

周期性磁谐振材料本构参数的理论分析*

徐新河^{1)2)†} 肖绍球¹⁾ 甘月红²⁾ 王秉中¹⁾

1) (电子科技大学应用物理研究所, 成都 610054)

2) (南昌航空大学, 南昌 330063)

(2012年8月29日收到; 2012年10月22日收到修改稿)

将薄的磁谐振介质板等效为面磁流, 利用周期性边界条件, 给出了面磁流的指数形式. 通过计算无穷个面磁流在不同空间位置上产生的总电场和总磁场, 推导出了周期性磁谐振人工材料的色散关系和布洛赫阻抗, 进而获取了布洛赫本构参数的理论计算公式. 由于考虑了磁谐振人工材料中的电反谐振对布洛赫介电常数和磁导率的影响, 所以基于仿真实验的布洛赫本构参数的提取值和布洛赫本构参数理论预测值之间的误差很小, 这说明本文推导的布洛赫本构参数的理论计算公式在描述周期性磁谐振材料的电磁特性方面是十分有效的. 这些理论公式将在解释磁谐振现象、设计和优化周期性磁谐振材料等方面提供重要的理论依据.

关键词: 周期性结构, 磁谐振, 布洛赫本构参数, 面磁流

PACS: 41.20.Jb, 42.25.Bs, 41.20.-q

DOI: 10.7498/aps.62.104105

1 引言

电磁超材料 (metamaterials, MTM) 是指在一定频率范围内, 两个本构参数 (介电常数和磁导率) 的实部有一个或者两个同时小于零的人工材料^[1-9]. 基本模式强烈耦合电场的电感电容 (inductive-capacitive, LC) 谐振器称为电 LC 谐振器 (ELC 谐振器, electric-LC resonator)^[4], 基本模式强烈耦合磁场的 LC 谐振器则称为磁 LC 谐振器 (MLC 谐振器, magnetic-LC resonator)^[5]. 电 LC 谐振导致了材料的介电常数的实部为负数, 而磁 LC 谐振导致了材料的磁导率实部小于零, 因此电 LC 谐振器和磁 LC 谐振器分别是组成单负介电常数和单负磁导率人工介质的典型单元. 在发生磁谐振的同时会伴随弱的电反谐振 (electric antiresonance)^[5,10], 因此, 磁 LC 谐振器人工超材料的介电常数也会发生相应的变化, 只不过, 介电常数的变化幅度相对于磁导率的变化幅度要小得多, 以至于这种小的变化不会导致负的介电常数^[5,10,11]. 对于电 LC 谐振器也存在类似的现象. 在电谐振频率和磁谐振频率相同或者相近的情况下, 这两种谐振器在空间按照

一定的方式周期性地排列就可以构成负折射率材料^[11] (介电常数和磁导率的实部均为负值). 由于电磁超材料的介电常数和磁导率无法预先知道, 通常是利用仿真或实验测得的散射参数 (即 S 参数), 通过一定的算法间接获取 MTM 的这两个本构参数^[12-18], 这将为设计符合一定要求的磁导率和介电常数的电磁超材料带来巨大的挑战, 现阶段通常的做法是对设计的电磁超材料结构进行反复的参数扫描和优化, 以达到设计要求. 如果事先能够获得磁 LC 谐振人工材料和电 LC 谐振人工材料的本构参数的解析表达式, 无疑将对设计和理解这样的人工材料带来很大的帮助作用. 文献 [11] 系统地从事散射矩阵的角度, 利用有效媒质理论对磁谐振人工介质的本构参数解析式进行了探讨, 但是未考虑电反谐振对其本构参数的影响, 因此从文献给出的图形可以看出, 磁谐振人工介质的介电常数和磁导率的理论值和提取值存在一定的误差.

为了解决上述问题, 本文从麦克斯韦方程出发, 将磁谐振器人工介质板在一定的条件下等效为面磁流, 利用周期性边界条件和叠加原理, 推导出周期性 MLC 电磁超材料的相对介电常数、相对磁导

* 国家自然科学基金 (批准号: 60971029, 60872034, 61271028) 资助的课题.

† 通讯作者. E-mail: xxh_rific@hotmail.com

率与工作频率、磁谐振频率、空间周期等参数的函数解析式. 正是因为这种函数解析式中包含了磁谐振器的电反谐振影响参数——平均相对介电常数 $\bar{\epsilon}_r$, 使得圆形开口磁谐振环本构参数的理论值与基于 HFSS 仿真实验的提取值之间误差很小. 这说明本文给出的磁谐振人工材料的本构参数解析式, 能够正确地描述磁谐振人工材料的电磁特性. 需要说明的是由于磁谐振环的电响应相对于其磁响应是非常微弱的, 引入与频率无关的平均介电常数是对这种弱电反谐振现象 (或者弱电响应、弱电色散现象) 的一种近似描述.

2 基于等效磁流方法的人工周期性磁谐振材料的理论分析

在这一部分, 将周期结构磁谐振人工介质板等效成面磁流, 首先推导出材料的 Bloch 阻抗和色散关系的理论计算公式, 然后据此导出磁谐振人工材料的相对 Bloch 介电常数和磁导率. 根据麦克斯韦电场旋度方程 $\nabla \times \mathbf{E} = -j\omega\mu_r\mu_0\mathbf{H}$, 可以令等效磁流体密度为

$$\mathbf{M} = j\omega\mu_r\mu_0\mathbf{H}, \quad (1)$$

其中, μ_r 磁谐振人工介质板的相对磁导率, μ_0 空气的磁导率, ω 是角频率. 如果图 1 所示的磁谐振介质板的厚度 $h \rightarrow 0$, 那么磁谐振介质板内的磁流可以认为是在一个平面上流动. 另外这些磁流面垂直 z 轴, 并且在 z 轴的坐标为 md , 整数 m 的取值范围是 $(-\infty, \infty)$, d 是介质板在空间排列的周期. 对于 $z = md$ 的平面, 根据 (1) 式, 其面磁流密度为

$$\mathbf{M}_s(z) = j\omega\mu_r\mu_0 h \mathbf{H}(z), \quad z = md, \quad (2)$$

磁谐振介质板在谐振时, μ_r 很大, 一般有 $\omega\mu_r\mu_0 \rightarrow \infty$ 和 $\omega\mu_0\mu_r h \neq 0$, 因而平面 $z = md$ 上的面磁流 $\mathbf{M}_s(z) \neq 0$, 所以根据磁谐振介质板在麦克斯韦方程中作用, 可以将磁谐振介质板等效为一面磁流. 在图 1 中, 假定周期性结构中的 Bloch 波的传播方向为正 z 方向, 磁谐振人工材料是由磁谐振介质板在空气中以 d 为周期排列而形成的, 其等效面磁流矢量方向为正 y 方向. 根据周期性边界条件, 在 $z = md$ 平面上的面磁流密度必须具有下列形式

$$\mathbf{M}_s(z) = M_{s0} e^{-j\beta z} \hat{y}, \quad z = md, \quad (3)$$

M_{s0} 是面磁流在 $z = 0$ 面上的幅度, β 是周期性磁谐振人工材料的传播常数. 首先考虑空间仅存在一个 $z = md$ 磁流面的情况. 因为 $z = md$ 平面没有面

电流密度, 所以此平面的两边必须满足磁场连续这一边界条件, 故可以设定该平面上的磁流在两个半无限空间激起的磁场分别为

$$\mathbf{H}^- = A e^{jk_0(z-md)} \hat{y}, \quad z < md, \quad (4)$$

$$\mathbf{H}^+ = A e^{-jk_0(z-md)} \hat{y}, \quad z > md. \quad (5)$$

待定系数 A 可以根据电场边界条件求得, $k_0 = \omega\sqrt{\mu_0\epsilon_0}$ 是空气的传播常数. ϵ_0 是空气的介电常数, 根据麦克斯韦旋度方程 $\nabla \times \mathbf{H} = j\omega\epsilon_0\mathbf{E}$, 利用 (4) 式和 (5) 式可以求得

$$\mathbf{E}^- = -A\eta_0 e^{jk_0(z-md)} \hat{x}, \quad z < md, \quad (6)$$

$$\mathbf{E}^+ = A\eta_0 e^{-jk_0(z-md)} \hat{x}, \quad z > md, \quad (7)$$

其中 $\eta_0 = \sqrt{\mu_0/\epsilon_0}$ 是空气的波阻抗, 利用 $z = md$ 面上的电场边界条件 $(\mathbf{E}^+ - \mathbf{E}^-) \times \hat{n} = \mathbf{M}_s$, $\hat{n}$ 是平面 $z = md$ 的单位法向矢量, 其方向为 $+z$ 方向, 即 $\hat{n} = \hat{z}$. 用 md 替代 (3), (6) 和 (7) 式中的 z 后, 再代入电场边界条件, 可以求得系数 A :

$$A = -\frac{1}{2\eta_0} M_{s0} e^{-j\beta md}. \quad (8)$$

将 (8) 式分别代入 (4), (5), (6) 和 (7) 式中, 可以求出单个平面 $z = md$ 上的磁流在空间产生的平面波

$$\mathbf{H}^- = -\frac{1}{2\eta_0} M_{s0} e^{-j\beta md} e^{jk_0(z-md)} \hat{y}, \quad z < md, \quad (9)$$

$$\mathbf{H}^+ = -\frac{1}{2\eta_0} M_{s0} e^{-j\beta md} e^{-jk_0(z-md)} \hat{y}, \quad z > md, \quad (10)$$

$$\mathbf{E}^- = \frac{1}{2} M_{s0} e^{-j\beta md} e^{jk_0(z-md)} \hat{x}, \quad z < md, \quad (11)$$

$$\mathbf{E}^+ = -\frac{1}{2} M_{s0} e^{-j\beta md} e^{-jk_0(z-md)} \hat{x}, \quad z > md. \quad (12)$$

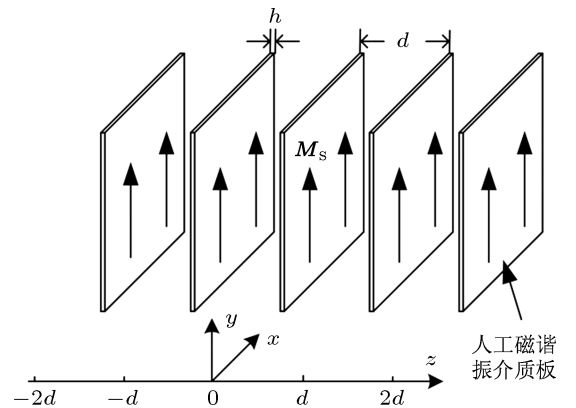


图 1 周期性磁谐振介质板的等效面磁流. 假定面磁流密度矢量方向是 $+y$ 方向, Bloch 波的传播方向为 $+z$ 方向; 等效磁流面在 z 轴上的坐标为 $z = -\infty, \dots, -d, 0, d, \dots, \infty$

为了求解磁谐振人工介质的 Bloch 阻抗和色散关系, 必须先分别求解出所有的面磁流在介质板

上和两介质板中间总的电磁场. 根据叠加原理, 空间所有面磁流在 $z = (n+1/2)d$ 平面 (此平面位于 $z = nd$ 和 $z = (n+1)d$ 两磁流面的中间) 上产生总的电磁场是各个面磁流在此平面上激发的电磁场的线性叠加. 需要注意的是, 磁流是磁谐振人工介质板的一种等效, 但是在磁谐振同时会伴随电反谐振, 从而使磁谐振人工介质板的介电常数发生改变. 根据有效媒质理论, 当空间周期远小于波长时, 空气中周期加载磁谐振介质板可以等效成均匀媒质. 在考虑电反谐振影响的情况下, 必须引入均匀媒质的平均相对介电常数 $\bar{\epsilon}_r$ (它是空气和磁谐振介质板的相对介电常数的平均值) 这一参数, 此时需要用 $\sqrt{\bar{\epsilon}_r}k_0$ 和 $\eta_0/\sqrt{\bar{\epsilon}_r}$ 替代 (9)—(12) 式中空气的传播常数 k_0 和波阻抗 η_0 . 将 $(n+1/2)d$ 替代 (9)—(12) 式中的 z 变量并对变量 m 求和, 可以分别得到平面 $z = (n+1/2)d$ 上的总磁场和总电场, 即

$$\begin{aligned} H_{n+1/2} &= \sum_{m=-\infty}^n -\frac{\sqrt{\bar{\epsilon}_r}}{2\eta_0} M_{s0} e^{-j\beta md} e^{-j\sqrt{\bar{\epsilon}_r}k_0[(n+1/2)d-md]} \hat{y} \\ &+ \sum_{m=n+1}^{\infty} -\frac{\sqrt{\bar{\epsilon}_r}}{2\eta_0} M_{s0} e^{-j\beta md} e^{j\sqrt{\bar{\epsilon}_r}k_0[(n+1/2)d-md]} \hat{y} \\ &= \frac{-j2M_{s0} e^{j[\sqrt{\bar{\epsilon}_r}k_0-(n+1/2)\beta]d} \cos\left(\frac{\beta d}{2}\right) \sin\left(\frac{\sqrt{\bar{\epsilon}_r}k_0 d}{2}\right)}{\eta_0 \left[e^{j(-\beta+\sqrt{\bar{\epsilon}_r}k_0)d} - 1 \right] \left[e^{j(\beta+\sqrt{\bar{\epsilon}_r}k_0)d} - 1 \right] / \sqrt{\bar{\epsilon}_r}} \hat{y}, \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} E_{n+1/2} &= \sum_{m=-\infty}^n -\frac{1}{2} M_{s0} e^{-j\beta md} e^{-j\sqrt{\bar{\epsilon}_r}k_0[(n+1/2)d-md]} \hat{x} \\ &+ \sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{1}{2} M_{s0} e^{-j\beta md} e^{j\sqrt{\bar{\epsilon}_r}k_0[(n+1/2)d-md]} \hat{x} \\ &= \frac{-j2M_{s0} e^{j[\sqrt{\bar{\epsilon}_r}k_0-(n+1/2)\beta]d} \sin\left(\frac{\beta d}{2}\right) \cos\left(\frac{\sqrt{\bar{\epsilon}_r}k_0 d}{2}\right)}{\left[e^{j(-\beta+\sqrt{\bar{\epsilon}_r}k_0)d} - 1 \right] \left[e^{j(\beta+\sqrt{\bar{\epsilon}_r}k_0)d} - 1 \right]} \hat{x}, \end{aligned} \quad (14)$$

式中 $E_{n+1/2}$ 和 $H_{n+1/2}$ 是 $z = (n+1/2)d$ 平面上总的电场强度和磁场强度矢量. 根据周期性结构 Bloch 阻抗的定义, 利用 (13) 和 (14) 式, 可以求得周期性磁谐振人工介质的 Bloch 阻抗

$$\begin{aligned} Z_B &= \frac{\hat{x} \cdot E_{n+1/2}}{\hat{y} \cdot H_{n+1/2}} \\ &= \frac{\eta_0 \sin(\beta d/2) \cos(\sqrt{\bar{\epsilon}_r}k_0 d/2)}{\sqrt{\bar{\epsilon}_r} \cos(\beta d/2) \sin(\sqrt{\bar{\epsilon}_r}k_0 d/2)} \\ &= \frac{\eta_0 \tan(\beta d/2)}{\sqrt{\bar{\epsilon}_r} \tan(\sqrt{\bar{\epsilon}_r}k_0 d/2)}. \end{aligned} \quad (15)$$

类似的方法可求出所有面磁流在 $z = nd$ 平面上产生的总磁场

$$\begin{aligned} H_n &= \sum_{m=-\infty}^n -\frac{\sqrt{\bar{\epsilon}_r}}{2\eta_0} M_{s0} e^{-j\beta md} e^{-j\sqrt{\bar{\epsilon}_r}k_0[nd-md]} \hat{y} \\ &+ \sum_{m=n+1}^{\infty} -\frac{\sqrt{\bar{\epsilon}_r}}{2\eta_0} M_{s0} e^{-j\beta md} e^{j\sqrt{\bar{\epsilon}_r}k_0[nd-md]} \hat{y} \\ &= \frac{1}{2\eta_0} \frac{M_{s0} \left[e^{-j\beta nd} - e^{j(2\sqrt{\bar{\epsilon}_r}k_0-\beta)d} \right]}{\left[e^{j(-\beta+\sqrt{\bar{\epsilon}_r}k_0)d} - 1 \right] \left[e^{j(\beta+\sqrt{\bar{\epsilon}_r}k_0)d} - 1 \right]} \hat{y} \\ &= j \frac{\sqrt{\bar{\epsilon}_r} M_{s0} \sin(\sqrt{\bar{\epsilon}_r}k_0 d) e^{-j\beta nd}}{2\eta_0 \cos(\beta d) - \cos(\sqrt{\bar{\epsilon}_r}k_0 d)} \hat{y}, \end{aligned} \quad (16)$$

式中 H_n 是 $z = nd$ 平面上的总磁场, 而 $z = nd$ 平面正是等效面磁流所在的平面. 需要说明的是, 对于 (13), (14), (16) 式的求和, 是从形式直接利用了收敛的无穷等比数列求和公式, 但这并不影响结果的正确性. 较为复杂的分析必须考虑空气的损耗, 由于论文篇幅的问题, 在这里就不详细讨论了. 将 (3) 式代入 (2) 式并令 $m = n$, 可以得到

$$M_{s0} e^{-j\beta nd} \hat{y} = j\omega\mu_r\mu_0 h H_n. \quad (17)$$

在上式推导过程中, 使用了等式 $H(nd) = H_n$, 也就是说 $H(nd)$ 和 H_n 是一样的, 它们都是描述所有面磁流在 $z = nd$ 平面上产生的总磁场. 将 (16) 式代入 (17) 式, 可求得周期性磁谐振人工介质的色散关系

$$\cos(\beta d) = \cos(\sqrt{\bar{\epsilon}_r}k_0 d) - \frac{\omega\mu_r\mu_0 h \sqrt{\bar{\epsilon}_r}}{2\eta_0} \sin(\sqrt{\bar{\epsilon}_r}k_0 d). \quad (18)$$

通过三角公式, 可以将上式写成

$$\begin{aligned} &\sin\left(\frac{\beta d}{2}\right) \\ &= \left\{ \sin^2\left(\frac{\sqrt{\bar{\epsilon}_r}k_0 d}{2}\right) + \frac{\omega\mu_r\mu_0 h \sqrt{\bar{\epsilon}_r}}{2\eta_0} \right. \\ &\quad \left. \times \sin\left(\frac{k_0 \sqrt{\bar{\epsilon}_r} d}{2}\right) \cos\left(\frac{k_0 \sqrt{\bar{\epsilon}_r} d}{2}\right) \right\}^{1/2}. \end{aligned} \quad (19)$$

为了保证人工电磁超材料是各向同性的有效媒质, 通常要求其空间周期 $d \ll \lambda_0$, 其中 λ_0 是空气中的波长, 此时 $k_0 d/2 \ll 1$, 而磁谐振人工材料的电反谐振相对于其磁谐振要弱很多, 因此 $\bar{\epsilon}_r$ 不大. 根据泰勒公式在零点的展开, 有下列近似公式

$$\tan(\sqrt{\bar{\epsilon}_r}k_0 d/2) \approx \sqrt{\bar{\epsilon}_r}k_0 d/2, \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \sin(\sqrt{\bar{\epsilon}_r}k_0 d/2) &\approx \sqrt{\bar{\epsilon}_r}k_0 d/2, \\ \cos(\sqrt{\bar{\epsilon}_r}k_0 d/2) &\approx 1. \end{aligned} \quad (21)$$

利用 (21) 式, (19) 式可以简化为

$$\beta = \frac{2}{d} \arcsin \left(\frac{k_0 d}{2} \sqrt{\bar{\epsilon}_r \left(1 + \frac{\mu_r h}{d} \right)} \right). \quad (22)$$

利用 (20) 和 (22) 式, (15) 式可以写成

$$Z_B = \frac{\frac{\eta_0}{\sqrt{\bar{\epsilon}_r}} \sqrt{1 + \frac{\mu_r h}{d}}}{\sqrt{1 - \bar{\epsilon}_r \left(1 + \frac{\mu_r h}{d} \right) \left(\frac{k_0 d}{2} \right)^2}}. \quad (23)$$

如果定义周期性磁谐振人工介质的相对 Bloch 介电常数 ϵ_B 和相对磁导率 μ_B [11], 那么它们与磁谐振人工介质的 Bloch 阻抗和传播常数有下列关系

$$Z_B = \sqrt{\frac{\mu_0 \mu_B}{\epsilon_0 \epsilon_B}}, \quad (24)$$

$$\beta = \omega \sqrt{\mu_0 \mu_B \epsilon_0 \epsilon_B}. \quad (25)$$

利用 (22)—(25) 式可以求得

$$\mu_B = \frac{\sqrt{1 + \frac{\mu_r h}{d}} \arcsin \left(\frac{k_0 d}{2} \sqrt{\bar{\epsilon}_r \left(1 + \frac{\mu_r h}{d} \right)} \right)}{\frac{\sqrt{\bar{\epsilon}_r} k_0 d}{2} \sqrt{1 - \bar{\epsilon}_r \left(1 + \frac{\mu_r h}{d} \right) \left(\frac{k_0 d}{2} \right)^2}}, \quad (26)$$

$$\epsilon_B = \frac{1}{\frac{k_0 d}{2\sqrt{\bar{\epsilon}_r}} \sqrt{1 + \frac{\mu_r h}{d}}} \arcsin \left(\frac{k_0 d}{2} \sqrt{\bar{\epsilon}_r \left(1 + \frac{\mu_r h}{d} \right)} \right) \times \sqrt{1 - \bar{\epsilon}_r \left(1 + \frac{\mu_r h}{d} \right) \left(\frac{k_0 d}{2} \right)^2}. \quad (27)$$

从 (27) 和 (26) 式可以看出, 平均相对介电常数为 $\bar{\epsilon}_r$ 不仅影响周期性磁谐振人工介质的 Bloch 介电常数同时也会影响 Bloch 磁导率. 如果忽略电反谐振 (可令 $\bar{\epsilon}_r = 1$), 那么利用上述公式计算出的 Bloch 本构参数的理论值和实验的提取值之间肯定存在一定的误差. 一旦给定了磁谐振介质板的相对磁导率 μ_r , 厚度 h , 介质板在空间排列的周期 d , 磁谐振人工介质的平均相对介电常数 $\bar{\epsilon}_r$ 和角频率 ω , 就可以利用上面的公式分别求出周期性磁谐振人工介质相对 Bloch 介电常数 ϵ_B 和相对 Bloch 磁导率 μ_B . 因此 (26) 和 (27) 式是周期性磁谐振人工材料本构参数的理论计算公式, 在下部分我们将利用这些理论公式来获取这些本构参数与频率关系的理论曲线.

3 周期性磁谐振人工材料本构参数的提取值与理论值的比较

人工电磁超材料的许多现象与该材料介电常

数和磁导率相联系. 为了获得周期性磁谐振人工材料的介电常数和磁导率, 假定磁谐振介质板具有类似于洛伦兹 (Lorentzian-like) 的相对磁导率 [10], 即

$$\mu_r = \mu_a \left(1 - \frac{F f^2}{f^2 - f_{0m}^2 + j\gamma f} \right), \quad (28)$$

式中 f_{0m} 是磁谐振介质板的谐振频率, γ 是阻尼系数, μ_a , F 和 γ 是与磁谐振器结构相关联的常数. 一旦确定了 (28) 式中 μ_a , F , f_{0m} 和 γ 参数的数值, 就可以获得磁谐振介质板相对磁导率 μ_r 与频率 f 的函数, 然后将此函数代入 (26) 和 (27) 式. 在介质板的厚度 h , 平均介电常数 $\bar{\epsilon}_r$ 和空间排列周期 d 已知的条件下, 周期性磁谐振人工介质的相对 Bloch 介电常数和相对 Bloch 磁导率与频率 f 关系式将被惟一地确定, 由此可绘制出 Bloch 本构参数与频率关系的理论曲线. 为了获得基于仿真实验数据的 Bloch 本构参数曲线, 本文选取了圆形开口谐振环 (split-ring resonator, SRR) 作为周期性磁谐振人工材料单元. 图 2(a) 是一个圆形 SRR 的仿真单元, 在有图案的表面设置为波端口, 其余四个面设置为周期性的边界条件. 该仿真单元立方体的大小为 $2.5 \text{ mm} \times 2.5 \text{ mm} \times 2.5 \text{ mm}$, 通过设置端口和边界条件, 就可以模拟周期 $d = 2.5 \text{ mm}$ 的无穷多个磁谐振人工材料阵列. 导体磁谐振器结构和相关的参数如图 2(b) 所示. 在图 2(a) 的 HFSS 仿真单元中, 导体磁谐振器周围填充的介质是空气. 根据文献 [12, 14] 中的电磁超材料本构参数提取算法, 利用 HFSS 仿真的散射参数 (即 S 参数), 本文提取了 15—20 GHz 频率范围内的相对 Bloch 本构参数的数值. 图 3—6 中的实线就是这些提取值与频率的关系曲线. 采用非线性拟合技术, 选取相对 Bloch 介电常数理论 (27) 式的实部, 对图 5 的实线 (即相对 Bloch 介电常数提取值的实部曲线) 进行非线性拟合, 获得了如表 1 所示的圆形 SRR 谐振器参数数值. 需要说明的是, 磁谐振人工材料最为突出的特点是其磁导率的实部小于零, 应当选取相对 Bloch 磁导率理论计算公式 (26) 的实部, 对图 3 中的黑色实线 (即相对 Bloch 磁导率提取值的实部曲线) 进行非线性拟合, 但是发现这样的拟合效果不是很好, 特别是相对 Bloch 介电常数的实部的提取值和理论值出现了较大的误差. 因此本文选取误差较大 Bloch 介电常数的实部进行拟合, 这样使得相对 Bloch 本构参数的理论值与提取值之间的

误差最小.

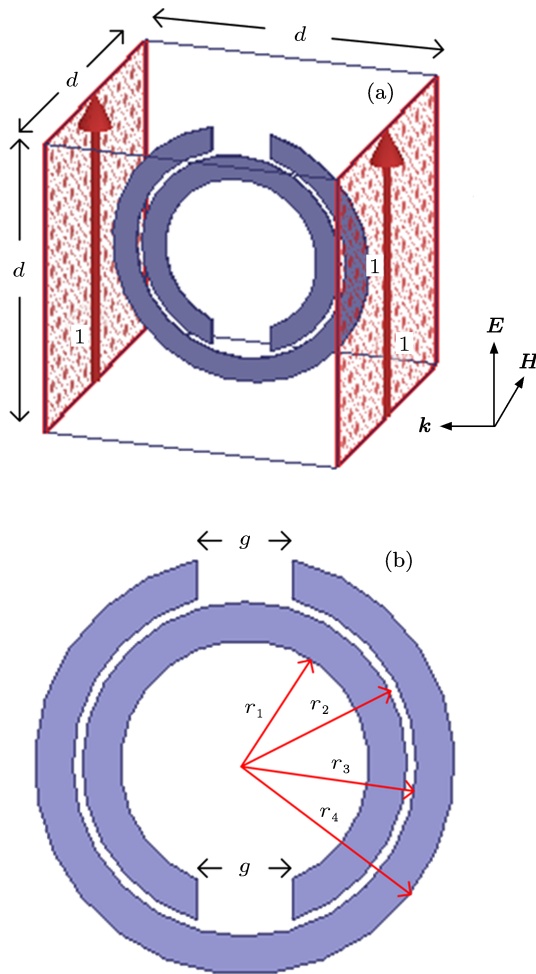


图2 圆形 SRR 结构 (a) 一个圆形 SRR 的 HFSS 仿真单元, 有图案的表面设置为端口, 电磁波在两个波端口之间传播即波矢 $\mathbf{k}$ 垂直波端口, $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{H}$ 分别为电磁波的电场强度和磁场强度, 周期 $d = 2.5$ mm; (b) 单个圆形导体 SRR 结构, 内环的内径 $r_1 = 0.65$ mm, 内环的外径 $r_2 = 0.85$ mm, 外环的内径 $r_3 = 0.9$ mm, 外环的外径 $r_4 = 1.1$ mm, 开口宽度 $g = 0.5$ mm; 导体材料为铜, 导体厚度为 $h = 0.017$ mm

表1 圆形 SRR 谐振器参数

参数	F	μ_a	γ/GHz	h/mm	f_{0m}/GHz	$\bar{\epsilon}_r$
	2.52	1.00	0.047	0.1	17.45	1.897

将表 1 中的参数数值、空间周期 $d = 2.5$ mm 和 (28) 式代入 Bloch 本构参数的理论 (26) 和 (27) 式, 就可以绘制出周期性 SRR 磁谐振人工材料的相对 Bloch 磁导率 μ_B 和相对 Bloch 介电常数 ϵ_B 的理论曲线, 如图 3—6 中的虚线所示. 从上述四图可以看出, 无论是相对 Bloch 本构参数的实部还是虚部, 理论值和提取值之间的误差很小. 这证明了周期性磁谐振器人工材料的相对 Bloch 本构参数的理论计算公式 (26) 和 (27) 式是完全正确的. 从图 3 可以

发现, 随着频率的增大, Bloch 相对磁导率的实部曲线变化趋势是由单调增变为单调减, 再变为单调增, 这种现象称为磁谐振. 实部曲线的最小值所对应的频率为 17.45 GHz, 该频率即为磁谐振频率, 并且在 17—18.5 GHz 频率范围内相对 Bloch 磁导率的实部小于零. 从图 3 中的虚线变化趋势可以明显地看出 (26) 式能够正确地描述该材料的磁谐振现象. 相应地, 图 5 的 Bloch 介电常数的实部曲线与图 3 的相对磁导率实部曲线的变化趋势正好相反, 这说明在 SRR 人工介质发生磁谐振的同时, 伴随着较弱的电反谐振. 从图 5 虚线可以发现, (27) 式正确地

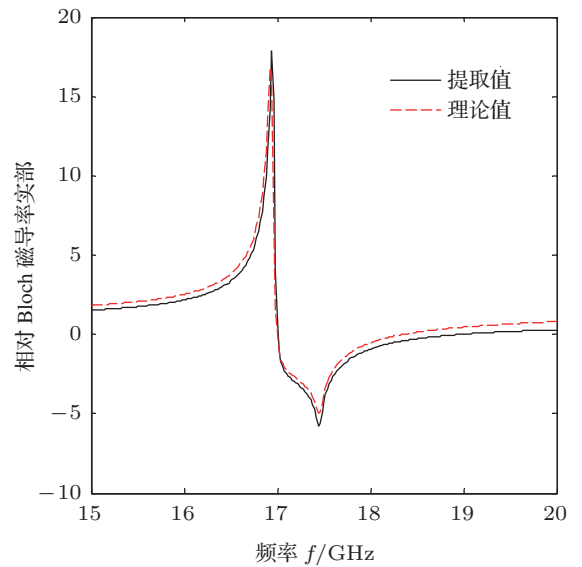


图3 相对 Bloch 磁导率提取值实部与理论值实部的比较

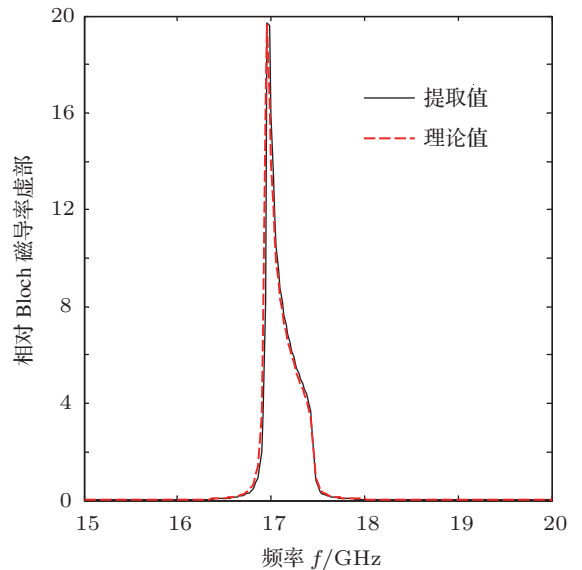


图4 相对 Bloch 磁导率提取值虚部与理论值虚部的比较

反映了该材料的电反谐振特性. 在本文的第二部分引入了平均相对介电常数 $\bar{\epsilon}_r$ 这一参数, 就是考虑到了电反谐振对 Bloch 介电常数和 Bloch 磁导率的影响. 由于文献 [11] 未考虑到这一影响, 从而使得本构参数的理论值与提取值出现了一定程度的误差, 尤其是磁谐振人工介质的介电常数的实部误差较大. 由于图 5 中的 Bloch 磁导率实部始终是正数, 因此周期性 SRR 人工材料是一种负磁导率材料.

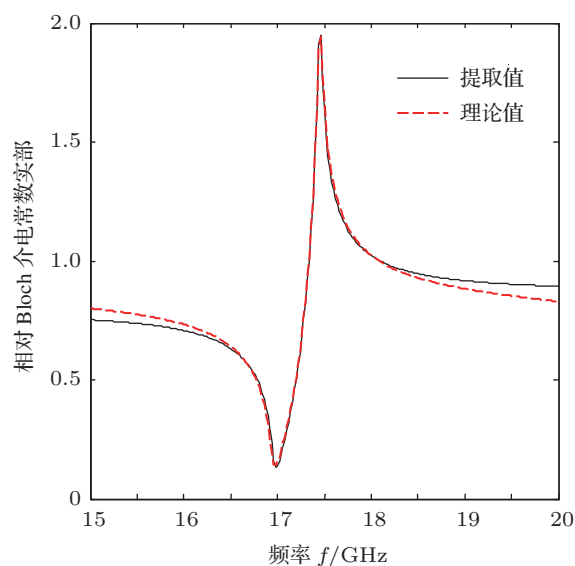


图 5 相对 Bloch 介电常数提取值实部与理论值实部的比较

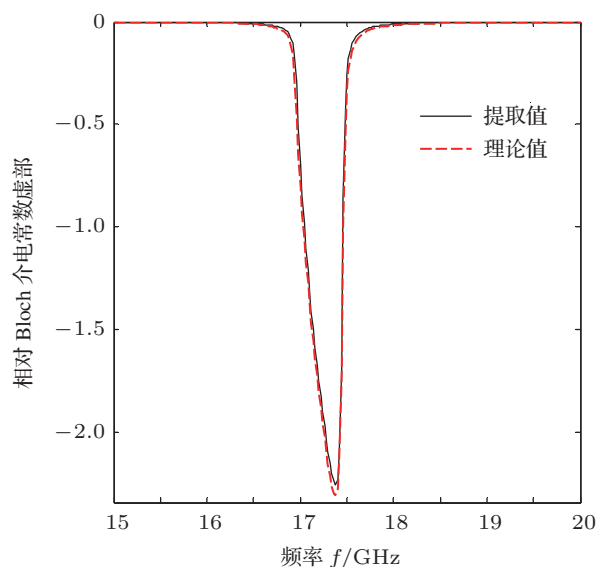


图 6 相对 Bloch 介电常数提取值虚部与理论值虚部的比较

为了进一步验证磁谐振材料本构参数理论分析的有效性, 本文还选取了如图 7 所示的矩形单环

SRR 结构作为另外一种周期性磁谐振人工材料单元, Bloch 本构参数的理论值和提取值如图 8—11 所示. 表 2 给出了拟合矩形单环 SRR 提取值曲线所获得参数数值. 图 2 和图 7 中的磁谐振环在形状、环数 (图 2 是双环, 图 7 是单环) 和空间周期 (图 2 的空间周期 $d = 2.5$ mm, 图 7 的空间周期 $d = 3$ mm) 等方面存在较大的差别. 正是物理结构上的差别, 导致了这两种磁谐振超材料在谐振频率、磁谐振强度 (磁导率幅度变化范围) 和电反谐振强度 (介电常数幅度变化范围) 等谐振特性方面存在较大差别. 与双圆环磁谐振超材料类似, 从图 8—11 可以看出单矩形磁谐振超材料 Bloch 本构参数的理论值和提取值之间误差也很小. 这说明 (26) 和 (27) 式在描述不同物理结构磁谐振超材料本构参数方面是有效的.

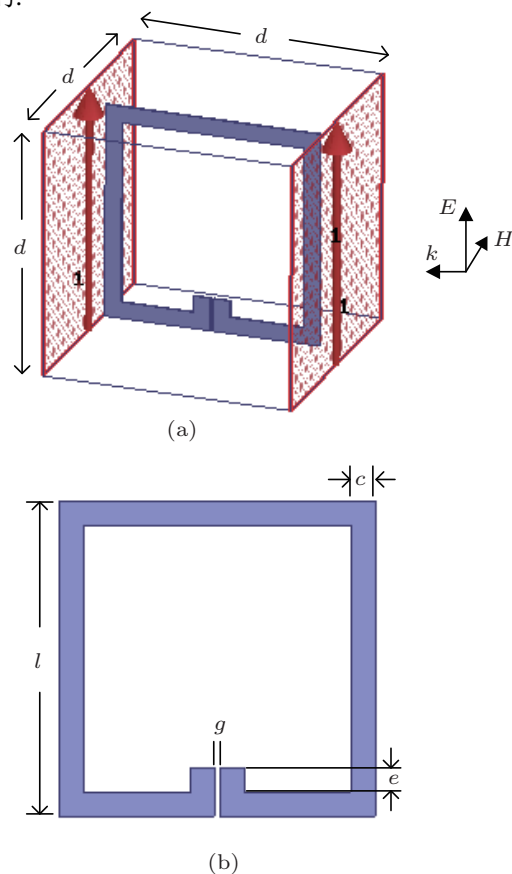


图 7 矩形单环 SRR 结构 (a) 一个矩形单环 SRR 的 HFSS 仿真单元, 周期 $d = 3$ mm; (b) 单个矩形导体 SRR 结构, 相关物理参数 $c = 0.2$ mm, $e = 0.2$ mm, $g = 0.04$ mm, $l = 2.6$ mm, 开口宽度 $g = 0.5$ mm. 导体材料为铜, 导体厚度为 $h = 0.017$ mm

表 2 矩形单环 SRR 谐振器参数

参数	F	μ_a	γ/GHz	h/mm	f_{0m}/GHz	$\bar{\epsilon}_r$
	4.79	1.02	0.034	0.1	12.68	2.41

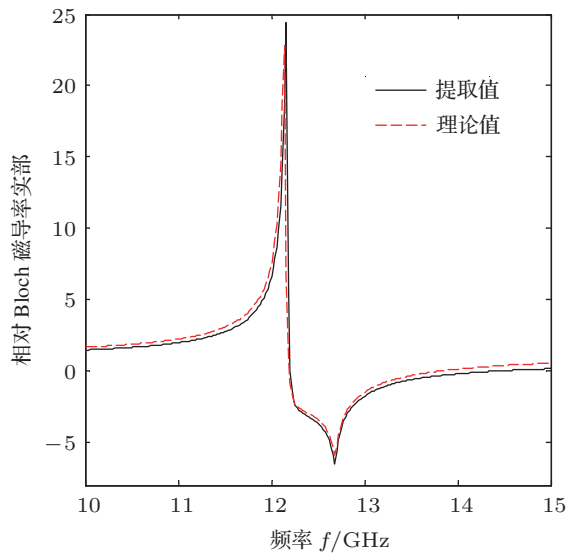


图8 Bloch 磁导率实部提取值与理论值比较

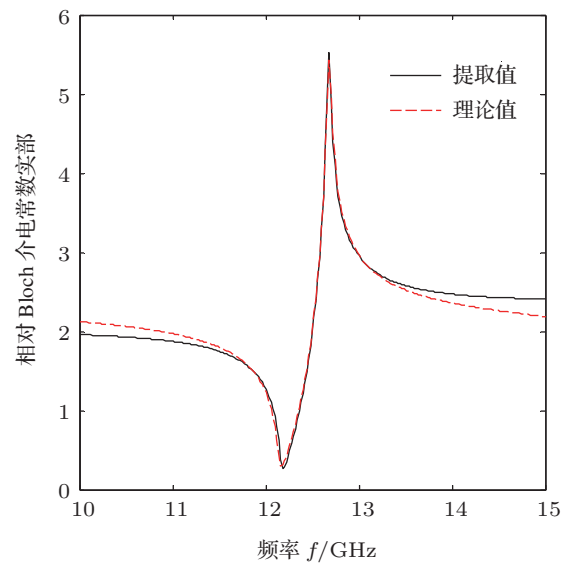


图10 Bloch 介电常数实部提取值与理论比较

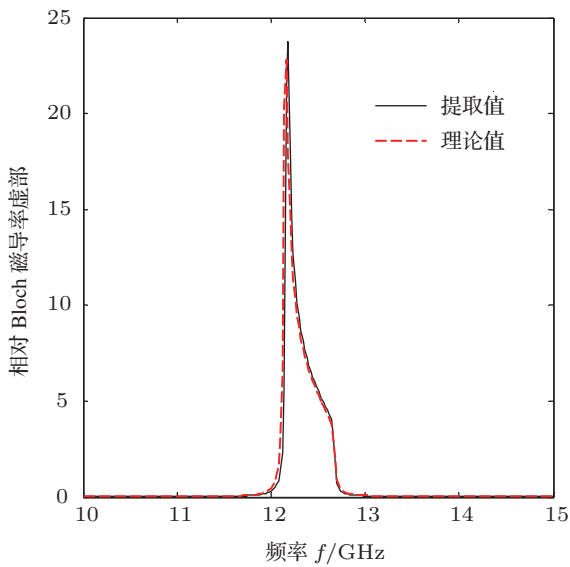


图9 Bloch 磁导率虚部提取值与理论值比较

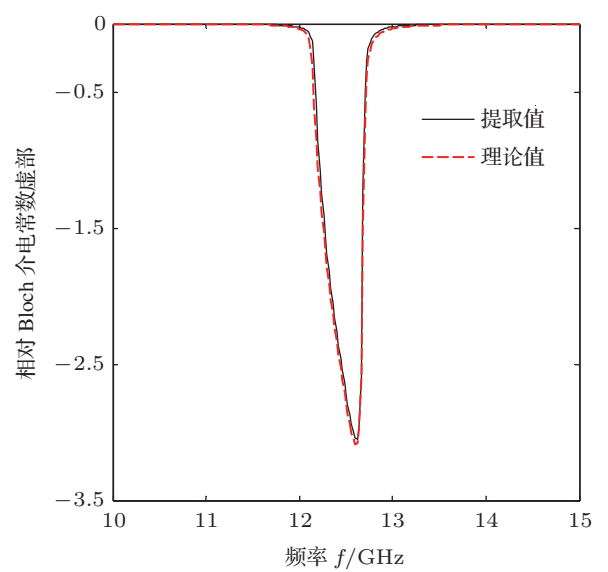


图11 Bloch 介电常数虚部提取值与理论值比较

4 结 论

本文依据麦克斯韦方程将薄的导体磁谐振人工介质板等效为面磁流, 利用叠加原理, 获得了所有面磁流在空间激发的总电磁场, 据此推导出了 Bloch 介电常数和 Bloch 磁导率的理论计算公式. 由于在推导的过程中, 充分考虑到了磁谐振人工材料的电反谐振对本构参数的影响, 因此本文的周期性磁谐振介质本构参数理论值与仿真实验的提取

值相差很小, 这说明本文导出的相对 Bloch 磁导率和相对 Bloch 介电常数理论计算公式正确地预测或者描述了磁谐振人工材料中存在的磁谐振和电反谐振现象. 虽然这两个本构参数的理论公式较为复杂, 但是它直观地反映了磁谐振人工材料的相关参数如空间周期 d , 频率 f 对其 Bloch 本构参数的影响, 这将为 MLC 人工介质的设计和仿真优化方案提供重要的理论依据.

- [1] Veselago V G 1968 *Sov. Phys. Usp.* **10** 509
- [2] Shelby R A, Smith D R, Schultz S 2001 *Science* **292** 77
- [3] Pendry J B 2000 *Phys. Rev. Lett.* **85** 3966
- [4] Schurig D R, Mock J J, Smith D R 2006 *Appl. Phys. Lett.* **88** 041109
- [5] Pendry J B, Holden A J, Robbins D J 1999 *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.* **47** 2075
- [6] Li J C, Guo L X, Liu S H 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 124102 (in Chinese) [李俊成, 郭立新, 刘松华 2012 物理学报 **61** 124102]
- [7] Yang C, Zhang H X, Wang H X, Xu N, Xu Y Y, Huang L Y, Zhang K X 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 164101 (in Chinese) [杨晨, 张洪欣, 王海侠, 徐楠, 许媛媛, 黄丽玉, 张可欣 2012 物理学报 **61** 164101]
- [8] Xu X H, Xiao S Q, Gan Y H, Fu C F, Wang B Z 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 124103 (in Chinese) [徐新河, 肖绍球, 甘月红, 付崇芳, 王秉中 2012 物理学报 **61** 124103]
- [9] Dai X Y, Wen S C, Xiang Y J 2008 *Chin. Phys. B* **17** 186
- [10] Liu R, Cui T J, Huang D, Zhao B, Smith D R 2007 *Phys. Rev. E* **76** 026606
- [11] Smith D R 2010 *Phys. Rev. E* **81** 03660
- [12] Smith D R, Schultz S 2002 *Phys. Rev. B* **65** 195104
- [13] Smith D R, Pendry J B 2006 *J. Opt. Soc. Am. B* **23** 391
- [14] Smith D R, Vier D C, Koschny T, Soukoulis C M 2005 *Phys. Rev. E* **71** 036617
- [15] Chen X, Grzegorzczak T M, Wu B I, Pacheco Jr J, Kong J A 2004 *Phys. Rev. E* **70** 016608
- [16] Gong J Q, Liang C H 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 059204 (in Chinese) [龚建强, 梁昌洪 2011 物理学报 **60** 059204]
- [17] Varadan V, Sheng Z, Penumarthi S, Puligalla S 2006 *Microwave Opt. Technol. Lett.* **48** 1549
- [18] Chen H S 2005 *Ph. D. Dissertation* (Hangzhou: Zhejiang University) (in Chinese) [陈红胜 2005 博士学位论文 (杭州: 浙江大学)]

Theoretical analysis of constitutive parameters for the periodic magnetic resonator metamaterials*

Xu Xin-He^{1)2)†} Xiao Shao-Qiu¹⁾ Gan Yue-Hong²⁾ Wang Bing-Zhong¹⁾

¹⁾ (Institute of Applied Physics, University of Electronic Science and Technology of China, Chengdu 610054, China)

²⁾ (Nanchang Hangkong University, Nanchang 330063, China)

(Received 29 August 2012; revised manuscript received 22 October 2012)

Abstract

The thin magnetic resonance dielectric plate is equivalent to a surface magnetic current. Using periodic boundary conditions, the exponential form of the surface magnetic current density is given. The dispersion relation and Bloch impedance of a periodic magnetic resonator metamaterial are derived by calculating the total electric and magnetic fields at the different positions excited by the infinite number of surface magnetic currents, and thus the theoretical formulas for Bloch constitutive parameters are obtained. Since the electric anti-resonance influence on the Bloch permittivity and permeability of magnetic resonator metamaterial is considered, thus the Bloch constitutive parameter difference between theoretical values and retrieval results based on simulations is very small, which shows that the Bloch constitutive parameter formula derived in the paper is very effective to describe the electromagnetic properties of the periodic magnetic resonant material. These theoretical formulas will provide important theoretical basis for the interpretation of the magnetic resonance phenomenon, the design and optimization of the periodic magnetic resonant material.

Keywords: periodic structure, magnetic resonance, Bloch constitutive parameters, surface magnetic current

PACS: 41.20.Jb, 42.25.Bs, 41.20.-q

DOI: 10.7498/aps.62.104105

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 60971029, 60872034, 61271028).

† Corresponding author. E-mail: xxh_rific@hotmail.com