

# 结点含时滞的具有零和非零时滞耦合的 复杂网络混沌同步\*

梁义<sup>1)2)</sup> 王兴元<sup>1)†</sup>

1) (大连理工大学电子信息与电气工程学部, 大连 116024)

2) (伊犁师范学院电子与信息工程学院, 伊宁 835000)

(2012年6月24日收到; 2012年7月19日收到修改稿)

时滞耦合的复杂网络同步已经有大量的研究成果, 而网络结点含时滞的无时滞耦合的复杂网络同步的研究工作较少. 为使网络模型更接近现实和适用更广的范围, 建立了网络结点含时滞, 而耦合兼零时滞(无时滞)和非零时滞(有时滞)的复杂网络同步模型. 在网络结点上分别设置线性控制器和自适应控制器, 研究了其混沌同步问题. 利用李雅普诺夫稳定性定理, 设计相应的正定函数, 分别给出了复杂网络同步的充分条件. 最后, 为证实同步方案的有效性, 选择时滞 Logistic 函数为结点动力系统, 在兼无时滞和有时滞的网络上, 给出了线性反馈控制同步误差数值演化趋势.

**关键词:** 复杂网络, 时滞, 同步

**PACS:** 89.75.-k, 05.45.Xt, 02.30.Ks

**DOI:** 10.7498/aps.62.018901

## 1 引言

20世纪90年代末, Watts 和 Barabasi 等引入了小世界 (small-world) 网络和无标度 (scale-free) 网络模型<sup>[1,2]</sup>. 从此, 复杂网络的研究便进入到了一个崭新的发展阶段. 近年来, 复杂网络在物理、生物、计算机和社会科学等都进行了广泛研究<sup>[3-6]</sup>. 在复杂网络控制与同步方面, 人们做了大量的研究工作, 并已取得许多重要成果. 随着研究工作的不断深入, 研究内容越来越丰富, 除了众多有关复杂网络同步控制方法的研究, 还有对复杂网络的同步能力方面的探讨. 文献[7—9]研究了影响复杂网络同步能力的要素, Wang 等<sup>[10]</sup>研究了针对同步网络的攻击(将网络拆分成若干个孤立的分支)后同步恢复的问题. 另一方面, 建立各种能够准确反映实际网络系统特性的网络模型是研究复杂网络的基础. 例如, 由于信号受传输速度的限制和拥塞现象, 所以建立复杂网络控制与同步模型需要考虑

时滞的因素. 典型的时滞系统有电路系统<sup>[11]</sup>、激光阵列<sup>[12]</sup>和卫星通信<sup>[13]</sup>等. Li 和 Chen<sup>[14]</sup>针对连续和离散时间变量的具有独立时滞和相关时滞耦合的复杂网络一般同步模型, 分别给出了同步的充分条件. 文献[15—17]研究了脉冲控制的具有不确定参数和时滞切换复杂网络及既含有离散时滞又含有分布时滞复杂网络控制与同步问题. 而人们针对时变时滞耦合和将时滞区间划分成时变子区间的耦合同步等也进行了一系列研究工作<sup>[18-24]</sup>. Guo 等<sup>[25]</sup>研究了耦合兼无时滞和有时滞的复杂网络牵制同步, 并获得了牵制同步的充分条件. 高洋等<sup>[26]</sup>根据网络中不同性质的边具有不同时滞, 提出了网络拆分的思想, 分析了多重边复杂网络的动力学模型的稳定性. 基于网络拆分的思想, 卞秋香和姚洪兴<sup>[27]</sup>进一步研究了一类具有非线性耦合的多重边赋权复杂网络, 给出了网络的同步准则. 以上研究工作都是耦合具有时滞的情况, 而对于结点含时滞的同步, 罗群等<sup>[28]</sup>在无时滞耦合的情况下,

\* 国家自然科学基金(批准号: 61173183, 60973152, 60573172)、高等学校博士学科点专项科研基金(批准号: 20070141014)和辽宁省自然科学基金(编号: 20082165)资助的课题.

† 通讯作者. E-mail: wangxy@dlut.edu.cn; lyy1xj@sohu.com

给出了结点含时滞的不确定复杂网络自适应同步模型, 得到了满足一定条件实现同步的结论.

本文引入了结点含时滞, 且耦合兼无时滞和有时滞的复杂网络同步模型, 研究了添加线性控制器和自适应控制器时的同步问题, 给出了实现同步的充分条件. 同时, 数值仿真证实了方法的有效性.

## 2 复杂网络模型与假设

考虑由  $N$  个相同结点构成的复杂网络, 其中每个结点是一个  $n$  维动力系统:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_i(t) = & \mathbf{f}_1(\mathbf{x}_i(t)) + \mathbf{f}_2(\mathbf{x}_i(t - \tau_1)) \\ & + c_1 \sum_{j=1}^N g_{ij}^{(1)} \mathbf{A}_1 \mathbf{x}_j(t) \\ & + c_2 \sum_{j=1}^N g_{ij}^{(2)} \mathbf{A}_2 \mathbf{x}_j(t - \tau_2) + \mathbf{u}_i(t), \end{aligned} \quad (i = 1, 2, \dots, N), \quad (1)$$

其中  $\mathbf{x}_i(t) = (x_{i1}(t), x_{i2}(t), \dots, x_{in}(t))^T \in \mathbf{R}^n$  为第  $i$  个结点的状态向量;  $\mathbf{f}: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$  是一个非线性光滑函数;  $c_1$  和  $c_2$  分别是无时滞和有时滞边耦合强度;  $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2 \in \mathbf{R}^{n \times n}$  分别是无时滞和有时滞网络对应的内部耦合矩阵;  $\tau_1$  为结点含时滞,  $\tau_2$  为耦合时滞;  $\mathbf{u}_i(t) \in \mathbf{R}^n$  为线性控制器或自适应控制器;  $\mathbf{G}_1 = (g_{ij}^{(1)})_{N \times N}$  和  $\mathbf{G}_2 = (g_{ij}^{(2)})_{N \times N}$  为无时滞耦合和时滞 ( $\tau_2$ ) 耦合矩阵, 其中  $g_{ij}^{(1)}$  和  $g_{ij}^{(2)}$  分别定义如下: 如果结点  $i$  和结点  $j$  存在无时滞耦合边 ( $j \neq i$ ), 那么  $g_{ij}^{(1)} > 0$ ; 否则,  $g_{ij}^{(1)} = 0$ ; 如果结点  $i$  和结点  $j$  存在时滞耦合边 ( $j \neq i$ ), 那么  $g_{ij}^{(2)} > 0$ ; 否则,  $g_{ij}^{(2)} = 0$ . 另外, 假设  $\mathbf{G}_1$  和  $\mathbf{G}_2$  均满足耗散条件

$$\begin{aligned} g_{ii}^{(1)} = & - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N g_{ij}^{(1)} = - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N g_{ij}^{(1)}, \\ g_{ii}^{(2)} = & - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N g_{ij}^{(2)} = - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N g_{ij}^{(2)}, \end{aligned} \quad (i = 1, 2, \dots, N). \quad (2)$$

$\mathbf{G}_1$  和  $\mathbf{G}_2$  为一个网络的两个不同时滞耦合子网网络所对应的耦合矩阵. 模型适用如下两种复杂网络.

网络中同时存在无时滞耦合和时滞耦合边的单重边网络. 图 1(a), 1(b) 和 1(c) 给出了一个网络拆分成两个子网的过程, 其对应的子网耦合矩阵分别为  $\mathbf{G}_1$  和  $\mathbf{G}_2$ .

网络中存在单边和双重边, 不同的边具有不同的时滞 (包括零时滞). 图 2 给出了具有不同时滞耦合的边, 拆分成两个子网对应的耦合矩阵分别为  $\mathbf{G}_1$  和  $\mathbf{G}_2$ .

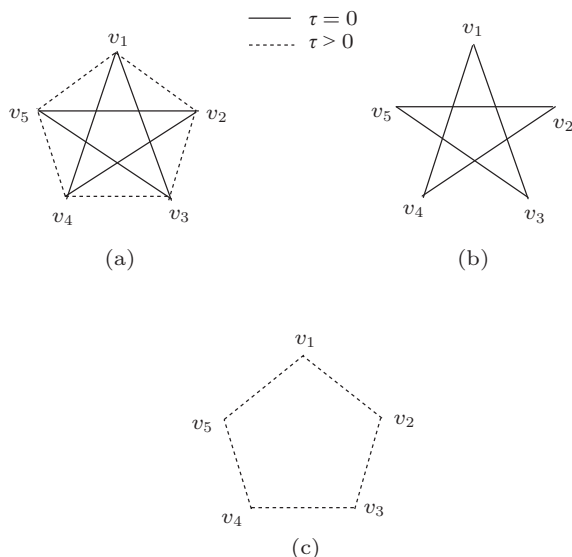


图 1 单重边网络拆分 (a) 单重边网络; (b) 无时滞耦合子网; (c) 时滞耦合子网

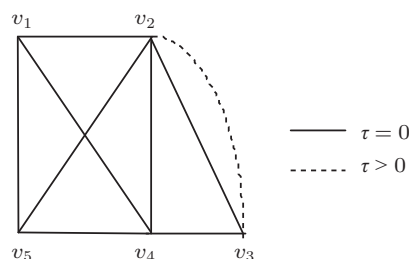


图 2 双重边网络拆分

设  $\mathbf{s}(t) \in \mathbf{R}^n$  是一个孤立结点的状态向量, 满足

$$\dot{\mathbf{s}}(t) = \mathbf{f}_1(\mathbf{s}(t)) + \mathbf{f}_2(\mathbf{s}(t - \tau_1)). \quad (3)$$

记

$$\mathbf{e}_i(t) = \mathbf{x}_i(t) - \mathbf{s}(t), \quad (i = 1, 2, \dots, N). \quad (4)$$

由方程 (1)—(4), 可得如下的误差系统:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{e}}_i(t) = & \mathbf{D} \mathbf{f}_1(\mathbf{s}(t)) \mathbf{e}_i(t) + \mathbf{D} \mathbf{f}_2(\mathbf{s}(t - \tau_1)) \mathbf{e}_i(t - \tau_1) \\ & + c_1 \sum_{j=1}^N g_{ij}^{(1)} \mathbf{A}_1 \mathbf{e}_j(t) \\ & + c_2 \sum_{j=1}^N g_{ij}^{(2)} \mathbf{A}_2 \mathbf{e}_j(t - \tau_2) + \mathbf{u}_i(t), \end{aligned} \quad (i = 1, 2, \dots, N), \quad (5)$$

其中  $Df_1, Df_2$  为  $f_1, f_2$  在  $s(t)$  和  $s(t - \tau_1)$  处的雅可比矩阵.

下面, 给出相关的假设和引理.

**假设 1** 设  $\rho(Df_1)$  和  $\rho(Df_2 Df_2^T)$  有界, 即存在非负常数  $l_1$  和  $l_2$ , 有  $\rho(Df_1) \leq l_1$ ,  $\rho(Df_2 Df_2^T) \leq l_2$ . 其中  $\rho(Df_1)$  和  $\rho(Df_2 Df_2^T)$  分别为矩阵  $Df_1$  和  $Df_2 Df_2^T$  谱半径.

**引理 1** 设  $X$  和  $Y$  为任意  $n$  维是向量,  $P \in R^{n \times n}$ . 那么下面的矩阵不等式成立:

$$2X^T P Y \leq X^T P P^T X + Y^T Y.$$

### 3 同步稳定性分析

#### 3.1 线性反馈控制复杂网络同步

当  $u_i(t)$  为线性控制器时, 系统方程 (1) 可描述为

$$\dot{x}_i(t) = f_1(x_i(t)) + f_2(x_i(t - \tau_1))$$

$$\begin{aligned} &+ c_1 \sum_{j=1}^N g_{ij}^{(1)} A_1 x_j(t) \\ &+ c_2 \sum_{j=1}^N g_{ij}^{(2)} A_2 x_j(t - \tau_2) - d_i e_i(t), \end{aligned} \quad (i = 1, 2, \dots, N), \quad (6)$$

其中  $d_i$  为大于零的待定常数.

下面给出线性反馈控制的复杂网络同步充分条件.

**结论 1** 设假设 1 成立, 那么具有线性反馈控制的复杂网络 (6) 同步, 且同步解局部稳定.

**证明** 设李雅普诺夫函数为

$$\begin{aligned} V(t) = & \sum_{i=1}^N e_i^T(t) e_i(t) + \sigma_1 \sum_{i=1}^N \int_{t-\tau_1}^t e_i^T(\alpha) e_i(\alpha) d\alpha \\ & + \sigma_2 \sum_{i=1}^N \int_{t-\tau_2}^t e_i^T(\alpha) e_i(\alpha) d\alpha, \end{aligned} \quad (7)$$

其中  $\sigma_1$  和  $\sigma_2$  为大于零的常数. 沿轨线对函数  $V(t)$  求导, 并利用方程 (3), (4), (5) 和引理 1, 得

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) = & 2 \sum_{i=1}^N e_i^T(t) \dot{e}_i(t) + (\sigma_1 + \sigma_2) \sum_{i=1}^N e_i^T(t) e_i(t) - \sigma_1 \sum_{i=1}^N e_i^T(t - \tau_1) e_i(t - \tau_1) - \sigma_2 \sum_{i=1}^N e_i^T(t - \tau_2) e_i(t - \tau_2) \\ = & 2 \sum_{i=1}^N e_i^T(t) Df_1 e_i(t) + 2 \sum_{i=1}^N e_i^T(t) Df_2 e_i(t - \tau_1) + 2c_1 \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N e_i^T(t) g_{ij}^{(1)} A_1 e_j(t) \\ & + 2c_2 \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N e_i^T(t) g_{ij}^{(2)} A_2 e_j(t - \tau_2) - 2 \sum_{i=1}^N d_i e_i^T(t) e_i(t) + (\sigma_1 + \sigma_2) \sum_{i=1}^N e_i^T(t) e_i(t) \\ & - \sigma_1 \sum_{i=1}^N e_i^T(t - \tau_1) e_i(t - \tau_1) - \sigma_2 \sum_{i=1}^N e_i^T(t - \tau_2) e_i(t - \tau_2) \\ \leq & 2\rho(Df_1) \sum_{i=1}^N e_i^T(t) e_i(t) + \rho(Df_2 Df_2^T) \sum_{i=1}^N e_i^T(t) e_i(t) + \sum_{i=1}^N e_i^T(t - \tau_1) e_i(t - \tau_1) \\ & + c_1 \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N e_i^T(t) (g_{ij}^{(1)})^2 A_1 A_1^T e_i(t) + c_1 \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N e_i^T(t) e_j(t) + c_2 \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N e_i^T(t) (g_{ij}^{(2)})^2 A_2 A_2^T e_i(t) \\ & + c_2 \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N e_j^T(t - \tau_2) e_j(t - \tau_2) - 2 \sum_{i=1}^N d_i e_i^T(t) e_i(t) + (\sigma_1 + \sigma_2) \sum_{i=1}^N e_i^T(t) e_i(t) \\ & - \sigma_1 \sum_{i=1}^N e_i^T(t - \tau_1) e_i(t - \tau_1) - \sigma_2 \sum_{i=1}^N e_i^T(t - \tau_2) e_i(t - \tau_2) \\ \leq & 2\rho(Df_1) \sum_{i=1}^N e_i^T(t) e_i(t) + \rho(Df_2 Df_2^T) \sum_{i=1}^N e_i^T(t) e_i(t) + \sum_{i=1}^N e_i^T(t - \tau_1) e_i(t - \tau_1) \\ & + c_1 N g_1 \rho(A_1 A_1^T) \sum_{i=1}^N e_i^T(t) e_i(t) + c_1 N \sum_{i=1}^N e_i^T(t) e_i(t) + c_2 N g_2 \rho(A_2 A_2^T) \sum_{i=1}^N e_i^T(t) e_i(t) \\ & + c_2 N \sum_{i=1}^N e_i^T(t - \tau_2) e_i(t - \tau_2) - 2d \sum_{i=1}^N e_i^T(t) e_i(t) + (\sigma_1 + \sigma_2) \sum_{i=1}^N e_i^T(t) e_i(t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -\sigma_1 \sum_{i=1}^N e_i^T(t-\tau_1)e_i(t-\tau_1) - \sigma_2 \sum_{i=1}^N e_i^T(t-\tau_2)e_i(t-\tau_2) \\
 & = (2\rho(Df_1) + \rho(Df_2Df_2^T) + c_1Ng_1\rho(A_1A_1^T) + c_1N + c_2Ng_2\rho(A_2A_2^T) + (\sigma_1 + \sigma_2) \\
 & - 2d) \sum_{i=1}^N e_i^T(t)e_i(t) + (1 - \sigma_1) \sum_{i=1}^N e_i^T(t-\tau_1)e_i(t-\tau_1) + (c_2N - \sigma_2) \sum_{i=1}^N e_i^T(t-\tau_2)e_i(t-\tau_2),
 \end{aligned}$$

其中  $d = \min\{d_i | i = 1, 2, \dots, N\}$ ,  $g_1 = \max\{(g_{ij}^{(1)})^2 | i, j = 1, 2, \dots, N\}$ ,  $g_2 = \max\{(g_{ij}^{(2)})^2 | i, j = 1, 2, \dots, N\}$ . 令  $\sigma_1 = 1, \sigma_2 = c_2N$ , 那么

$$\begin{aligned}
 \dot{V}(t) \leq & (2\rho(Df_1) + \rho(Df_2Df_2^T) + c_1Ng_1\rho(A_1A_1^T) \\
 & + c_2Ng_2\rho(A_2A_2^T) + c_1N + c_2N + 1 \\
 & - 2d) \sum_{i=1}^N e_i^T(t)e_i(t).
 \end{aligned}$$

所以, 取

$$\begin{aligned}
 d > & \rho(Df_1) + \frac{1}{2}[\rho(Df_2Df_2^T) + c_1Ng_1\rho(A_1A_1^T) \\
 & + c_2Ng_2\rho(A_2A_2^T) + c_1N + c_2N + 1], \quad (8)
 \end{aligned}$$

有  $\dot{V}(t) < 0$ , 从而得系统同步, 且同步解局部稳定.

### 3.2 自适应复杂网络同步

当  $u_i(t)$  为自适应控制器时, 系统方程 (1) 可描述为

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_i(t) = & f_1(x_i(t)) + f_2(x_i(t-\tau_1)) \\
 & + c_1 \sum_{j=1}^N g_{ij}^{(1)} A_1 x_j(t)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + c_2 \sum_{j=1}^N g_{ij}^{(2)} A_2 x_j(t-\tau_2) + u_i(t), \\
 & (i = 1, 2, \dots, N), \quad (9)
 \end{aligned}$$

其中自适应控制器  $u_i(t) = -D_i(t)e_i(t)$ , 自适应律  $\dot{D}_i(t) = \delta_i e_i^T(t)e_i(t)$ ,  $\delta_i$  为正常数.

**结论 2** 设假设 1 成立, 那么复杂网络 (9) 自适应同步, 且同步解局部稳定.

**证明** 设李雅普诺夫函数为

$$\begin{aligned}
 V(t) = & \sum_{i=1}^N e_i^T e_i(t) + \sigma_1 \sum_{i=1}^N \int_{t-\tau_1}^t e_i^T(\alpha)e_i(\alpha) d\alpha \\
 & + \sigma_2 \sum_{i=1}^N \int_{t-\tau_2}^t e_i^T(\alpha)e_i(\alpha) d\alpha \\
 & + \sum_{i=1}^N \frac{1}{\delta_i} (D_i(t) - \bar{d}_i)^2, \quad (10)
 \end{aligned}$$

其中  $\sigma_1, \sigma_2$  和  $\delta_i$  的定义同上,  $\bar{d}_i$  为大于零的常数. 沿轨线对函数  $V(t)$  求导, 并利用方程 (3), (4), (5) 和引理 1, 得

$$\begin{aligned}
 \dot{V}(t) = & 2 \sum_{i=1}^N e_i^T(t)\dot{e}_i(t) + (\sigma_1 + \sigma_2) \sum_{i=1}^N e_i^T(t)e_i(t) - \sigma_1 \sum_{i=1}^N e_i^T(t-\tau_1)e_i(t-\tau_1) - \sigma_2 \sum_{i=1}^N e_i^T(t-\tau_2)e_i(t-\tau_2) \\
 & + 2 \sum_{i=1}^N D_i(t)e_i^T(t)e_i(t) - 2 \sum_{i=1}^N \bar{d}_i e_i^T(t)e_i(t) \\
 = & 2 \sum_{i=1}^N e_i^T(t)Df_1 e_i(t) + 2 \sum_{i=1}^N e_i^T(t)Df_2 e_i(t-\tau_1) + 2c_1 \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N e_i^T(t)g_{ij}^{(1)} A_1 e_j(t) \\
 & + 2c_2 \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N e_i^T(t)g_{ij}^{(2)} A_2 e_j(t-\tau_2) - 2 \sum_{i=1}^N D_i(t)e_i^T(t)e_i(t) + (\sigma_1 + \sigma_2) \sum_{i=1}^N e_i^T(t)e_i(t) \\
 & + 2 \sum_{i=1}^N D_i(t)e_i^T(t)e_i(t) - 2 \sum_{i=1}^N \bar{d}_i e_i^T(t)e_i(t) - \sigma_1 \sum_{i=1}^N e_i^T(t-\tau_1)e_i(t-\tau_1) - \sigma_2 \sum_{i=1}^N e_i^T(t-\tau_2)e_i(t-\tau_2) \\
 = & 2 \sum_{i=1}^N e_i^T(t)Df_1 e_i(t) + 2 \sum_{i=1}^N e_i^T(t)Df_2 e_i(t-\tau_1) + 2c_1 \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N e_i^T(t)g_{ij}^{(1)} A_1 e_j(t) \\
 & + 2c_2 \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N e_i^T(t)g_{ij}^{(2)} A_2 e_j(t-\tau_2) - 2 \sum_{i=1}^N \bar{d}_i e_i^T(t)e_i(t) \\
 & + (\sigma_1 + \sigma_2) \sum_{i=1}^N e_i^T(t)e_i(t) - \sigma_1 \sum_{i=1}^N e_i^T(t-\tau_1)e_i(t-\tau_1) - \sigma_2 \sum_{i=1}^N e_i^T(t-\tau_2)e_i(t-\tau_2).
 \end{aligned}$$

与结论 1 证明类似, 并设  $\sigma_1 = 1, \sigma_2 = c_2 N$ , 得

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) \leq & (2\rho(Df_1) + \rho(Df_2 Df_2^T) + c_1 N g_1 \rho(A_1 A_1^T) \\ & + c_2 N g_2 \rho(A_2 A_2^T) + c_1 N + c_2 N + 1 \\ & - 2\bar{d}) \sum_{i=1}^N e_i^T(t) e_i(t), \end{aligned}$$

其中  $\bar{d} = \min\{\bar{d}_i | i = 1, 2, \dots, N\}$ ,  $g_1, g_2$  同结论 1, 显然, 取

$$\begin{aligned} \bar{d} > & \rho(Df_1) + \frac{1}{2}[\rho(Df_2 Df_2^T) + c_1 N g_1 \rho(A_1 A_1^T) \\ & + c_2 N g_2 \rho(A_2 A_2^T) + c_1 N + c_2 N + 1], \quad (11) \end{aligned}$$

有  $\dot{V}(t) < 0$ , 从而证明结论 2.

注: 由结论 1 的证明过程可以看出, 线性反馈控制器中  $d$  必须满足一定条件 (8) 才能使系统实现同步. 对结论 2, 尽管证明结论 2 时也要求满足 (11) 成立, 但是, 自适应控制器及自适应因子与  $\bar{d}$  的取值无关. 也就是说, 只要自适应制器  $u_i(t) = -D_i(t)e_i(t)$ , 自适应律  $\dot{D}_i(t) = \delta_i e_i^T(t)e_i(t)$ ,  $\delta_i$  为任意正常数, 结论 2 即成立. 这也体现了自适应控制方法的优势.

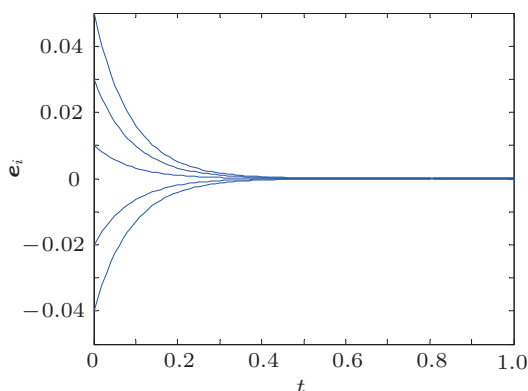


图 3 同步误差演化图 ( $i = 1, 2, \dots, 5$ )

## 4 数值仿真

下面分别给出网络结点数为 5 和 50 的线性反馈控制的同步误差演化趋势数值仿真效果. 取结点含时滞的动力学方程为时滞 Logistic 系统<sup>[29]</sup>:

$$\dot{x}(t) = -\lambda x(t) + rx(t - \tau_1)(1 - x(t - \tau_1)), \quad (12)$$

取  $\tau_1 = 0.5$ , 当  $\lambda = 26, r = 104$  时, 系统导致混沌. 在数值仿真一中, 取图 1 所示的网络,  $G_1$  和  $G_2$  分别是图 1(b), 1(c) 两个子网对应的耦合矩阵. 取内部耦合矩阵  $A_1, A_2$  为  $n$  阶单位阵, 这里的  $n = 1$ . 用四阶 Runge-Kutta 求解微分方程, 取  $c_1 = 0.1, c_2 = 0.01, \tau_2 = 0.8$  (耦合时滞量),  $s(0) = 0.5, x_i = 0.5 + (-1)^i \times i \times 0.01$ , 取  $d = 120$ , 使 (8) 式成立. 图 3 为数值仿真同步误差演化效果图. 在数值仿真二,  $G_1$  取 50 个结点的星型网络,  $G_2$  取 50 个结点的环型网络.  $d = 180, x_i = 0.5 + (-1)^i \times i \times 0.1$ , 其他参数同上, 数值仿真效果如图 4.

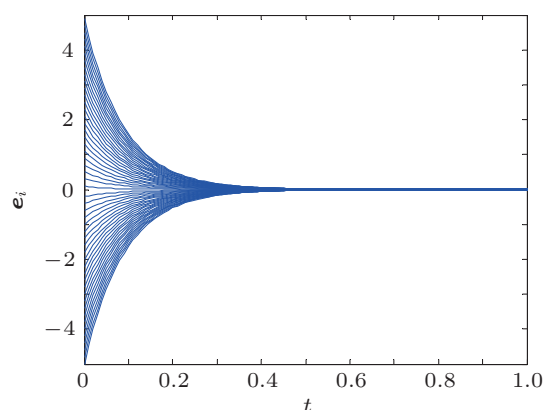


图 4 同步误差演化图 ( $i = 1, 2, \dots, 50$ )

## 5 结论

本文研究了一种结点含时滞的复杂网络同步模型, 其网络结点之间存在零时滞耦合和有非零时滞耦合. 将网络结点上分别添加简单的线性控制器和自适应控制器, 研究其同步问题, 给出了实现同步的充分条件. 数值仿真在不同的网络结点的情况下, 分别证实了方法的有效性. 已有与此相关的研究主要有如下两个方面的工作: 1) 具有零时滞耦合和非零时滞耦合的复杂网络同步模型, 而其网络结点动力系统无时滞; 2) 复杂网络结点动力系统含时滞, 而耦合无时滞的自适应同步模型. 该同步模型对结点含时滞而耦合无时滞的情况进行了推广, 具有更广的适用范围.

[1] Watts D J, Strogatz S H 1998 *Nature* **393** 440

[2] Barabási A L, Albert R 1999 *Science* **286** 509

[3] Albert R, Barabási A L 2002 *Rev. Mod. Phys.* **74** 47

[4] Newman M E J 2003 *SIAM Rev.* **45** 67

[5] Boccaletti S, Latora V, Moreno Y, Chavez M, Hwang D U 2006 *Phys. Rep.* **424** 175

- [6] Wang X F, Li X, Chen G R 2006 *Theory and Application of Complex Networks* (Beijing: Tsinghua University Press) p49 (in Chinese) [汪小帆, 李翔, 陈关荣 2006 复杂网络理论及其应用 (北京: 清华大学出版社) 第 49 页]
- [7] Hong H, Kim B J, Choi M Y, Park H 2004 *Phys. Rev. E* **69** 067105
- [8] Comellas F, Gago S 2007 *J. Phys. A* **40** 4483
- [9] Jalili M 2011 *Physica A* **390** 4588
- [10] Wang Y W, Wang H O, Xiao J W, Guan Z H 2010 *Automatica* **46** 197
- [11] Reddy D V R, Sen A, Johnson G L 2000 *Phys. Rev. Lett.* **85** 3381
- [12] Kozyreff G, Vladimirov A, Mandel P 2000 *Phys. Rev. Lett.* **85** 3809
- [13] Lindsey W C, Chen J H 1996 *Eur. T. Telecommun.* **7** 25
- [14] Li C G, Chen G R 2004 *Physica A* **343** 263
- [15] Wang Y W, Yang M, Wang H O 2009 *IEEE Trans. Circuits Syst. I* **56** 2100
- [16] Liu Y, Wang Z 2008 *IEEE T. Man Cy. B* **38** 1314
- [17] Guo L L, Wang Y W, Wang H O, Huang Y H 2009 *IEEE International Symposium on Intelligent Control Part of IEEE Multi-Conference on Systems and Control* Saint Petersburg, Russia, July 8–10, 2009 p177
- [18] Gao H J, Lam J, Chen G R 2006 *Phys. Lett. A* **360** 263
- [19] Zhang H G, Gong D W, Wang Z S 2011 *Chin. Phys. B* **20** 040512
- [20] Wu J S, Jiao L C 2007 *Physica A* **386** 513
- [21] Li K, Guan S G, Gong X F, Lai C H 2008 *Phys. Lett. A* **372** 7133
- [22] Li H J, Yue D 2009 *J. Comput. Appl. Math.* **232** 149
- [23] Wang J A 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 020509 (in Chinese) [王健安 2012 物理学报 **61** 020509]
- [24] Yue D, Li H J 2010 *Neurocomputing* **73** 809
- [25] Guo W L, Austin F, Chen S H, Sun W 2009 *Phys. Lett. A* **373** 1565
- [26] Gao Y, Li L X, Peng H P, Yang Y X, Zhang X H 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 1444 (in Chinese) [高洋, 李丽香, 彭海朋, 杨义先, 张小红 2008 物理学报 **57** 1444]
- [27] Bian Q X, Yao H X 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 3027 (in Chinese) [卞秋香, 姚洪兴 2010 物理学报 **59** 3027]
- [28] Luo Q, Wu W, Li L X, Yang Y X, Peng H P 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 1529 (in Chinese) [罗群, 吴薇, 李丽香, 杨义先, 彭海朋 2008 物理学报 **57** 1529]
- [29] Guan X P, Chen C L, Peng H P, Fan Z P 2003 *Int. J. Bifur. Chaos* **13** 193

# Chaotic synchronization in complex networks with delay nodes by non-delay and delay couplings \*

Liang Yi<sup>1)2)</sup> Wang Xing-Yuan<sup>1)†</sup>

1) (Faculty of Electronic Information and Electrical Engineering, Dalian University of Technology, Dalian 116024, China)

2) (Department of Electronics and Information Engineering, Yili Normal University, Yining 835000, China)

(Received 24 June 2012; revised manuscript received 19 July 2012)

## Abstract

The synchronization in complex network model with time-delay nodes is investigated. The model is applicable for two sorts of complex networks. With linear feedback controller and adaptive feedback controller, positive definite functions are designed respectively. The sufficient conditions of synchronization are given by Lyapunov stability theory. Finally, numerical simulations show the effectiveness of the synchronization in complex networks.

**Keywords:** complex network, delay, synchronization

**PACS:** 89.75.-k, 05.45.Xt, 02.30.Ks

**DOI:** 10.7498/aps.62.018901

\* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 61173183, 60973152, 60573172), the Superior University Doctor Subject Special Scientific Research Foundation of China (Grant No. 20070141014) and the Natural Science Foundation of Liaoning Province, China (Grant No. 20082165).

† Corresponding author. E-mail: wangxy@dlut.edu.cn; lyylxj@sohu.com