

弯轨 Čerenkov 辐射计算中的稳相法*

李一丁^{1)†} 张鹏飞²⁾ 张辉¹⁾ 于淼²⁾

1) (中国科学技术大学, 国家同步辐射实验室, 合肥 230029)

2) (中国科学技术大学近代物理系, 中国科学院基础等离子体物理重点实验室, 合肥 230026)

(2012年10月11日收到; 2012年12月10日收到修改稿)

从介质中沿弯曲轨道运动的带电粒子辐射的频谱角分布公式出发, 分析了粒子速度大于介质中的光速时, 稳相点在 Čerenkov 效应中所起的关键作用, 并给出了通过在稳相点附近做渐近展开来计算弯轨 Čerenkov 辐射的稳相法. 运用稳相法, 计算了同步 Čerenkov 辐射在粒子轨道平面附近以及在临界角附近的频谱角分布. 计算结果表明, 同步 Čerenkov 辐射频谱的特征依赖于观测方向附近对应的稳相点性状, 特别是在较大的临界角附近的频谱与小角度近似时很不相同.

关键词: Čerenkov 效应, 稳相点, 稳相法, 同步 Čerenkov 辐射

PACS: 41.60.Ap, 41.60.Bq

DOI: 10.7498/aps.62.104103

1 引言

在折射率 $n > 1$ 的介质中做匀速直线运动的带电粒子, 如果其速度大于介质中的光速 $c' = c/n$, 则会在特定方向上产生 Čerenkov 辐射^[1]. Čerenkov 辐射的理论计算最早由 Frank 和 Tamm 于 1937 年给出^[2]. 1976 年, Schwinger 和 Tsai^[3] 从经典和量子的两种方法计算了介质中做匀速圆周运动的带电粒子的同步 Čerenkov 辐射的功率, 并分析了这种辐射的协同性. 之后 Eeber 等^[4] 又对同步 Čerenkov 辐射在实验上的各种效应做了系统的研究; 同步 Čerenkov 辐射角分布也由 Rynne 等^[5] 于次年算得. Patro^[6] 在 1982 年用非平衡统计力学的办法研究了同步 Čerenkov 辐射的微观理论. 之后对同步 Čerenkov 辐射的实验观测与理论探讨仍时有结果发表^[7,8]. 除同步 Čerenkov 辐射外, 近年来对于介质中沿螺旋轨道运动的带电粒子辐射的研究也在进行^[9-11].

然而不论是同步 Čerenkov 辐射还是螺旋轨道的 Čerenkov 辐射, 目前文献中的推导都是基于能流守恒或是谐波法, 数学过程较复杂, 而且依赖于轨

道的特殊形状, 其最终结果的形式也并不直观. 本文试图直接从在介质中做一般的弯曲轨道运动的超光速带电粒子辐射 (以下简称弯轨 Čerenkov 辐射) 的辐射频谱角分布公式出发, 对弯轨 Čerenkov 辐射的特征进行探讨. 通过阐明稳相点在该辐射机制中所起的关键作用, 提出一种计算弯轨 Čerenkov 辐射的稳相法. 稳相法的数学形式简单, 且能计算的弯轨 Čerenkov 辐射的粒子轨迹不限于匀速圆周运动和螺旋轨道运动, 原则上对于稳相点离散分布的带电粒子运动轨道都适用. 我们用此方法来计算同步 Čerenkov 辐射的渐近表达式, 并分析其特点.

2 弯轨 Čerenkov 辐射的稳相点

考虑均匀的各向同性介质, 视其介电常数 ϵ 和磁导率 μ 为常数标量, 则通过与真空中运动点电荷辐射频谱公式完全相同的推导, 可以得到介质中做一般运动的相对论性带电粒子的辐射频谱角分布的表达式如下:

$$\frac{dI}{d\Omega}(\omega) = \frac{\mu e^2 \omega^2}{16\pi^3 c'} \left| \int \boldsymbol{\tau} \times (\boldsymbol{\tau} \times \boldsymbol{\nu}(t')) \right|$$

* 国家基础研究重大项目前期预研专项基金 (批准号: 2001CCB01000) 和科技部 ITER-CN 项目 (批准号: 2010GB107001) 资助的课题.

† 通讯作者. E-mail: liyd@mail.ustc.edu.cn

$$\times \exp \left[i\omega \left(t' - \frac{\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{x}_e(t')}{c'} \right) \right] dt' \Big|^2, \quad (1)$$

上式中的 $\boldsymbol{\tau}$ 表示观测方向的单位矢量, \mathbf{x}_e 和 $\boldsymbol{\nu}$ 分别表示带电粒子的位移和速度, $c' = c/n$ 为介质中的光速. (1) 式积分号中的所有物理量均在推迟时间 t' 取值, 为方便起见下面省略 t' 右上角的撇号.

(1) 式是考虑介质影响后的运动带电粒子辐射频谱的一般公式. 如果粒子速度低于介质中的光速, 则该公式与真空中的情形仅仅是参数不同, 物理上和计算上并没有很大区别. 下面只考虑介质折射率 $n = \sqrt{\mu\epsilon}$ 大于 1, 并且粒子速度大于介质中光速 $c' = c/n$ 的 Čerenkov 效应发生的情形.

(1) 式中含有一个 Fourier 型积分, 其被积函数的位相为

$$\varphi = \omega \left(t - \frac{\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{x}_e(t)}{c'} \right). \quad (2)$$

由于辐射光的特征频率远大于粒子运动的特征频率 (约为 γ^3 倍), 该 Fourier 型积分的位相随时间的变化远比振幅的变化剧烈, 在位相变化许多个周期时, 被积函数的幅度可以认为是不变的, 因此积分的正负部分几乎完全抵消, 惟一的例外则是在位相 (2) 对时间的导数

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega \left(1 - \frac{\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\nu}(t)}{c'} \right) \quad (3)$$

为零的时候, 此时位相几乎不随时间变化, 因此 (1) 式的 Fourier 型积分的主要贡献来自于这些位相导数为零的点, 我们称其为稳相点; 如果在某个点 $t = t_0$, 相位的一阶导数为零而二阶导数不为零, 则称点 $t = t_0$ 为一阶稳相点, 类似的还可定义二阶、三阶以及高阶稳相点.

由 (3) 式可以看到, 稳相点就是粒子运动方向与观测方向的夹角为 $\theta_c = \cos^{-1}(c'/v) = \cos^{-1}(1/n\beta)$ 的那些点. 这个特征角 θ_c 正好是 Čerenkov 辐射产生的特征方向角. 事实上, 如果我们将粒子在轨道上某点附近的运动近似视为速度为 v 的匀速直线运动, 则可看出此时介质中辐射次波相干相长的方向正好形成一个与速度方向成夹角 θ_c 的圆锥面; 于是稳相点就是那些在观测方向发生辐射次波相干相长的那些点. 需要指出的是, 角度 θ_c 与粒子的速度和介质折射率有关; 而且稳相点的分布与观测方向是相关的, 只有在给定观测方向上才谈得上哪些点是稳相点的问题. 比如, 对于粒子做匀速直线运动的 Čerenkov 辐射, 如果观测方向与轨道的夹角不为 θ_c , 则没有稳相点; 如果观

测方向与轨道的夹角为 θ_c , 则轨道上所有点都是稳相点.

对于做一般曲线运动的带电粒子, 如果对于某个观测方向, 粒子轨道上的稳相点是离散分布的, 则可以利用稳相法来计算该方向上 (1) 式的辐射频谱分布. 在渐近分析中, 对于 (1) 式中的 Fourier 型积分, 稳相法采用在稳相点附近做展开的办法来计算积分在频率参数 ω 趋于无穷时的渐近表示.

以一个稳相点 $t = t_0$ 的情况为例: 如果该点为一阶稳相点, 则有公式

$$\begin{aligned} & \int A(t) \exp \{ i\omega f(t) \} dt \\ &= A(t_0) \sqrt{\frac{2\pi}{\omega |f''(t_0)|}} e^{i\omega f(t_0) \pm i\pi/4} + O(\omega^{-1}), \end{aligned}$$

等号右边指数上的正负符号取决于 $v''(x_0)$ 的符号; 如果点 $t = t_0$ 为二阶稳相点, 则

$$\begin{aligned} & \int A(t) \exp \{ i\omega f(t) \} dt \\ &= \frac{2\Gamma(1/3)}{3} A(t_0) \left(\frac{6}{\omega |f'''(t_0)|} \right)^{1/3} e^{i\omega f(t_0) \pm i\pi/6} \\ &+ O(\omega^{-3/2}), \end{aligned}$$

同样, 右边指数上的正负符号取决于 $v'''(x_0)$ 的符号; 而对于任意 k 阶的稳相点也有类似的公式 [12]. 这几个渐近公式的实质是将积分区间取到一个稳相点附近的小段, 然后利用函数 A 和 f 的 Taylor 展开, 将其化为类似于 Gauss 积分的形式用复变函数方法来处理. 如果稳相点的数目不止一个, 只要它们离散分布, 距离足够远, 使得所取的稳相点附近的小段积分轨道没有重叠, 则只需将用以上公式得到的每个稳相点附近渐近展开的结果叠加就行了.

因此, 用稳相点不仅可以分析不同观测方向上的弯轨 Čerenkov 辐射的产生机制, 还可以用来计算辐射频谱的渐近展开形式, 其计算过程不依赖于粒子轨道的特殊形式; 从以上渐近公式还可看出, 用稳相法得到的结果一般不会含有复杂的函数, 较为简单.

3 同步 Čerenkov 辐射频谱

下面用稳相法来计算同步 Čerenkov 辐射的频谱分布. 我们仍然假定带电粒子的速度大于介质中的光速. 假设带电粒子做匀速圆周运动, 观测方向 $\boldsymbol{\tau}$ 与轨道平面的夹角为 θ . 当 θ 很小, 观测方向贴近轨道平面时, 由图 1 所示的简单几何计算可知稳

相点就是运动速度方向与 τ 在轨道平面内的投影方向的夹角 α 满足 $\cos \alpha = \frac{\cos \theta_c}{\cos \theta}$ 的两个点 (图 2). 而随着 θ 增大, 这两个稳相点间的距离越来越远;

当 $\theta \approx \theta_c$ 时, 两个点重合, τ 在轨道平面内的投影恰沿轨道切线方向. 当 θ 再继续增大时, 不再有稳相点, 辐射场会急剧减小.

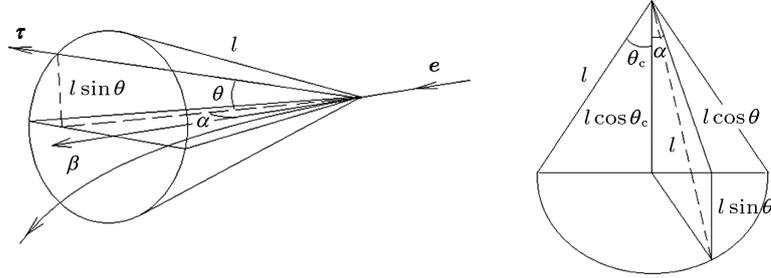


图 1 辐射相干相长方向形成的圆锥以及角度 α 的几何计算

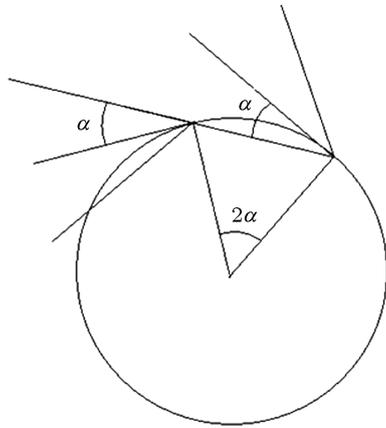


图 2 观测方向贴近粒子轨道平面时的两个稳相点

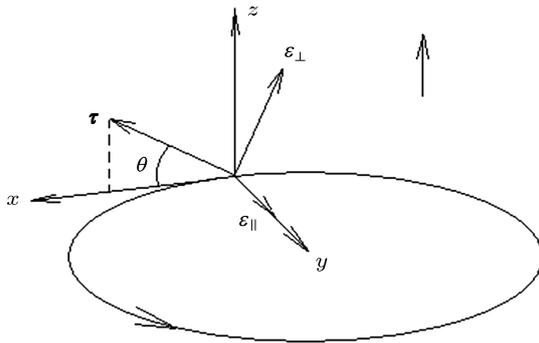


图 3 为计算同步 Čerenkov 辐射建立的坐标系

建立如图 3 所示的坐标系, 使得电子轨道位于 x - y 平面内, 半径为 ρ ; 对给定的观测方向 τ , 取粒子速度方向与 τ 在轨道平面的投影方向相一致的点为坐标原点, 并使 x 轴沿这一点处的粒子速度方向, y 轴则指向轨道圆心, 于是 τ 在 z - x 平面内, 且与 x 轴的夹角为 θ . 在该坐标系下电子的运动轨道和速

度分别可表示为

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_e(t) &= \rho \left(\sin \left(\frac{vt}{\rho} \right) \mathbf{i} - \cos \left(\frac{vt}{\rho} \right) \mathbf{j} \right) + \mathbf{r}_0 \\ &= \rho \left(\sin \left(\frac{vt}{\rho} \right) \cos \theta \boldsymbol{\tau} - \sin \left(\frac{vt}{\rho} \right) \sin \theta \mathbf{e}_\perp \right. \\ &\quad \left. - \cos \left(\frac{vt}{\rho} \right) \mathbf{e}_{//} \right) + \mathbf{r}_0, \\ \mathbf{v}(t) &= v \left(\cos \left(\frac{vt}{\rho} \right) \mathbf{i} + \sin \left(\frac{vt}{\rho} \right) \mathbf{j} \right) \\ &= v \left(\cos \left(\frac{vt}{\rho} \right) \cos \theta \boldsymbol{\tau} - \cos \left(\frac{vt}{\rho} \right) \sin \theta \mathbf{e}_\perp \right. \\ &\quad \left. + \sin \left(\frac{vt}{\rho} \right) \mathbf{e}_{//} \right), \end{aligned}$$

式中 $\mathbf{e}_{//} = \mathbf{j}$ 是 y 方向的单位矢量, 它对应于辐射场偏振的 Σ 分量的方向; $\mathbf{e}_\perp = \boldsymbol{\tau} \times \mathbf{j}$ 对应于辐射场偏振的 Π 分量的方向. 代入 (1) 式, 可得

$$\begin{aligned} \frac{dI}{d\Omega}(\omega) &= \frac{\mu e^2 \omega^2 v}{16\pi^3 c'} \left| \int \left(\cos \left(\frac{vt}{\rho} \right) \sin \theta \mathbf{e}_\perp - \sin \left(\frac{vt}{\rho} \right) \mathbf{e}_{//} \right) \right. \\ &\quad \left. \times \exp \left[i\omega \left(t - \frac{\rho}{c'} \sin \left(\frac{vt}{\rho} \right) \cos \theta \right) \right] dt \right|^2. \quad (4) \end{aligned}$$

也可以将辐射频谱分布分两个不同偏振方向写为

$$\begin{aligned} \frac{dI_\perp}{d\Omega}(\omega) &= \frac{\mu e^2 \omega^2 v}{16\pi^3 c'} \left| \int \cos \left(\frac{vt}{\rho} \right) \sin \theta \right. \\ &\quad \left. \times \exp \left[i\omega \left(t - \frac{\rho}{c'} \sin \left(\frac{vt}{\rho} \right) \cos \theta \right) \right] dt \right|^2, \quad (5a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{dI_{//}}{d\Omega}(\omega) &= \frac{\mu e^2 \omega^2 v}{16\pi^3 c'} \left| \int \sin \left(\frac{vt}{\rho} \right) \right. \\ &\quad \left. \times \exp \left[i\omega \left(t - \frac{\rho}{c'} \sin \left(\frac{vt}{\rho} \right) \cos \theta \right) \right] dt \right|^2. \quad (5b) \end{aligned}$$

将 (4) 式中被积函数的相位

$$\varphi = \omega \left(t - \frac{\rho}{c'} \sin \left(\frac{vt}{\rho} \right) \cos \theta \right)$$

对时间求导可得

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega \left(1 - \frac{v}{c'} \cos \left(\frac{vt}{\rho} \right) \cos \theta \right),$$

从而在 $\frac{vt}{\rho} = \pm \alpha$ 时为稳相点, 这与之前的讨论是一致的.

当观测方向贴近轨道平面时, θ 较小, 此时轨道上有两个一阶稳相点 $t = \pm \alpha \rho / v$, 在这两个点附近做渐近展开, 可以得到两个偏振方向上的辐射频谱角分布分别为

$$\frac{dI_{\perp}}{d\Omega}(\omega) = \frac{\mu e^2 \omega \rho \cos^2 \alpha \sin^2 \theta}{2\pi^2 v \sin \alpha \cos \theta} \cos^2 \left(\frac{\alpha \rho \omega}{v} - \frac{\rho \omega}{c'} \sin \alpha \cos \theta + \frac{\pi}{4} \right), \quad (6a)$$

$$\frac{dI_{\parallel}}{d\Omega}(\omega) = \frac{\mu e^2 \omega \rho \sin \alpha}{2\pi^2 v \cos \theta} \sin^2 \left(\frac{\alpha \rho \omega}{v} - \frac{\rho \omega}{c'} \sin \alpha \cos \theta + \frac{\pi}{4} \right). \quad (6b)$$

注意式子中 α 满足 $\cos \alpha = \frac{\cos \theta_c}{\cos \theta}$, 是 θ 的函数. 可见在频率 ω 较高时, 辐射能谱为受调制的波动的形状; 这与 Rynne 等 [5] 的计算结果在 ω 较大时的渐近行为是一致的.

下面再来看观测方向满足 $\theta \approx \theta_c$ 的情况, 此时只有一个二阶稳相点 $t = 0$, 在该点处做渐近展开可以得到

$$\frac{dI_{\perp}}{d\Omega}(\omega) = \frac{\mu e^2}{8\pi^3 c'} \left(\frac{\rho^4 \omega^4}{6v} \right)^{1/3} \Gamma^2(1/3) \sin^2 \theta_c, \quad (7a)$$

$$\frac{dI_{\parallel}}{d\Omega}(\omega) = \frac{\mu e^2}{8\pi^3 c'} (6v\rho^2\omega^2)^{1/3} \Gamma^2(2/3), \quad (7b)$$

这时的频谱不再随频率波动, 可见辐射的性状与稳相点的分布是密切相关的. (6) 式与 (7) 式的差别也说明在临界方向附近的频谱与粒子轨道平面附近的频谱差别很大, 这一特点与匀速直线运动粒子的

Čerenkov 辐射是相同的. 由于 Čerenkov 辐射的临界角 θ_c 随着粒子速度增大而增大, 在折射率足够大时, 这个张角 θ_c 可以变得很大, 小角度近似在计算这些方向的频谱时会不再适用, 而无需小角度近似的稳相法则仍然可行.

观察 (6), (7) 式, 似乎频谱在频率 ω 趋于无穷时发散, 这是因为没有考虑折射率 n 随频率的改变. 事实上, 为了出现弯轨 Čerenkov 辐射, 我们的讨论一直是要求粒子的运动速度大于介质中的光速, 这只有在介质折射率 n 大于 1 时才有可能出现, 事实上这只有在介质吸收频率附近的一些频带上才成立 [13], 因此并不会出现发散问题.

4 结语

本文对于稳相法在弯轨 Čerenkov 辐射中的应用做了初步的讨论, 并用该方法计算了同步 Čerenkov 辐射的频谱分布. 从本文的讨论可以看到, 用稳相法求解弯轨 Čerenkov 辐射频谱的渐近表示, 不论轨道如何复杂, 只要稳相点的分布是离散的, 则只需将经典的辐射频谱公式在稳相点附近的小段积分路径展开成类似于 Gauss 积分的形式进行计算, 而无需对整个粒子轨道积分, 因此不依赖于粒子轨道的特殊形式, 可以适用于很一般的粒子运动. 而用稳相法求解出的频谱在形式上更简单, 并且很明显地反映了频谱在高频极限下的渐近行为. 另外, 对任意观测方向原则上都可以用稳相法来分析和计算频谱, 而不必像某些辐射频谱计算那样要求观测方向的小角度近似, 因而也适用于大角度时的辐射频谱的讨论.

在天体物理中, 常常会有需要同时考虑外磁场以及等离子体介质的情况 [11,14,15], 此时就需要考虑弯轨 Čerenkov 辐射. 在通常理论计算无法进行的一些运动较复杂的弯轨 Čerenkov 辐射问题中, 稳相法提供了分析辐射特性的另一种途径.

[1] Čerenkov P A 1934 *Dold. Akad. Nauk USSR* **2** 451
 [2] Frank I M, Tamm I E 1937 *Dold. Akad. Nauk USSR* **14** 107
 [3] Schwinger J, Tsai W Y 1976 *Ann. Phys.* **96** 303
 [4] Erber T, White D, Tsai W Y, Latal H G 1976 *Ann. Phys.* **102** 405
 [5] Rynne T M, Baumgartner G B, Erber T 1978 *J. Appl. Phys.* **49** 2233
 [6] Patro D N 1982 *Phys. Rev. Lett.* **49** 1083
 [7] Bonin K D, McDonald K T, Russell D P, Flanz J B 1986 *Phys. Rev. Lett.* **57** 2264
 [8] McDonald K T 2004 *Science* **303** 310
 [9] Konstantinovich A V, Konstantinovich I A 2008 *Astropart. Phys.* **30**

142
 [10] Saharian A A, Kotanjyan A S 2009 *J. Phys. Math. Theory* **42** 135402
 [11] Šoln J 1999 *Astron. Nachr.* **320** 141
 [12] Bender C M, Orszag S A 1999 *Advanced Mathematical Methods for Scientists and Engineers* (Berlin: Springer) pp276–279
 [13] Jackson J D 1998 *Classical Electrodynamics* (3rd Ed.) (New York: Wiley) p638
 [14] Lyutikov M, Machabelli G, Blandford R 1999 *Astron. J.* **512** 804
 [15] de Vries K D, van den Berg A M, Scholten O, Werner K 2011 *Phys. Rev. Lett.* **107** 061101

Stationary phase method of calculating Čerenkov radiation spectrum of a charged particle moving in curved path*

Li Yi-Ding^{1)†} Zhang Peng-Fei²⁾ Zhang Hui¹⁾ Yu Miao²⁾

1) (National Synchrotron Radiation Laboratory, University of Science and Technology of China, Hefei 230029, China)

2) (CAS Key Laboratory of Basic Plasma Physics, Department of Modern Physics, University of Science and Technology of China, Hefei 230026, China)

(Received 11 October 2012; revised manuscript received 10 December 2012)

Abstract

Based on the general expression for spectral-angular distribution of the radiation emitted by a charged particle moving in exterior medium, the essential role of stationary phase points in Čerenkov effect is investigated. And the stationary phase method of calculating spectral-angular distribution of Čerenkov radiation from a charged particle moving in curved path is proposed. By the stationary phase method, the asymptotic form of spectral-angular distribution of synchrotron-Čerenkov radiation is calculated, and the result indicates that the spectrum of synchrotron-Čerenkov radiation near critical angle θ_c is quite different from that near the plane of particle's orbit.

Keywords: Čerenkov effect, stationary phase point, stationary phase method, synchrotron-Čerenkov radiation

PACS: 41.60.Ap, 41.60.Bq

DOI: 10.7498/aps.62.104103

* Project supported by the National Basic Research Program of China (Grant No. 2001CCB01000), and the ITER-China Program (Grant No. 2010GB107001).

† Corresponding author. E-mail: liyd@mail.ustc.edu.cn