

权重分布对加权局域世界网络动力学同步的影响*

戴存礼 吴威 赵艳艳 姚雪霞 赵志刚†

(南京农业大学工学院, 南京 210031)

(2012年7月17日收到; 2012年12月19日收到修改稿)

加权网络可以更细致地刻画复杂系统中两节点之间的相互作用, 所以加权网络也比无权网络更接近真实的复杂系统. 改变权重分布来调节和改善复杂网络的性质也成为一种新的研究方法. 基于现有无权网络同步的概念, 应用特征值比 R 来衡量加权局域世界网络的同步能力, 发现权重分布对加权局域世界网络的同步能力有很重要的影响, 权重分布越均匀, 网络的同步能力就越大.

关键词: 权重分布, 局域世界, 加权网络, 同步

PACS: 89.75.Fb, 89.75.Da, 89.75.Hc

DOI: 10.7498/aps.62.108903

1 引言

自然界中存在的大量复杂系统都可以通过形形色色的复杂网络加以描述^[1,2], 而复杂网络的诸多统计特征中最重要的是小世界 (small world) 效应^[3,4]和无标度 (scale free) 特性^[5,6]. 同步是宇宙中很普遍的一种现象, 研究复杂网络同步的目的之一就是认识网络的拓扑结构如何影响加在其上的动力学过程如交通堵塞^[7-9]、疾病传播^[10]等等, 以方便人们更好地控制网络的同步. 已有很多关于复杂网络同步与网络的度分布^[11,12]、聚类系数^[13-18]、平均距离^[15]之间关系的研究. 但以上研究都针对的是无权网络, 无权网络是真实网络的一种简化, 这种网络结构只有节点和边组成, 有边连接的两节点之间的相互作用强度是完全相同的, 但在许多真实的复杂系统中, 节点之间的相互作用强度是不同的, 如果让相互作用强度大的两节点之间连边的权重较大, 这样加权网络就可以更精确地刻画复杂系统中两节点之间的相互作用, 比无权网络更接近真实的复杂系统. 所以近几年对加权网络的研究是复杂网络研究的热点, 有研究者提出了一种具有年龄特征的局域世界加权网络^[19], 并研究了

有扩展连接的加权局域世界网络的动力学行为^[20]. 本文以加权局域世界模型^[21]为例研究了加权网络^[22-27]的权重分布与动力学同步之间的关系, 发现权重分布越均匀, 该网络的动力学同步能力就越强.

2 网络构建

2.1 无权局域世界模型的构建

1) 构建一个由 m_0 个节点很少边连接的初始网络结构;

2) 每一时间步长, 从现有的无权网络中随机选取 M 个节点组成新增节点的局域世界;

3) 增加一个具有 m 条边的新增节点到第 2) 步确定的局域世界中, 其中的偏好选择概率为 $P_{n \rightarrow i} = \frac{M}{(t+m_0)} \frac{k_i}{\sum_{j \in \Lambda_i} k_j}$ (Λ_i 是节点 i 的近邻节点的集合), 经过 t 步时间步长后, 就可以得到具有 $N = t + m_0$ 个节点 mt 条边的无权网络.

2.2 加权局域世界模型的构建

1) 构建一个由 m_0 个节点, 很少边连接的初始加权网络结构, 边权设定为 $w_0 = 1$;

* 国家自然科学基金 (批准号: 11247218)、江苏省农机基金 (批准号: Gxz10008) 和南京农业大学人才启动基金 (批准号: RCQD10-02) 资助的课题.

† 通讯作者. E-mail: zhaozhigang716@163.com

2) 每一时间步长, 从现有的加权网络中随机选取 M 个节点组成新增节点的局域世界;

3) 增加一个具 m 条边的新增节点到第 2) 步确定的局域世界中, 其中的偏好选择概率为 $P_{n \rightarrow i} = M/(t+m_0)s_i / \sum_{j \in A_i} s_j$;

4) 权重演化分为模式 I、模式 II, 具体如下.

权重演化模式 I: 每一条新增边 ($n \rightarrow i$) 的边权初始值设定为 $w_0 = 1$, 新边的加入会改变整个网络的权重分布, 为了简化问题, 假设节点 i 上新边的加入只改变与节点 i 相邻节点的权重, 规则为 $w_{ij} \rightarrow w_{ij} + \Delta w_{ij}$, 其中 Δw_{ij} 依赖于本地动力学, 是一个与边权 w_{ij} 、连通性、或者节点 i 的权重有关的函数, 假设新边的加入会使整个加权网络的边权增加 σ (σ 为常数), 增加的边权按 $\Delta w_{ij} = \sigma_i \cdot \frac{w_{ij}}{s_i}$ ($s_i = \sum_{j \in A_i} w_{ij}$) 分配到各边, 权重更新后, 返回第 2) 步直到达到所需的网络规模; 权重演化模式 II: 假设整个加权网络的权重增加速度为一个离散的常数 W , 因此, 每一时间步长, 节点 i 的权重变化量 $\Delta W_i = W \frac{s_i}{\sum_{j \in A_i} s_j}$, ΔW_i 按照 w_{ij}/s_i 的比例优先选择那些边权较大的邻居节点, 权重更新后, 返回第 2) 步直到达到所需的网络规模.

3 加权网络的同步

研究加权网络的动力学同步与无权网络类似, 采取研究节点与节点间耦合矩阵特征值比的办法. 如果在加权网络的每个节点上加上一个动力学系统, 这个动力学系统既可以是极限环也可以是混沌的; 让有边相连的两个节点的动力学系统之间存在相互的耦合作用, 就形成了一个动力学加权网络. 严格地说, 设加权网络有 N 个节点, 第 i 个节点在 n 时刻的 m 维状态变量是 $x^i(n)$, 单个节点在不考虑耦合作用时满足的状态方程是 $x^i(n+1) = F(x^i(n))$. 设 H 是每个节点状态变量的函数, 用于对其他节点进行耦合. 存在耦合作用的情况下, 第 i 个节点所满足的状态方程表示为

$$\dot{x}^i(n+1) = F(x^i(n)) + \eta \sum_{j=1}^N G_{ij} H(x^j),$$

对于连续系统, 第 i 个节点所满足的状态方程为

$$\dot{x}^i = F(x^i) + \eta \sum_{j=1}^N G_{ij} H(x^j),$$

这里 η 是耦合强度, G_{ij} 表示耦合矩阵 G 的矩阵元,

$$G_{ij} = \begin{cases} s_i & (i=j) \\ -w_{ij} & (j \in A_i), \\ 0 & (\text{其他}) \end{cases}$$

式中 s_i ($s_i = \sum_{j \in A_i} w_{ij}$) 是节点 i 的权重, w_{ij} 是节点 i 到 j 的边权, 耦合矩阵 G 包含了加权网络结构的全部信息. 在耦合作用下, 经过一段时间的演化, 使得 $x^1 = x^2 = \dots = x^N = s$, 加权网络就进入了同步状态. 由于加权网络的耦合矩阵是实对称拉普拉斯矩阵, 它有且仅有一个重数为 1 的零特征根 θ_0 , 所以局域世界加权网络是无向图, 且网络拓扑结构是连通的, 而其余的特征值均为非负实数, 因此特征值按大小可排列为 $\theta_0 \leq \theta_1 \leq \dots \leq \theta_{N-1}$. 最大特征值 θ_{N-1} 与最小非零特征值 θ_1 的比值可以衡量加权网络的同步能力, 如果耦合矩阵的特征值比 $R = \theta_{N-1}/\theta_1$ 满足

$$R < \alpha_2/\alpha_1, \quad (1)$$

加权网络就达到同步状态. (1) 式右边 α_2/α_1 是由单个节点的状态方程和变量的耦合方式决定的, 左边是特征值比 R , R 仅依赖于拉普拉斯矩阵. 由 (1) 式可知, 在 α_2/α_1 一定的情况下, 特征值比可以描述加权网络的同步能力, 其值越小, (1) 式越容易成立, 它能使更多的动力学系统同步, 我们说这样的加权网络同步能力强. 在本文中, 我们不讨论具体的动力学系统, 而是重点研究加权网络权分布与同步能力间的关系, 所以只研究 R 的大小, R 越小加权网络的同步能力越强.

4 数值模拟

图 1—12 是加权局域世界网络的边权分布 $P(w)$ 及特征值比 R 的数值模拟结果, 图中每一数据点都是 20 次独立运行结果的平均值.

因为加权局域世界网络构建过程中, 每一时间步长都是从现有的网络中随机选取 M 个节点组成新增节点的局域世界, 而 M 的取值分为 $M = m$, $m < M < t + m_0$ 和 $M = t + m_0$ 三种情况. 当 $M = m$ 时, 新加入节点选择全部局域世界的 M 个节点建立 m 条连接, 此时偏好选择机制将不再起作用; 当 $M = t + m_0$ 时, 意味着新增节点之前的所有节点都是局域节点, 所以数值模拟时也分别研究了 $M = m$, $m < M < t + m_0$ 和 $M = t + m_0$ 这三种情况.

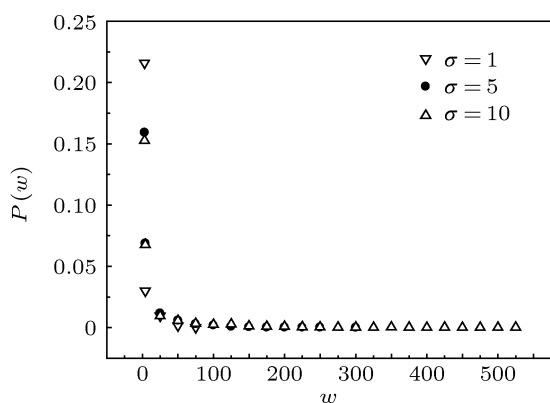


图1 第I种演化模式下, $\sigma = 1, 5, 10$ 时的权重分布, 其他参数为 $N = 1000, m = 3, M = 3, m_0 = 10$

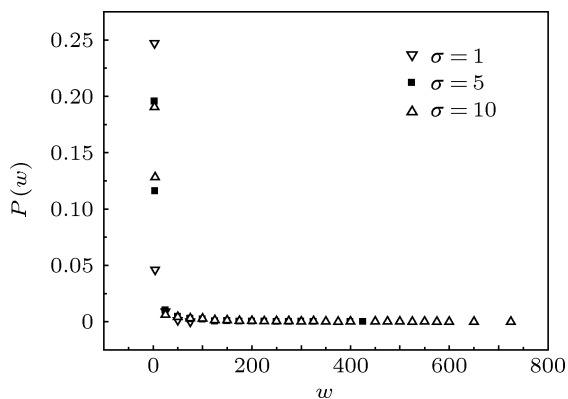


图2 第I种演化模式下, $\sigma = 1, 5, 10$ 时的权重分布, 其他参数为 $N = 1000, m = 3, M = 5, m_0 = 10$

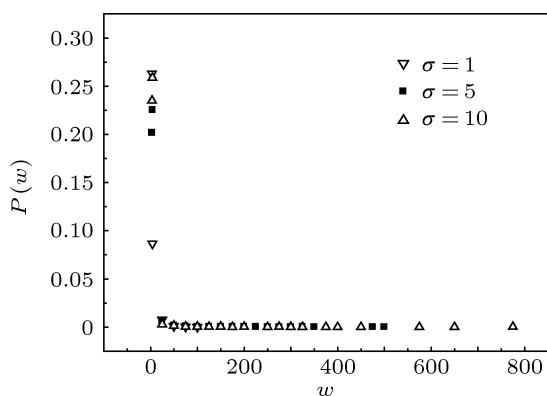


图3 第I种演化模式下, $\sigma = 1, 5, 10$ 时的权重分布, 其他参数为 $N = 1000, m = 3, M = t + m_0, m_0 = 10$

图1—图3是第I种权重演化模式下, $N = 1000, m = 3, m_0 = 10, M$ 分别为 $3, 5, t + m_0, \sigma$ 取 $1, 5, 10$ 时的边权 $P(w)$ 分布图. 图1—图3表明, $N = 1000, m = 3, m_0 = 10$ 都相同时, M 虽然不同, 但边权 $P(w)$ 的分布规律基本相同, 边权 $w = 3$ 的节点最多 (因为 $m = 3$), 之后节点数目随着边权的增加而迅速减小, 当 w 增加到一定值时, 节点数目

减少得非常缓慢. 具体分析如下: 图1中, 当 $\sigma = 1$ 时, 有 21.6% 的节点边权为 3, 2.98% 的节点边权为 4, 0.95% 的节点边权为 25, 0.14% 的节点边权为 50, 0.01% 的节点边权为 75, 所有节点的边权集中在 3—75 之间. 当 $\sigma = 5$ 时, 边权范围扩大到 3—300, 当 $\sigma = 10$ 时, 最大的边权达到 525, 而图2中, 当 $\sigma = 1$ 时, 所有的边权集中在 3—75 之间, 当 $\sigma = 5$ 时, 边权范围扩展到 3—425, 当 $\sigma = 10$ 时, 最大的边权竟然达到 725, 图3也有类似的结果. 图1—3的结果表明, M 相同的条件下, 权重分布范围随 σ 的增加而增加, 最大边权和最小边权之差越来越大, 权重分布范围的增加将导致权重分布越来越不均匀, 其他参数相同 M 越大时, 权重分布也越来越不均匀.

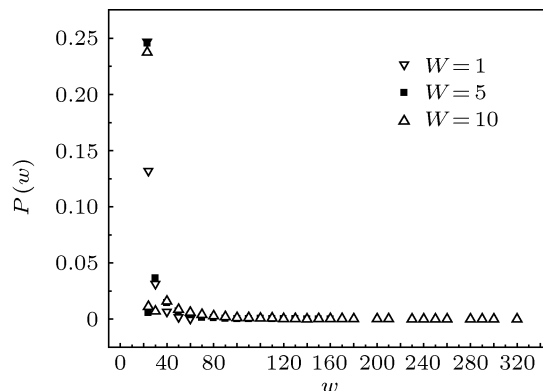


图4 第II种权重演化模式下, $W = 1, 5, 10$ 时的权重分布, 其他参数为 $N = 1000, m = 3, M = 3, m_0 = 10$

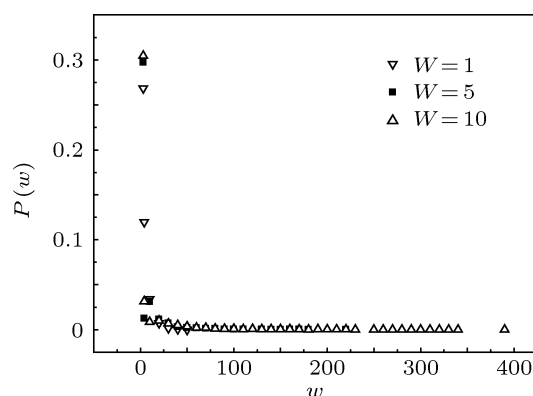


图5 第II种权重演化模式下, $W = 1, 5, 10$ 时的权重分布, 其他参数为 $N = 1000, m = 3, M = 5, m_0 = 10$

图4—图6是第II种权重演化模式下, M 分别为 $3, 5, t + m_0$ 时, W 取 $1, 5, 10$ 时的边权 $P(w)$ 分布图, 其他参数为 $N = 1000, m = 3, m_0 = 10$. 图3—6的结果与图1—3类似. M 相同的条件下, 权重分布范围随 W 的增加而增加, 权重分布范围增加也导

致权重分布越来越不均匀; 同样其他参数相同, M 越大时, 权重分布也越来越不均匀. 之所以出现以上结果是因为 σ 或 W 增加时, 每一时间步长权重增加值将增大, 虽然当 $M = m = 3$ 时偏好选择机制不起作用, 但前边节点被选中的概率比后面节点大, 所以权重会主要集中在前面的节点上. 当 $M \neq m$ 时, σ 或 W 越大, 择优选择机制将更加导致边权集中在权重较大的节点上, 使得权重分布越来越不均匀. 而随着局域世界 M 的增大, 新增节点连 m 条边时的选择范围扩大, 但是因为连接时遵从相应的偏好选择机制 (即选择权重较大节点的概率较大), 长期偏好选择的结果势必导致权重越来越集中到权重较大的节点上, 最终也导致权重分布越来越不均匀, 而当 $M = m = 3$ 时偏好选择机制将不起作用, 此时的边权分布也较之最均匀. 所以无论哪种权重演化模式, 增加 σ , W 和 M , 都会让权重分布范围增加, 分布越不均匀.

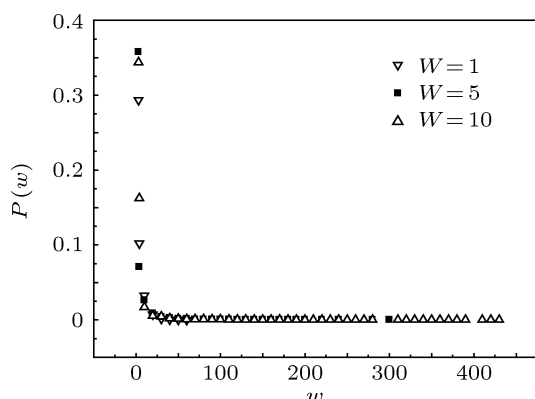


图6 第II种演化模式下, $W = 1, 5, 10$ 时的权重分布, 其他参数为 $N = 1000, m = 3, M = t + m_0, m_0 = 10$

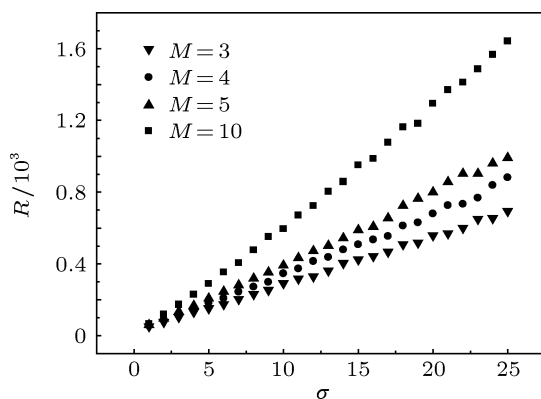


图7 第I种权重演化模式下, $M = 3, 4, 5, 10$ 时 R 与 σ 间的关系, 其他参数为 $N = 1000, m = 3, m_0 = 10$

图7和图8是第I种权重演化模式下, M 分别为3, 4, 5, 10和 $M = t + m_0$ 时特征值比 R 与 σ 之

间的关系图. 从图7中可以看出, 当 σ 从1增大到25时, $M = 3$ 时 R 从51.56增加到694.89, $M = 4$ 时 R 从55.83增加到881.22, $M = 5$ 时 R 从59.63增加到991.54, $M = 10$ 时 R 从64.49增加到1641.10, 说明 R 随 σ 的增加而增加, 同时也随 M 的增加而增大. 图8结果与图7类似, $M = t + m_0$ 时, R 从73.63增加到13899.00. 图7和图8的结果表明, σ 恒定时, M 越大 R 越大, 而当 M 恒定时, σ 越大 R 也越大. 因为增加 σ 和 M 会导致网络权分布不均匀, 说明网络权分布越均匀, 同步能力越强.

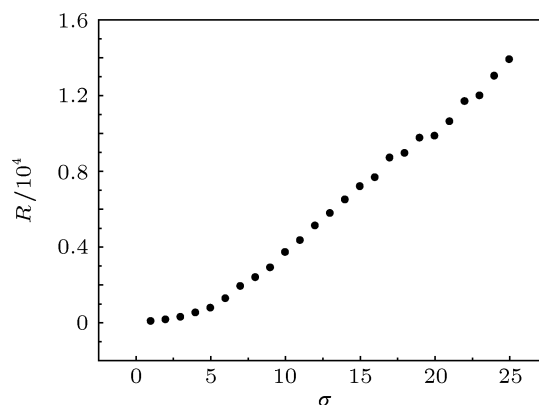


图8 第I种权重演化模式下, $M = t + m_0$ 时 R 与 σ 间的关系, 其他参数为 $N = 1000, m = 3, M = 3, m_0 = 10$

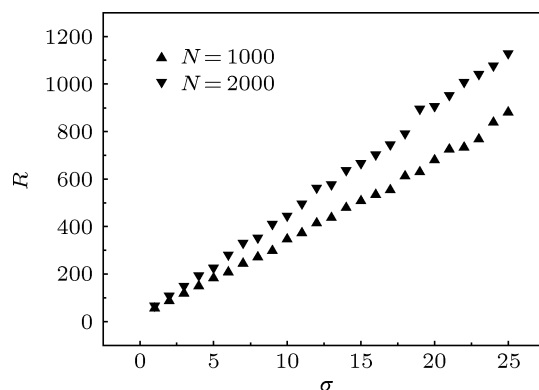


图9 第I种权重演化模式下, $N = 1000, 2000$ 时 R 与 σ 间的关系, 其他参数为 $m = 3, M = 4, m_0 = 10$

图9是第I种权重演化模式下, 网络规模 $N = 1000, 2000$ 时特征值比 R 与 σ 间的关系图, 其他参数为 $m = 3, M = 4, m_0 = 10$. 当 $N = 1000$ 时, R 从55.83增加到881.22, 而当 $N = 2000$ 时, R 从66.7增加到1129.10, 说明网络规模越大时 R 也随之增大, 因为规模增大时择优选择机制作用时间更长, 权重就会越向权重较大的节点集中, 使得网络的权分布更加不均匀, 所以特征值比 R 就越来越大, 网络的同步能力减弱. 图10和图11是第II种权重

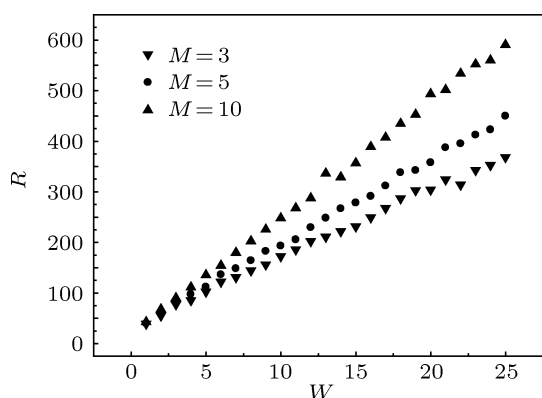


图 10 第 II 种权重演化模式下, $M = 3, 5, 10$ 时 R 与 W 间的关系, 其他参数为 $N = 1000, m = 3, m_0 = 10$

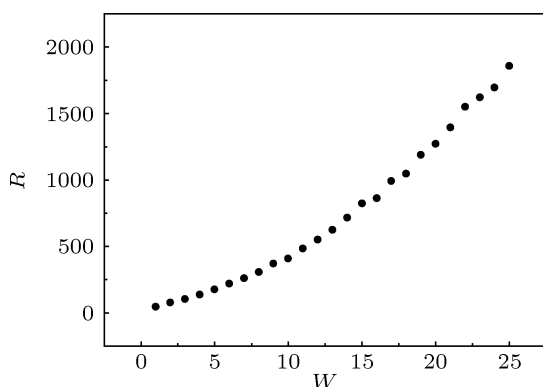


图 11 第 II 种权重演化模式下, $M = t + m_0$ 时 R 与 W 间的关系, 其他参数为 $N = 1000, m = 3, m_0 = 10$

演化模式下, M 分别为 3, 5, 10 和 $M = t + m_0$ 时特征值比 R 与 W 之间的关系图, 结果与图 7 和图 8 类似, M 恒定时, R 随 W 的增加而增加, 而 W 不变时, M 越大 R 也越大. 图 12 是第 II 种权重演化模式下, 网络规模 $N = 1000, 2000$ 时特征值比 R 与 W 间的关系, 其他参数为 $m = 3, M = 5, m_0 = 10$. 该图结果

与第 I 种权重演化模式下的结果相同. 图 7—12 的结果说明, 不论哪种权重演化模式, 特征值比 R 与加权局域世界网络的权分布密切相关, 无论何种情况, 权分布越均匀时, 特征值比 R 就会越小, 网络的同步能力也就越强.

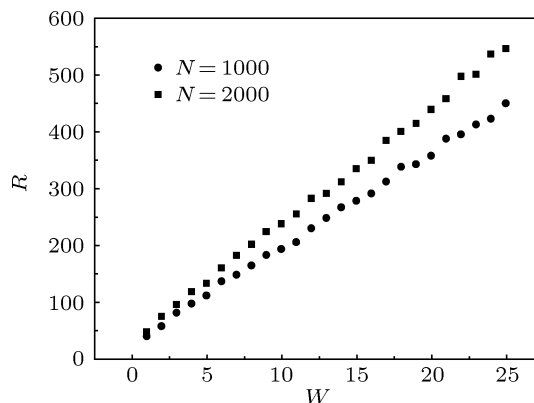


图 12 第 II 种权重演化模式下, $N = 1000, 2000$ 时 R 与 W 间的关系, 其他参数为 $m = 3, M = 5, m_0 = 10$

5 结论

通过对加权局域世界网络权分布与动力学同步之间的关系研究, 结果表明加权局域世界网络的动力学同步能力和权分布密切相关, 权分布越均匀时同步能力越强, 反之越弱. 现实中的很多复杂系统都是加权网络, 所以本文的研究结果对研究真实的复杂相互作用有重要的意义, 可以指导我们在设计赋权方式时应尽可能使权分布均匀, 以达到提高同步能力的目的. 但以上结论是以加权局域世界模型为例得到的, 所以结果有一定的局限性, 是否所有的加权网络的动力学同步与权分布都有相同的规律, 还有待进一步研究.

- [1] Albert R, Barabási A L 2002 *Rev. Mod. Phys.* **74** 47
- [2] Newman M E J 2003 *SIAM Rev.* **45** 167
- [3] Watts D J, Strogatz S H 1998 *Nature* **393** 440
- [4] Milgram S 1967 *Psychol. Today* **1** 61
- [5] Barabási A L, Albert R 1999 *Science* **286** 509
- [6] Barabási A L, Albert R, Jeong H 1999 *Physica A* **272** 173
- [7] Tadić B, Thurner S, Rodgers G J 2004 *Phys. Rev. E* **69** 036102
- [8] Zhao L, Lai Y C, Park K, Ye N 2005 *Phys. Rev. E* **71** 026125
- [9] Yan G, Zhou T, Hu B, Fu Z Q, Wang B H 2006 *Phys. Rev. E* **73** 046108
- [10] Pastor-Satorras R, Vespignani A 2001 *Phys. Rev. Lett.* **86** 3200
- [11] Nishikawa T, Motter A E, Lai Y C, Hoppensteadt F C 2003 *Phys. Rev. Lett.* **91** 014101
- [12] Motter A E, Zhou C S, Kurths J 2005 *Phys. Rev. E* **71** 016116
- [13] Wu X, Wang B H, Zhou T, Wang W X, Zhao M, Yang H J 2006 *Chin. Phys. Lett.* **23** 1046
- [14] McGraw P N, Menzinger M 2005 *Phys. Rev. E* **72** 015101
- [15] Zhou T, Zhao M, Wang B H 2006 *Phys. Rev. E* **73** 037101
- [16] Zhao M, Zhou T, Wang B H, Yan G, Yang H J, Bai W J 2006 *Physica A* **371** 773
- [17] Dai C L, Liu S E, Tian L, Shi D N 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 4800 (in Chinese) [戴存礼, 刘曙娥, 田亮, 施大宁 2008 物理学报 **57** 4800]
- [18] Dai C L, Zhao Y Y, Wu W, Zeng L W 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 7719 (in Chinese) [戴存礼, 赵艳艳, 吴威, 曾伦武 2010 物理学报 **59** 7719]
- [19] Wen G H, Duan Z S, Chen G R, Geng X M 2011 *Physica A* **390** 4012
- [20] Wen G H, Duan Z S 2009 *Int. J. Modern Phys. C* **20** 1719
- [21] Pan Z F, Li X, Wang X F 2006 *Phys. Rev. E* **73** 056109
- [22] Tian L, Di Z R, Yao H 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 028901 (in Chinese) [田柳, 狄增如, 姚虹 2011 物理学报 **60** 028901]
- [23] Wang D, Jing Y W, Hao B B 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 170513 (in Chinese) [王丹, 井元伟, 郝彬彬 2012 物理学报 **61** 170513]

- [24] Zhang C, Shen H Z, Yang H Q, Li F 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 148902
(in Chinese)[张聪, 沈惠璋, 杨何群, 李峰 2012 物理学报 **61** 148902]
[25] Liu S, Lü X, Li G 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 160507 (in Chinese) [柳爽,
吕翎, 李钢 2012 物理学报 **61** 160507]
[26] Hao C Q, Wang J, Deng B, Wei X L 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 148901

- (in Chinese) [郝崇清, 王江, 邓斌, 魏熙乐 2012 物理学报 **61** 148901]
[27] Lü L, Shang J Y, Zhu J B, Shen N, Liu S, Zhang Xin 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 140504 (in Chinese) [吕翎, 商锦玉, 朱佳博, 沈娜, 柳爽, 张新
2012 物理学报 **61** 140504]

Effect of weight distribution on the synchronization of weighted generalized local-world networks*

Dai Cun-Li Wu Wei Zhao Yan-Yan Yao Xue-Xia Zhao Zhi-Gang[†]

(College of Engineering, Nanjing Agricultural University, Nanjing 210031, China)

(Received 17 July 2012; revised manuscript received 19 December 2012)

Abstract

Weighted networks can give the detailed description of interaction between the agents of complex systems, so weighted networks is more resemble real-networks than unweighted networks. It is a new way to improve the properties of complex networks by adjusting the weight distribution. Based on the synchronization of unweighted complex networks, the synchronizability of weighted generalized local-world networks can be measured by eigenratio R . We find that weight distribution has an important effect on the synchronization of weighted generalized local-world networks. The uniform weight distribution will lead to better synchronizability.

Keywords: weight distribution, generalized local-world, weighted networks, synchronization

PACS: 89.75.Fb, 89.75.Da, 89.75.Hc

DOI: 10.7498/aps.62.108903

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 11247218), the Agricultural Mechanical Fund of Jiangsu Province, China (Grant No. Gxz10008) and the Starting Research Project of Importing Talented Teachers in Nanjing Agricultural University, China (Grant No. RCQD10-02).

[†] Corresponding author. E-mail: zhaozhigang716@163.com