+} 均为稳定的焦点, 当不存在快慢耦合时, 快子系统平面上的轨迹将按照 $\Omega_{3\pm} = 2.9811$ 的频率逐渐收敛于 EF_{3+}, 因此, 当存在慢变量的调节作用时, 耦合系统的轨迹会围绕稳定的平衡点 EF_{3+} 振荡, 由数值模拟可知此时的振荡频率为 3.0018, 与稳定焦点 EF_{3+} 特征值中的共轭复根虚部基本一致.

需要说明的是, 在多个吸引子共存的情况下, 轨迹稳定在哪个平衡点的附近, 与分岔点在相应快子系统平衡点的吸引域有关. 可以取定慢变量 $w = 0.5973$, 以 P_0 在快子系统中的对应点 P_{F0}[0.0260, −1.0000, 0.9991] 作为初始条件, 做出快子系统的相图, 相图在 y-z 平面内的投影如图 6(a) 所示, 可见轨迹很快稳定到 EF_{3+} 点. 由此可说明 P_0 在快子系统中的对应点 P_{F0} 位于 EF_{3+} 的吸引域内, 所以轨线穿过 EF_{1+} 平衡线到达 EF_{3+} 附近.

表 1 $m_2 = 0.59$ 各区间内平衡点的特征值表

平衡点	EF_0	$EF_{1\pm}$	$EF_{2\pm}$	$EF_{3\pm}$
特征值	2.7059	−4.8501	2.5620	−2.3285
	$-0.8659 \pm 3.1117\text{i}$	$-0.0161 \pm 3.3832\text{i}$	$-0.8598 \pm 3.0893\text{i}$	$-0.0596 \pm 2.9811\text{i}$

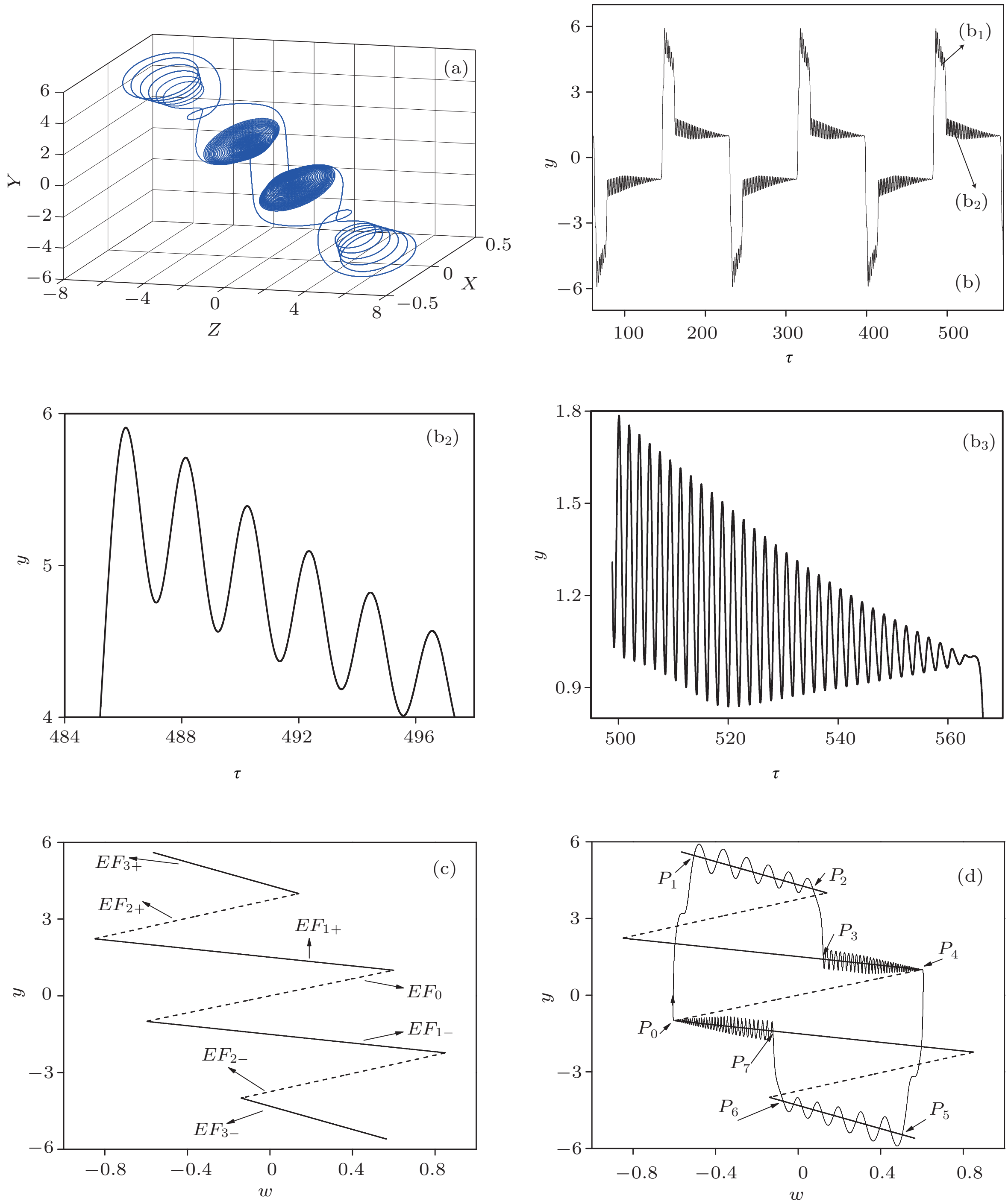

图 5 FFHF 簇发机制分析图 (a) 系统相图; (b) 系统的时间历程图; (c) 快子系统的平衡点; (d) 系统相图在 w-y 平面内的投影

当围绕平衡点 EF_{3+} 振荡的轨迹在慢变量的调节下到达点 P_2 [−0.1565, 4.0000, −4.0668, 0.0782] 时, 再次触碰到非光滑分界面 Σ_{3+}, 产生了平衡点的 Fold 分岔现象, 平衡点的稳定性发生了改变. 采用上面同样的方法来分析点 P_2 的运动趋势, 取 $w = 0.0782$, 以 P_{F2}[−0.1565, 4.0000, −4.0668] 为初始条件做出快子系统的相图, 如图 6(b) 所示, 轨迹很快稳定到 EF_{1+} 平衡点, 即 P_{F2} 位于 EF_{1+} 的吸引域内. 考察快慢耦合系统随 m_2 变化的动力学演化过程, 由特征方程 (4) 可知, 当 $m_2 = 0.4625$ 时, 快子系统的平衡点 $EF_{1\pm}$ 失稳, 产生超临界 Hopf 分岔, 导致周期振荡, 其相应的频率可以计算为 $\Omega_{1\pm} = 3.2807$. 因此, 当因 Fold 分岔引起 P_2 跳跃到 P_3 时, 系统轨迹会产生围绕平衡线 EF_{1+} 的振荡, 由数值模拟可知, 其振荡频率为 3.2061, 与 EF_{1+} 的 Hopf 分岔频率基本吻合. 随着慢变量的调节作用, 当耦合系统的轨迹运动到点 P_4 [0.0012, 1.0000, −0.9926, 0.5990] 时, 由于非光滑分界面的影响, 产生 Fold 分岔, 平衡点的稳定性将改变, 导致系统轨迹向快子系统新的稳定平衡线 EF_{3-} 的跳跃, 并基于同样的原因, 围绕 EF_{3-} 附近快速振荡, 由于向量场的对称性, 下半部分的运动和上半部分的相对应, 不再详细叙述. 当轨线再次回到点 P_0 时, 开始下一个周期运动. 可以看出整个周期振荡过程中包含较为复杂的分岔形式, 它由三个 Fold 和一个 Hopf 分岔组成, 我们定义为 Fold/Fold/Hopf/Fold 簇发 (FFHF 簇发).

由时间历程图 5(b) 可以看到, 当平衡点经非光滑分岔而失稳后, 轨迹在其他平衡点的吸引下会在极其短暂的时间内, 跳到另一个稳定的平衡点, 慢变量 w 的变化调节着快系统的演变, 使其在一段时间内围绕平衡点做快速振荡, 直到轨迹运动到平衡点的不稳定子空间上或遇到非光滑分界面为止. 系统受慢变量 w 的连续调节, 在两对稳定焦点和三个不稳定的鞍 - 焦平衡点之间来回跳跃, 从而使快慢子系统形成特殊的对称式 FFHF 簇发解.

从以上分析可知, 此时的张弛振荡是在两个时间尺度下的周期振荡行为. 由于多个稳定焦点和多个不稳定鞍 - 焦点的存在, 因此产生了多涡卷的振荡形式, 其与多涡卷混沌现象的产生原因是相类似的. 当参数满足周期条件时, 产生多涡卷周期振荡, 反之, 产生多涡卷混沌. 而相应的, 分岔点处于快子系统中不同吸引子的吸引域, 将直接影响到系统轨线的运动趋势. 下节将取不同参数, 得到另一种的周期簇发现象.

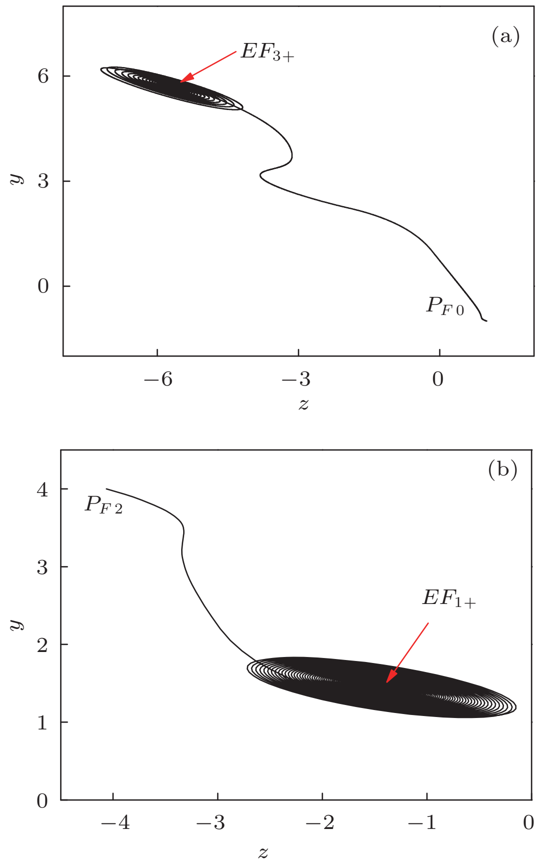

图 6　分岔点在快子系统中的轨迹　(a) 分岔点 P_0 在快子系统中的轨迹; (b) 分岔点 P_2 在快子系统中的轨迹

6　对称的 FF 簇发及其分岔机制

随着 m_2 的变化, 快子系统各非光滑区间的平衡点的吸引域会发生变化, 从而导致簇发形式的变化. 所以改变 m_2 的取值, 图 7 给出了 $m_2 = 0.75$ 时耦合系统的动力学特性, 此时, 平衡点的特征值如表 2 所示.

表 2　$m_2 = 0.75$ 各区间内平衡点的特征值表

平衡点	EF_0	$EF_{1\pm}$	$EF_{2\pm}$	$EF_{3\pm}$
特征值	2.8701	−6.1428	2.7202	−2.4899
	−0.8925 ± 3.0971i	−0.0349 ± 3.4833i	−0.8871 ± 3.0730i	−0.0196 ± 2.9633i

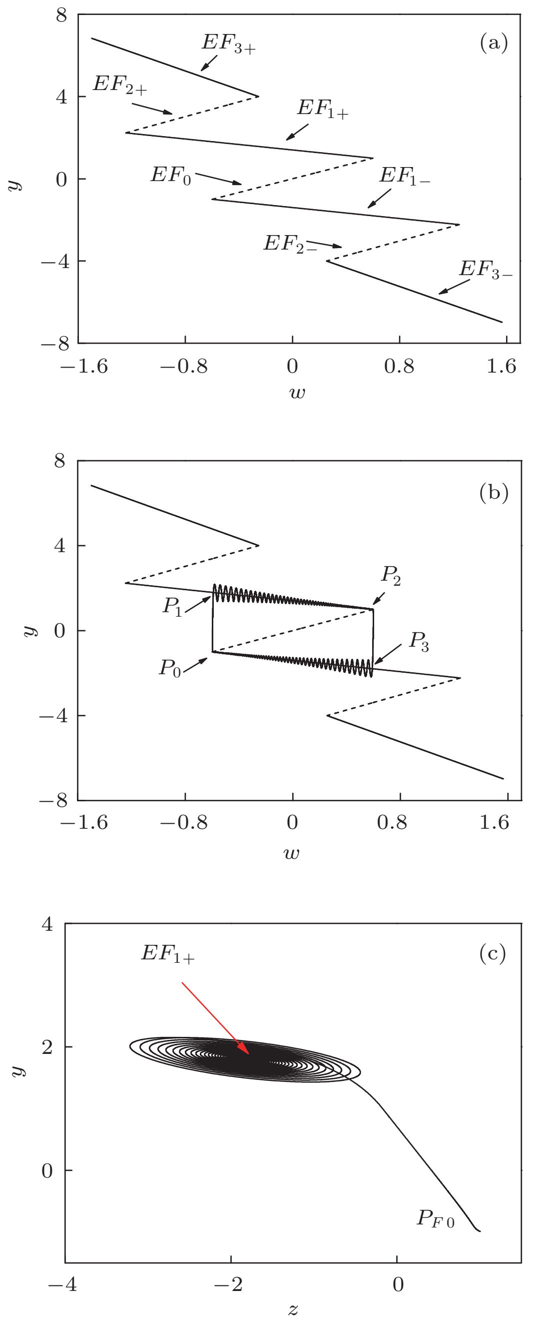

图 7 对称的 FF 簇发机制分析图 (a) 快子系统的平衡点; (b) 系统相图; (c) 分岔点 P_0 在快子系统中的轨迹

从图 7 中可以看出, 此时由 Fold 分岔引起在不同平衡线之间的跳跃行为与图 4 相比发生了变化, 为揭示此时簇发现象的产生机理, 同样我们将平衡点分岔图与相图进行叠加, 如图 7(b) 所示, 系统的簇发行为与上节所述不同, 相图仅在区间 $|y| < c_2$ 中. 以 P_0 [0.0089, −1.0000, 1.0000, −0.5973] 为起点, 按照系统轨迹顺时针运动的趋势, 来分析簇发的形成机理. 轨迹在穿越分界面 Σ_{1-} 时, 系统发生平衡点的 Fold 分岔, 取 $w = -0.5973$, 以 P_{F0}[0.0089, −1.0000, 1.0000] 为初始条件做出快子系统的相图, 如图 7(c) 所示, P_{F0} 位于 EF_{1+} 的吸引域内, 所以轨迹向快子系统的平衡点 EF_{1+} 运动, 当到达 P_1 后, 在慢变量的调节下绕稳定平衡点 EF_{1+} 快速振荡, 其数值计算的频率为 3.4839, 与稳定焦点 EF_{1+} 特征值共轭复根中虚部一致. 在经过一段时间的振荡之后, 轨线再次触碰到非光滑分界面 Σ_{1+}, 到达点 P_2[−0.0089, 1.0000, −1.0000, 0.5973], 由于在分界面上发生了 Fold 分岔, 平衡点的稳定性改变, 同样, 由于 P_{F2} 位于 EF_{1-} 的吸引域内, 轨迹跳到快子系统的平衡点 EF_{1-} 附近, 在慢变量的调节下绕稳定平衡点做快速振荡, 其振荡频率与上半部分一致. 整个相图以原点为对称中心, 反映了向量场的对称性, 在慢变量的微调作用下, 在快慢过程中循环运动, 产生对称式 Fold/Fold 簇发行为.

与上一种簇发现象不同, 轨迹只在两个稳定的焦点 Σ_{1+} 和 Σ_{1-} 之间跳跃. 由此可见, 在多个吸引子共存的情况下, 由于分岔点位于不同的平衡点的吸引域, 导致轨迹在不同的吸引子之间跳跃, 从而产生不同的簇发形式.

7 结 论

针对含多个分界面的四维快慢耦合蔡氏电路, 分析了快子系统的平衡点和每个分界面的非光滑分岔, 在两组参数条件下给出了不同的簇发现象, 分析了相应的分岔机制. 发现了在慢变量的调节下, 系统轨迹在穿越不同的分界面时产生了不同的分岔, 从而导致不同的簇发行为. 当多个吸引子共存的情况下, 随着系统参数的不同, 快子系统平衡点的吸引盆发生变化, 影响了系统的运动趋势, 轨线在不同的吸引子之间来回跳跃, 产生不同的簇发行为.

[1] Chiba H 2011 *J. Differential Equations* **250** 112

[2] Both R, Finger W, Chaplain R A 1976 *Biol. Cybernet.* **23** 1

[3] Rinzel J 1985 *Ordinary and Partial Differential Equations* (Berlin: Springer-Verlag) p304

[4] Izhikevich E M 2000 *Int. J. Bifurcat. Chaos* **10** 1171

[5] Perc M, Marhl M 2003 *Chaos, Solitons and Fractals* **18** 759

[6] Mease K D 2005 *Appl. Math. Comput.* **164** 627
[7] Lashina E A, Chumakova N A, Chumakov G A, Boronin A I 2009 *Chem. Eng. J.* **154** 82
[8] Wang H X, Wang Q Y, Lu Q S 2011 *Chaos, Solitons and Fractals* **44** 667
[9] Sundarapandian V, Sundarapandian I 2012 *Math. Comput. Modelling* **55** 1904
[10] Gao T G, Chen G R, Chen Z Q, Cang S J 2007 *Phys. Lett.* A **361** 78
[11] Leine R I 2006 *Physica* D **223** 121
[12] Ren H P, Li W C, Liu D 2010 *Chin. Phys.* B **19** 030511
[13] Gámez-Guzmán L, Cruz-Hernández C, López-Gutiérrez R M, García-Guerrero E E 2009 *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.* **14** 2765
[14] Mkaouar H, Boubaker O 2012 *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.* **17** 1292
[15] Koliopanos C L, Kyprianidis I M, Stouboulos I N, Anagnostopoulos A N, Magafsa L 2003 *Chaos, Solitons and Fractals* **16** 173
[16] Yu S M, Yu Z D 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 6859 (in Chinese) [禹思敏, 禹之鼎 2008 物理学报 **57** 6859]

Relaxation bursting and the mechanism of four-dimensional Chua's circuit with multiple interfaces*

Zhang Xiao-Fang† Chen Xiao-Ke Bi Qin-Sheng

(*Faculty of Civil Engineering and Mechanics, Jiangsu University, Zhenjiang* 212013*, China*)

(Received 31 May 2012; revised manuscript received 26 July 2012)

Abstract

Based on the classical Chua's circuit, a four-dimensional Generalized Chua's circuit with multiple interfaces is established by introducing feedback elements. For the appropriate condition, there exists a difference in order of magnitude between the variables of state and a fast-slow coupled system, thereby forming a fast- and slow-coupled system at time scale. Analyzing the equilibrium points and the characteristics of the fast subsystems, and combining the theory of Clarke differential inclusions, the singularities on the non-smooth boundaries are explored. Two types of periodic bursting phenomena for different conditions are presented. Fast-slow analysis is employed to explore the special cluster phenomenon while the system trajectory passes across multiple interfaces. The coexisting different bursting mechanisms for the case with multiple attractors are explored in detail, while the influence of non-smooth bifurcations on bursting behavior is revealed.

Keywords: non-smooth bifurcation, multiple interfaces, bursting, fast-slow system

PACS: 05.45.Ac, 05.45.Pq **DOI:** 10.7498/aps.62.010502

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 10972091, 20976075) and the Senior Qualified Personal Foundation of Jiangsu University, China (Grant No. 10JDG144).

† Corresponding author. E-mail: xfzhang@ujs.edu.cn