

# 激光驱动下腔与玻色 - 爱因斯坦凝聚中的量子相变\*

刘妮<sup>†</sup>

(山西大学物理电子工程学院理论物理研究所, 太原 030006)

(2012年6月14日收到; 2012年8月9日收到修改稿)

Dicke 模型中的量子相变在三十多年前已被预言, 该模型描述的是  $N$  个二能级原子与单模腔场集体耦合的系统. 在标准 Dicke 模型的基础上加入原子光的非线性相互作用和含时外场驱动, 使用含时幺正变换和 Holstein-Primafoff 变换方法从理论上推导出基态能量表达式. 并且给出了丰富的相图, 而且这些性质最近已有文献从实验上验证. 本文主要呈现了非线性相互作用和外场驱动对量子相变的影响.

**关键词:** Dicke 模型, 量子相变, Holstein-Primafoff 变换

**PACS:** 37.30.+i, 42.50.Pq

**DOI:** 10.7498/aps.62.013402

## 1 引言

玻色 - 爱因斯坦凝聚 (BEC) 与高精细光腔实验的组合 [1,2] 开辟了新的探索, 因为它不仅显示了最高量子能级上物质光相互作用, 而且在量子信息过程中有潜在的应用. 在该新奇的装置下, 所有的超冷原子占据在相同的量子态上, 而且整体与单模光场发生相同的相互作用, 结果能达到强的原子光耦合强度. 这种强耦合开拓了新的研究方向, 如腔光力学的实现 [3] 和探索量子门的奇异多体量子现象, 其中量子门是用腔调制的长程相互作用 [4–11]. 三十多年前已预测到 Dicke 模型存在正常相到超辐射相的量子相变 [12–15]. 最近, 实验上在 BEC 腔系统中首次观测到该相变 [16,17]. 实验中引入了动量依赖的自旋态, 并且典型的“no-go 理论”由此而克服 [18]. 我们知道“no-go 理论”是排除超辐射相的. 并且, 引入了由光格势诱导的有趣的原子光相互作用 [19]. 由于该非线性原子光相互作用项中原子数  $N$  的存在, 导致非线性相互作用可以达到与有效腔频相同数量级, 甚至大于该数量级. 在该强的相互作用区, 丰富的动力学特性和新的量子相变已被预测 [20,21]. 本文不但考虑了该强相互作用对相图的影响, 而且引入了外场驱动的作用. 该外场驱动

强度会改变相变点的位置, 当强度增大时相变会提前发生, 但强度达到 2 MHz 时, 基本只有超辐射相存在. 可见, 外场强度不能无限制地调大, 而且实验上外场驱动强度通过激光是很容易调控的.

## 2 拓展的 Dicke 模型

### 2.1 理论模型

Dicke 模型描述一个二能级原子系统集体耦合到一个单模量子化电磁场的情形, 当原子 - 场耦合强度超过某个临界值时, 系统会经历一个零温量子相变. 低于这个临界值时系统处于正常相, 此时所有原子处于基态, 辐射场处于真空态; 反之系统处于超辐射相, 此时原子激发态具有宏观布居数, 光场处于相干态. 这种由集体量子现象引起的超辐射量子相变在原子物理和量子光学中已为人们广泛研究. 此外量子混沌、基态纠缠、临界行为等与量子相变相关的领域也为大家所关注. 我们依据 Esslinger 组的实验装置 [16] (即所有 Rb<sup>87</sup> 的超冷原子跟光腔诱导的单模光场发生集体相互作用), 运用集体自旋算子可以给出拓展的 Dicke 模型的哈密

\* 国家自然科学基金(批准号: 11075099, 11047167, 11105087)资助的课题.

† 通讯作者. E-mail: 317446484@qq.com

顿量如下 ( $\hbar = 1$ ):

$$\begin{aligned} H = & \left( \omega + \frac{U}{N} S_z \right) a^\dagger a + \omega_0 S_z \\ & + \frac{g}{\sqrt{N}} (a^\dagger + a) (S_+ + S_-) \\ & + \sqrt{N} \Omega (a^\dagger e^{-i\omega_f t} + a e^{i\omega_f t}), \end{aligned} \quad (1)$$

其中,  $N$  是原子数; 有效腔频  $\omega = \omega_c - \omega_p + NU_0(1+E)/2$ , 而  $\omega_c$  是腔频,  $\omega_p$  是横向泵浦激光频率;  $U_0 = g_0^2 / (\omega_p - \omega_a)$  是单个原子最大耦合引起的光移,  $g_0$  是单个原子与光场的耦合强度,  $\omega_a$  是原子的跃迁频率,  $E$  是个系数;  $U = NEU_0$  是非线性原子光相互作用; 有效原子频率  $\omega_0 = 2\omega_r$ , 而原子的反冲能量  $\omega_r = k^2/2m$ ; 集体耦合强度  $g = g_0 \xi \sqrt{N}/2 (\omega_p - \omega_a)$ , 而  $\xi$  是最大泵浦拉比频率;  $\Omega$  是频率为  $\omega_f$  的驱动激光的振幅;  $a^\dagger$  和  $a$  代表光子的产生和湮灭算符;  $S_i (i = \pm, z)$  是集体原子算符, 满足  $SU(2)$  角动量关系.

将哈密顿量 (1) 式写在相互作用绘景中, 其中

$$\begin{aligned} H_0 = & \omega_r a^\dagger a, \\ H_i = & (\omega - \omega_f) a^\dagger a + \omega_0 S_z \\ & + \frac{g}{\sqrt{N}} (a^\dagger + a) (S_+ + S_-) \\ & + \frac{U}{N} S_z a^\dagger a + \sqrt{N} \Omega (a^\dagger e^{-i\omega_f t} + a e^{i\omega_f t}). \end{aligned}$$

最后得到.

$$\begin{aligned} H_I = & (\omega - \omega_f) a^\dagger a + \omega_0 S_z \\ & + \frac{g}{\sqrt{N}} (e^{i\omega_f t} a^\dagger + e^{-i\omega_f t} a) (S_+ + S_-) \\ & + \frac{U}{N} S_z a^\dagger a + \sqrt{N} \Omega (a^\dagger + a). \end{aligned} \quad (2)$$

## 2.2 含时幺正变换

该模型的哈密顿量 (2) 中相互作用部分显含时间, 为此做一个含时规范变换 [22]  $\hat{U}(t) = e^{i\omega_f S_z t}$ , 使其在新规范下不含时, 其中

$$\hat{H}' = \hat{U} \hat{H}_I \hat{U}^\dagger - i \hat{U} \frac{\partial \hat{U}^\dagger}{\partial t}.$$

在计算中我们忽略高频振荡项  $e^{2i\omega_f t} S_+ a^\dagger$  和  $e^{-2i\omega_f t} S_- a$ , 并且设  $\Delta = \omega - \omega_f$  和  $\Delta_0 = \omega_0 - \omega_f$ , 最后得到不含时的哈密顿量:

$$\begin{aligned} H' = & \Delta a^\dagger a + \Delta_0 S_z + \frac{g}{\sqrt{N}} (S_+ a + S_- a^\dagger) \\ & + \frac{U}{N} S_z a^\dagger a + \sqrt{N} \Omega (a^\dagger + a). \end{aligned} \quad (3)$$

## 2.3 平均场理论处理系统

由于原子数  $N = 10^5$ , 哈密顿量 (3) 所统治的基态特性可以考虑用角动量算符的 Holstein-Primakoff 变换来得到, 这种变换是用单模玻色子来重新描述集体自旋算子的, 其数学形式为

$$\begin{aligned} S_+ &= b^\dagger \sqrt{N - b^\dagger b}, \\ S_- &= \sqrt{N - b^\dagger b} b, \\ S_z &= b^\dagger b - \frac{N}{2}. \end{aligned} \quad (4)$$

为了找到集体原子和光子发生相干激发的临界相变点, 我们引入一套新的玻色算符来重新定义腔场和原子, 并满足条件

$$\begin{aligned} \tilde{a}^\dagger &= a^\dagger + \sqrt{N} \alpha, \\ \tilde{b}^\dagger &= b^\dagger - \sqrt{N} \beta. \end{aligned} \quad (5)$$

条件 (5) 中参数  $\alpha$  和  $\beta$  是表征激发的两个  $C$  数, 运用变分法可以确定参数  $\alpha$  和  $\beta$  的值.

将 (4) 和 (5) 式带入哈密顿量 (3), 最后得到如下形式:

$$H = NH_0 + N^{1/2} H_1 + N^0 H_2 + \dots$$

令  $H_1 = 0$ , 我们得到表征系统基态特性的方程组:

$$\begin{cases} \Delta_0 \beta - g \alpha \sqrt{k} \left( 1 - \frac{\beta^2}{k} \right) + U \alpha^2 \beta = 0, \\ -\Delta \alpha + g \beta \sqrt{k} - U \alpha \left( \beta^2 - \frac{1}{2} \right) + \Omega = 0. \end{cases} \quad (6)$$

同时基态能量的表达式如下:

$$\begin{aligned} H_0 = & \left( \Delta + U \beta^2 - \frac{U}{2} \right) \alpha^2 + \Delta_0 \left( \beta^2 - \frac{1}{2} \right) \\ & - 2\alpha \left( g\beta \sqrt{k} + \Omega \right), \end{aligned} \quad (7)$$

最后我们可以得到展示系统基态特性的方程:

$$\begin{aligned} \beta \left[ \Delta_0 - \frac{g \left( g + \frac{\Omega}{\beta \sqrt{k}} \right) (1 - 2\beta^2)}{\Delta + U \beta^2 - U/2} \right. \\ \left. + \frac{U \left( g\beta \sqrt{k} + \Omega \right)^2}{(\Delta + U \beta^2 - U/2)^2} \right] = 0. \end{aligned} \quad (8)$$

基于方程 (8) 和基态能量  $H_0$ , 我们得到了原子数的期待值随序参量变化的相图.

### 3 相图及分析

图 1 为原子光非线性相互作用  $U = 0$  的情形下, 被激发原子数  $\langle S_z \rangle/N$  的期待值作为原子 - 场耦合强度  $g$  和外场驱动强度  $\Omega$  的函数。当  $U = 0$  时, 系统退化为标准的 Dicke 模型加外场驱动, 这样我们就能看外场驱动强度对系统基态特性的影响。从图 1 可以看出, 当  $\Omega = 0$  时系统发生了标准的 Dicke 量子相变, 临界相变点在  $g = 1$  处。当  $\Omega$  增大时, 系统仍然是发生正常相到超辐射相的量子相变, 但是在耦合强度小于 1 时就发生了相变。而且外场驱动增加到 2 时基本上系统只存在超辐射相, 也就是说外场驱动不能太大; 图 2 中我们将参数重新取定为  $\Delta = -20$ ,  $\Delta_0 = 0.05$ , 图像呈现的物理与图 1 是一致的。

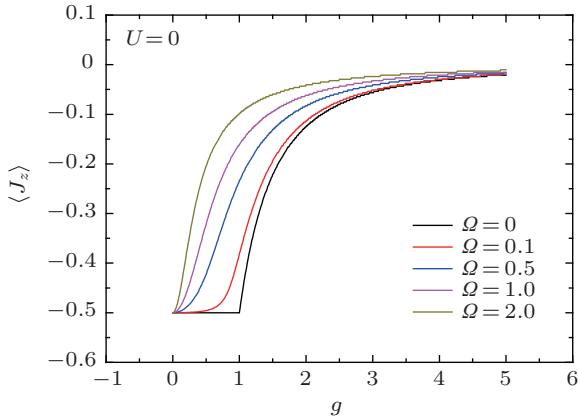


图 1 被激发原子数  $\langle S_z \rangle/N$  的期待值作为原子 - 场耦合强度  $g$  的函数, 参数取值  $\Delta = 20$ ,  $\Delta_0 = 0.05$

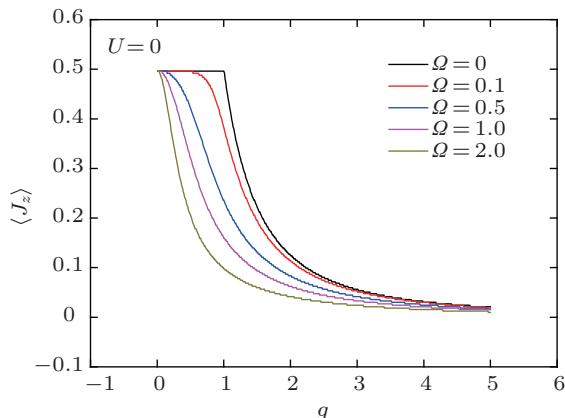


图 2 被激发原子数  $\langle S_z \rangle/N$  的期待值作为原子 - 场耦合强度  $g$  的函数, 参数取值  $\Delta = -20$ ,  $\Delta_0 = 0.05$

图 3 清晰地描述了非线性原子光相互作用  $U$  对被激发原子数  $\langle S_z \rangle/N$  的期待值的影响, 自变量是原子 - 场耦合强度  $g$ 。图中实的彩色线是  $U$

取正值, 虚的彩色线是  $U$  取负值, 黑线对应标准 Dicke 模型, 临界相变点是 1, 且  $\langle S_z \rangle_{(g \leq 1)} = -0.5$ ,  $\langle S_z \rangle_{(g \geq 1)} \neq -0.5$ , 发生了正常相到超辐射相的量子相变。从不同的  $U$  对应的线可以看出,  $U$  越大, 相变点对应的耦合强度越小, 且原子被激发越小; 反之  $U$  越小, 相变点对应的耦合强度越大, 且原子被激发越大。也就是说  $U$  越大系统越容易发生相变, 但是原子的宏观占据并不大。

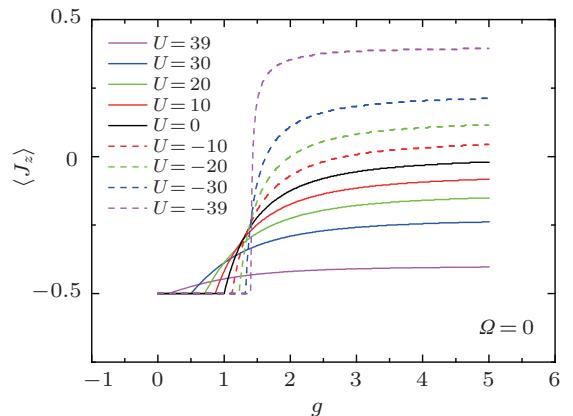


图 3 被激发原子数  $\langle S_z \rangle/N$  的期待值随原子 - 场耦合强度  $g$  的函数, 参数取值  $\Delta = 20$ ,  $\Delta_0 = 0.05$

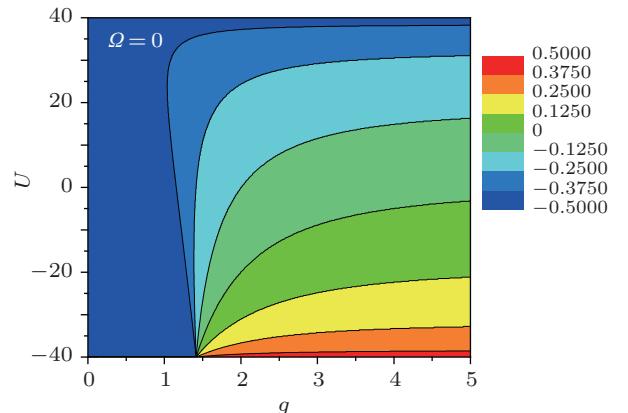


图 4 被激发原子数  $\langle S_z \rangle/N$  的期待值随原子 - 场耦合强度  $g$  和非线性原子光相互作用  $U$  的变化图像, 参数取值  $\Delta = 20$ ,  $\Delta_0 = 0.05$

图 4 给出的是原子 - 场耦合强度  $g$  和非线性原子光相互作用  $U$  对被激发原子数的影响。如图所示, 当非线性原子光相互作用确定时, 即  $U$  给定为某一固定值, 被激发原子数的期待值随着耦合强度  $g$  的增大而增大, 且蓝色区域和彩色区域的交界线为临界相变边界。 $g$  小于临界相变点时,  $\langle S_z \rangle/N = -0.5$  (图示蓝色区域), 表示原子未被激发; $g$  大于临界相变点,  $\langle S_z \rangle/N > -0.5$  (图示彩色区域), 表示原子被不程度激发, 这主要依赖于耦合强度的

取值,也就是图3给出的不同取值  $U$  的情形.当小于临界相变界时,无论耦合强度和非线性原子光相互作用怎样变化,原子数的期待值保持  $-0.5$ ,没有激发,即系统处于正常相;当大于临界相变界时,任取定耦合强度  $g$ ,被激发原子数的期待值随非线性原子光相互作用强度线性减小,但该区域内全部是超辐射相.需要强调的是  $U = 0$  的情形所展示的相图对应标准 Dicke 模型的量子相变.

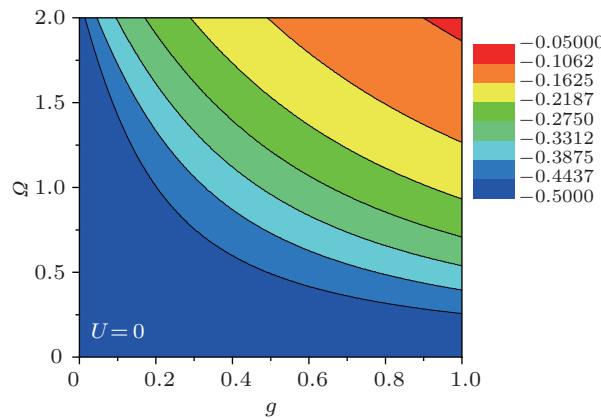


图 5 被激发原子数  $\langle S_z \rangle/N$  的期待值随原子 - 场耦合强度  $g$  和外场驱动强度  $\Omega$  的变化图像, 参数取值  $\Delta = 20$ ,  $\Delta_0 = 0.05$

图 5 主要展示的是无非线性原子光相互作用下外场驱动强度  $\Omega$  对原子激发的影响.从图可以看出:  $\Omega$  较小时系统处于蓝色正常相区;当外场驱动强度  $\Omega$  增强时,系统发生了二级相变(蓝色 - 彩色),而且当  $\Omega$  增大时,随着原子 - 场耦合强度增强,系统很快处于超辐射相;当  $\Omega = 2$  时只有在  $g$  很小时系统处于正常相,很快系统就发生了正常区到超辐射区的量子相变(蓝色 - 彩色),也就是说原子的宏观占据数很多.可见,若想观测到由朗道对称破缺导致的二级相变,外场驱动强度不能取得过大,这样平均场理论会失效.

## 4 结 论

本文在标准 Dicke 模型的基础上加入了原子光的非线性相互作用和含时的外场驱动.在平均场近似理论和含时幺正变换方法下,我们推导出了含时系统的基态能量表达式以及表征基态特性的方程.本文主要调节不同的参数给出了丰富的相图,而且相图所展示的性质最近已从实验上验证<sup>[16]</sup>,尤其是非线性相互作用和外场驱动强度对量子相变的影响.

- [1] Brennecke F, Donner T, Ritter S, Bourdel T, Köhl M, Esslinger T 2007 *Nature* **450** 268
- [2] Colombe Y, Steinmetz T, Dubois G, Linke F, Hunger D, Reichel J 2007 *Nature* **450** 272
- [3] Brennecke F, Ritter S, Donner T, Esslinger T 2008 *Science* **322** 235
- [4] Maschler C, Ritsch H 2005 *Phys. Rev. Lett.* **95** 260401
- [5] Chen G, Wang X G, Liang J Q, Wang Z D 2008 *Phys. Rev. A* **78** 023634
- [6] Morrison S, Parkins A S 2008 *Phys. Rev. Lett.* **100** 040403
- [7] Larson J, Damski B, Morigi G, Lewenstein M 2008 *Phys. Rev. Lett.* **100** 050401
- [8] Larson J, Martikainen J P 2010 *Phys. Rev. A* **82** 033606
- [9] Gopalakrishnan S, Lev B L, Goldbart P M 2009 *Nat. Phys.* **5** 845
- [10] Szirmai G, Nagy D, Domokos P 2009 *Phys. Rev. Lett.* **102** 080401
- [11] Bastidas V M, Emary C, Regler B, Brandes T 2012 *Phys. Rev. Lett.* **108** 043003
- [12] Hepp K, Lieb E H 1973 *Ann. Phys. (N. Y.)* **76** 360
- [13] Hioes F T 1973 *Phys. Rev. A* **8** 1440
- [14] Song L J, Yan D, Gai Y J, Wang Y B 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 3695 (in Chinese) [宋立军, 严冬, 盖永杰, 王玉波 2010 物理学报 **59** 3695]
- [15] Song L J, Yan D, Gai Y J, Wang Y B 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 020302 (in Chinese) [宋立军, 严冬, 盖永杰, 王玉波 2011 物理学报 **60** 020302]
- [16] Baumann K, Guerlin C, Brennecke F, Esslinger T 2010 *Nature* **464** 1301
- [17] Baumann K, Mottl R, Brennecke F, Esslinger T 2011 *Phys. Rev. Lett.* **107** 140402
- [18] Viehmann O, von Delft J, Marquardt F 2011 *Phys. Rev. Lett.* **107** 113602
- [19] Nagy D, Kónya G, Szirmai G, Domokos P 2010 *Phys. Rev. Lett.* **104** 130401
- [20] Keeling J, Bhaseen M J, Simons B D 2010 *Phys. Rev. Lett.* **105** 043001
- [21] Liu N, Lian J L, Ma J, Xiao L T, Chen G, Liang J Q, Jia S T 2011 *Phys. Rev. A* **83** 033601
- [22] Xu C T, Liang J Q 2006 *Phys. Rev. A* **356** 206

# Quantum phase transition of a Bose-Einstein condensate in an optical cavity driven by a laser field\*

Liu Ni<sup>†</sup>

(Institute of Theoretical Physics, Shanxi University, Taiyuan 030006, China)

(Received 14 June 2012; revised manuscript received 9 August 2012)

## Abstract

When an atomic ensemble is coupled with a cavity field governed by the well-known Dicke model, an important quantum phase transition (QPT) from the normal phase to the superradiant phase occurs, which was predicted more than 30 years ago. In this paper, both the atom-photon nonlinear interaction and the driving field are added to the Dicke's Hamiltonian. With the method of Holstein-Primafoff transformation, the ground state energy is given by the theoretical calculation, and the rich phase figures are presented. Meanwhile, these properties are observed experimentally. We mainly discuss the effects of the atom-photon nonlinear interaction and the driving field on QPT.

**Keywords:** Dicke model, quantum phase transition, Holstein-Primafoff transformation

**PACS:** 37.30.+i, 42.50.Pq

**DOI:** 10.7498/aps.62.013402

---

\* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 11075099, 11047167, 11105087).

† Corresponding author. E-mail: 317446484@qq.com