弱非完整系统 Mei 对称性导致的新型精确和近似守恒量*

韩月林 王肖肖 张美玲 贾利群†

(江南大学理学院, 无锡 214122)

(2012 年 12 月 28 日收到; 2013 年 1 月 23 日收到修改稿)

研究弱非完整系统 Lagrange 方程的 Mei 对称性导致的一种结构方程和新型精确以及近似守恒量. 首先建立系统的 Lagrange 方程. 其次在群的无限小变换下, 给出了弱非完整系统及其一次近似系统 Mei 对称性的定义和判据, 然后得到了 Mei 对称性导致的新型结构方程、新型精确和近似守恒量的表达式. 最后, 举例研究系统的精确新型守恒量和近似新型守恒量问题.

关键词: 弱非完整系统, Mei 对称性, 新型结构方程, 新型守恒量

PACS: 02.20.Sv, 11.30.−j, 45.20.Jj **DOI:** 10.7498/aps.62.110201

1 引 言

在力学研究中, 动力学系统的守恒量起着非常重要的作用, 甚至在系统的运动微分方程是不可积分的情况下, 某个守恒量的存在也可以使我们对所研究的局部物理状态有所了解. 因此, 利用对称性的方法寻找新型守恒量也成为了力学领域的热门课题. 非完整系统动力学的研究具有重要的理论意义和应用价值, 并在近些年取得了很大的进步 [1−5]. 有一种约束方程中含有一个小参数的特殊非完整系统, 称为弱非完整系统. 当小参数等于零时, 该系统变成完整系统. 对于弱非完整系统, 文献 [6—8] 分别讨论了它的运动方程、近似解、正则变换和稳定性. 1918 年, Noether 揭示了力学系统对称性与守恒量间的潜在关系 [9]. 2000 年, 梅凤翔提出了力学系统中的动力学函数经无限小变换后仍满足原方程的一种对称性 [10], 人们称之为 Mei 对称性. 此后, Mei 对称性逐渐成为分析力学界的一个研究热点 [11−18]. 作为分析力学三大力学体系之一的 Lagrange 体系, 其 Lagrange 方程的对称性和守恒量的研究近年来也有一定的进展 [19−23]. 近 20 年, 中国学者在约束力学系统的对称性和守恒量的研究方面取得了很大的成果 [24−35]. 但是, 这些成果的计算较为繁琐, 为简化计算, 国内外学者们开始寻找结构简单、便于求解的 Mei 对称性的新型结构方程和新型守恒量 [36−41]. 本文主要研究弱非完整系统 Lagrange 方程的 Mei 对称性导致的新型结构方程、新型精确和近似守恒量的表达式, 并通过一个简例说明本文理论结果的应用.

2 弱非完整系统的运动微分方程

假设力学系统的位形由 n 个广义坐标 q_s $(s=1,2,\dots,n)$ 来确定, 它的运动受有 g 个理想双面线性非完整方程

$$f_\beta = \dot q_{\varepsilon+\beta} - \mu B_{\varepsilon+\beta,\delta}(q_s,t)\dot q_\delta = 0$$
$$(\beta=1,2,\dots,g;\delta=1,2,\dots,\varepsilon;$$
$$\varepsilon=n-g;s=1,2,...,n) \tag{1}$$

的约束. 其中 μ 是一个小参数. 当 $\mu=0$ 时, 约束方程 (1) 变为完整约束方程, 当 $\mu=1$ 时, 约束方程 (1) 变为非完整约束方程. 系统的运动微分方程可以表

* 国家自然科学基金 (批准号: 11142014) 和江苏省普通高校研究生科研创新计划项目 (批准号: CXLX12_0720) 资助的课题.

† 通讯作者. E-mail: jlq0000@163.com

示为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}-\frac{\partial L}{\partial q_s}=Q_s+\lambda_\beta\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s}. \tag{2}$$

其中 $L=L(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$ 为 Lagrange 函数, $Q_s=Q_s(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$ 为非势广义力, λ_β 为 Lagrange 乘子.

设系统非奇异, 即

$$\det\left(\frac{\partial^2 L_r}{\partial \dot{q}_s\partial \dot{q}_k}\right)\neq 0,$$

则由方程 (1) 和 (2) 可求出所有的 λ_β, λ_β 是关于 $t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}$ 和 μ 的函数.

方程 (2) 可以写成

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}-\frac{\partial L}{\partial q_s}=Q_s+\Lambda_s. \tag{3}$$

方程 (3) 称为与弱非完整系统 (1) 和 (2) 相应的完整系统的方程. 其中

$$\Lambda_s=\Lambda_s(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},t,\mu)=\lambda_\beta\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s}. \tag{4}$$

为广义约束力. 只要运动的初始条件满足约束方程 (1), 则与弱非完整系统 (1), (2) 相应的完整系统 (3) 的解就给出弱非完整系统的运动. 引进 Euler 算子

$$E_s=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_s}-\frac{\partial}{\partial q_s}\quad (s=1,2,\cdots,n). \tag{5}$$

则方程 (3) 可表示为

$$E_s(L)=Q_s+\Lambda_s. \tag{6}$$

为了讨论弱非完整系统的近似解, 我们把广义约束力 Λ_s 扩展成关于参数 μ 的一系列动力学式子

$$\Lambda_s=\Lambda_{s0}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},t)+\mu\Lambda_{s1}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},t)+\mu^2\Lambda_{s2}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},t)+\cdots \tag{7}$$

于是我们得到了方程 (3) 的一次近似为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}-\frac{\partial L}{\partial q_s}=Q_s+\Lambda_{s0}+\mu\Lambda_{s1}. \tag{8}$$

则方程 (8) 可表示为

$$E_s(L)=Q_s+\Lambda_{s0}+\mu\Lambda_{s1}. \tag{9}$$

同时, 从方程 (3) 可解出所有的广义加速度, 记作

$$\ddot{q}_s=\alpha_s(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},t,\mu). \tag{10}$$

由方程 (8), 有

$$\ddot{q}_s=\alpha_{s0}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},t)+\mu\alpha_{s1}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},t). \tag{11}$$

3 Mei 对称性的定义与判据

引入时间和广义坐标的无限小变换方程

$$\begin{aligned}t^* &=t+\varepsilon\xi_0(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}),\\ q_s^*(t^*) &=q_s(t)+\varepsilon\xi_s(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}).\end{aligned} \tag{12}$$

其中 ε 为无限小参数, ξ_0 和 ξ_s 为无限小变换生成元.

假设经无限小变换 (12) 后, 函数 L、Q_s、Λ_s 和 f_β 分别变为 L^*、Q_s^*、Λ_s^* 和 f_β^*. 于是, 有

$$\begin{aligned}L^* &=L(\boldsymbol{q}^*,\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{q}^*}{\mathrm{d}t^*},t^*)\\ &=L(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},t)+\varepsilon X^{(1)}(L)+O(\varepsilon^2),\\ Q_s^* &=Q_s(\boldsymbol{q}^*,\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{q}^*}{\mathrm{d}t^*},t^*)\\ &=Q_s(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},t)+\varepsilon \mathrm{X}^{(1)}(Q_s)+O(\varepsilon^2),\\ \Lambda_s^* &=\Lambda_s(\boldsymbol{q}^*,\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{q}^*}{\mathrm{d}t^*},t^*)\\ &=\Lambda_s(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},t)+\varepsilon X^{(1)}(\Lambda_s)+O(\varepsilon^2),\\ f_\beta^* &=f_\beta(\boldsymbol{q}^*,\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{q}^*}{\mathrm{d}t^*},t^*)\\ &=f_\beta(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},t)+\varepsilon X^{(1)}(f_\beta)+O(\varepsilon^2),\end{aligned} \tag{13}$$

其中

$$X^{(1)}=\xi_0\frac{\partial}{\partial t}+\xi_s\frac{\partial}{\partial q_s}+\left(\frac{\mathrm{d}\xi_s}{\mathrm{d}t}-\dot{q}_s\frac{\mathrm{d}\xi_0}{\mathrm{d}t}\right)\frac{\partial}{\partial \dot{q}_s}. \tag{14}$$

定义[42] 如果动力学函数经相应的变换后, 方程的形式保持不变, 则这种不变性称为 Mei 对称性.

根据定义, 方程 (3) 的 Mei 对称性为

$$E_s(L^*)=Q_s^*+\Lambda_s^*. \tag{15}$$

并且约束方程 (1) 的 Mei 对称性为

$$f_\beta\left(\boldsymbol{q}^*,\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{q}^*}{\mathrm{d}t^*},t^*\right)=0. \tag{16}$$

把 (13) 式代入方程 (15), 忽略 ε^2 及更高阶小项, 并利用方程 (3) 可得

$$E_s\left[X^{(1)}(L)\right]=X^{(1)}(Q_s)+X^{(1)}(\Lambda_s). \tag{17}$$

并对于一次近似方程 (8), 有

$$\begin{aligned}&E_s\left[X^{(1)}(L)\right]\\ =&X^{(1)}(Q_s)+X^{(1)}(\Lambda_{s0})+\mu X^{(1)}(\Lambda_{s1}).\end{aligned} \tag{18}$$

判据 1 对于与弱非完整系统 (1) 和 (2) 相对应的完整系统 (3), 如果无限小生成元 ξ_0,ξ_s 满足方程 (17), 则相关的不变性为系统 (3) 的 Mei 对称性.

弱非完整约束方程 (1) 在无限小变换 (12) 下的不变性表为如下限制方程

$$X^{(1)}\left\{f_\beta\left(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},t,\mu\right)\right\}=0. \qquad (19)$$

判据 2 对于弱非完整系统 (1) 和 (2), 如果无限小生成元 ξ_0, ξ_s 满足方程 (17) 和限制方程 (19), 则相关的不变性为系统的强 Mei 对称性.

判据 3 对于与弱非完整系统 (1) 和 (2) 相对应的一次近似完整系统 (8), 如果无限小生成元 ξ_0, ξ_s 满足方程 (18), 则相关的不变性为系统的 Mei 对称性.

判据 4 对于弱非完整系统 (1) 和 (2) 的一次近似系统, 如果无限小生成元 ξ_0, ξ_s 满足方程 (18) 和限制方程 (19), 则相关的不变性为系统的强 Mei 对称性.

4 Mei 对称性导致的新型守恒量

命题 1 如果无限小生成元 ξ_0, ξ_s 是弱非完整系统 (1) 和 (2), 或与之相应的完整系统 Lagrange 方程 (3) 的 Mei 对称性的生成元, 且存在规范函数 $G_X=G_X(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},t,\mu)$ 满足结构方程

$$\frac{\partial X^{(1)}(L)}{\partial t}-X^{(1)}\left(Q_s+\Lambda_s\right)\dot{q}_s+\frac{\mathrm{d}G_X}{\mathrm{d}t}=0, \qquad (20)$$

其中

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial}{\partial t}+\dot{q}_s\frac{\partial}{\partial q_s}+\ddot{q}_s\frac{\partial}{\partial\dot{q}_s}. \qquad (21)$$

则弱非完整系统 (1) 和 (2), 或与之相应的完整系统 Lagrange 方程 (3) 的 Mei 对称性可以导致精确新型守恒量

$$I_X=X^{(1)}\left(L\right)-\frac{\partial X^{(1)}\left(L\right)}{\partial\dot{q}_s}\dot{q}_s+G_X=\mathrm{const}. \qquad (22)$$

证明 将 (22) 式对时间 t 求导, 并利用方程 (21), 得

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}I_X=&\frac{\partial X^{(1)}(L)}{\partial t}+\frac{\partial X^{(1)}(L)}{\partial q_s}\dot{q}_s+\frac{\partial X^{(1)}(L)}{\partial\dot{q}_s}\ddot{q}_s\\&-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial X^{(1)}(L)}{\partial\dot{q}_s}\dot{q}_s-\frac{\partial X^{(1)}(L)}{\partial\dot{q}_s}\ddot{q}_s+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}G_X\\=&\frac{\partial X^{(1)}(L)}{\partial t}-E_s\left[X^{(1)}(L)\right]\dot{q}_s+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}G_X.\end{aligned} \qquad (23)$$

将判据方程 (17) 代入 (23) 式, 可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}I_X=\left\{X^{(1)}(Q_s+\Lambda_s)-E_s\left[X^{(1)}(L)\right]\right\}\dot{q}_s=0. \qquad (24)$$

证毕.

命题 2 如果无限小生成元 ξ_0, ξ_s 是弱非完整系统 (1) 和 (2), 或与之相应的完整系统 Lagrange 方程 (3) 的强 Mei 对称性的生成元, 且存在规范函数 $G_X=G_X(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},t,\mu)$ 满足结构方程 (20), 则弱非完整系统 (1) 和 (2), 或与之相应的完整系统 Lagrange 方程 (3) 的强 Mei 对称性可以导致精确新型守恒量 (22).

命题 3 如果无限小生成元 ξ_0, ξ_s 是弱非完整系统 (1) 和 (2) 或方程 (3) 相应的一次近似完整系统 Lagrange 方程 (8) 的 Mei 对称性的生成元, 且存在规范函数 $G_X=G_X(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},t,\mu)$ 满足结构方程

$$\begin{aligned}&\frac{\partial X^{(1)}(L)}{\partial t}-X^{(1)}(Q_s+\Lambda_{s0}+\mu\Lambda_{s1})\dot{q}_s+\frac{\mathrm{d}G_X}{\mathrm{d}t}\\&=0,\end{aligned} \qquad (25)$$

其中

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial}{\partial t}+\dot{q}_s\frac{\partial}{\partial q_s}+(\alpha_{s0}+\mu\alpha_{s1})\frac{\partial}{\partial\dot{q}_s}. \qquad (26)$$

则一次近似完整系统 Lagrange 方程 (8)Mei 对称性可以导致近似新型守恒量 (22).

命题 4 如果无限小生成元 ξ_0, ξ_s 是弱非完整系统 (1) 和 (2) 或方程 (3) 相应的一次近似完整系统 Lagrange 方程 (8) 的强 Mei 对称性的生成元, 且存在规范函数 $G_X=G_X(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},t,\mu)$ 满足结构方程 (25), 则一次近似完整系统 Lagrange 方程 (8) 的强 Mei 对称性可以导致近似新型守恒量 (22).

5 算 例

下面, 我们将给出一个例子说明以上结果的应用.

在弱非完整系统中, 一单位质量的质点在垂直于地球表面的二维空间内运动, 其 Lagrange 函数、广义力和弱非完整约束方程分别为

$$L=\frac{1}{2}(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2)-q_1, \qquad (27)$$

$$Q_1=Q_2=0, \qquad (28)$$

$$f=\dot{q}_2-\mu t\dot{q}_1=0. \qquad (29)$$

研究系统的 Mei 对称性与新型守恒量.

将 (27)—(29) 式代入方程 (2) 可得

$$\ddot{q}_1+1=-\lambda\mu t, \quad \ddot{q}_2=\lambda. \qquad (30)$$

由 (29) 和 (30) 式得

$$\lambda=\frac{\mu\dot{q}_1-\mu t}{1+\mu^2t^2}. \qquad (31)$$

因此得

$$\ddot{q}_1+1=-\frac{\mu^2t\dot{q}_1-\mu^2t^2}{1+\mu^2t^2},\quad \ddot{q}_2=\frac{\mu\dot{q}_1-\mu t}{1+\mu^2t^2}. \tag{32}$$

做计算有

$$\begin{aligned}X^{(1)}(L)=&-\xi_1+\left(\dot{\xi}_1-\dot{q}_1\dot{\xi}_0\right)\dot{q}_1\\&+\left(\dot{\xi}_2-\dot{q}_2\dot{\xi}_0\right)\dot{q}_2.\end{aligned} \tag{33}$$

$$E_1[X^{(1)}(L)]=\ddot{\xi}_1-2\ddot{q}_1\dot{\xi}_0-2\dot{q}_1\ddot{\xi}_0. \tag{34}$$

$$E_2[X^{(1)}(L)]=\ddot{\xi}_2-2\ddot{q}_2\dot{\xi}_0-2\dot{q}_2\ddot{\xi}_0. \tag{35}$$

$$\begin{aligned}Q_1+\Lambda_1=&-\frac{\mu^2t\dot{q}_1-\mu^2t^2}{1+\mu^2t^2},\\Q_2+\Lambda_2=&\frac{\mu\dot{q}_1-\mu t}{1+\mu^2t^2}.\end{aligned} \tag{36}$$

$$\begin{aligned}X^{(1)}(Q_1+\Lambda_1)=&-\xi_0\frac{\mu\dot{q}_1-\mu^3t^2\dot{q}_1-2\mu^2t}{\left(1+\mu^2t^2\right)^2}\\&-\left(\dot{\xi}_1-\dot{q}_1\dot{\xi}_0\right)\frac{\mu t}{1+\mu^2t^2},\\X^{(1)}(Q_2+\Lambda_2)=&\xi_0\frac{\mu^3t^2-2\mu^3t\dot{q}_1-\mu}{\left(1+\mu^2t^2\right)^2}\\&+\left(\dot{\xi}_1-\dot{q}_1\dot{\xi}_0\right)\frac{\mu}{1+\mu^2t^2}.\end{aligned} \tag{37}$$

Mei 对称性的判据方程 (17) 表示为

$$\begin{aligned}\ddot{\xi}_1-2\ddot{q}_1\dot{\xi}_0-2\dot{q}_1\ddot{\xi}_0=&-\xi_0\frac{\mu\dot{q}_1-\mu^3t^2\dot{q}_1-2\mu^2t}{\left(1+\mu^2t^2\right)^2}\\&-\left(\dot{\xi}_1-\dot{q}_1\dot{\xi}_0\right)\frac{\mu t}{1+\mu^2t^2},\\\ddot{\xi}_2-2\ddot{q}_2\dot{\xi}_0-2\dot{q}_2\ddot{\xi}_0=&\xi_0\frac{\mu^3t^2-2\mu^3t\dot{q}_1-\mu}{\left(1+\mu^2t^2\right)^2}\\&+\left(\dot{\xi}_1-\dot{q}_1\dot{\xi}_0\right)\frac{\mu}{1+\mu^2t^2}.\end{aligned} \tag{38}$$

由限制方程 (19) 得

$$-\xi_0\mu\dot{q}_1-\left(\dot{\xi}_1-\dot{q}_1\dot{\xi}_0\right)\mu t+\dot{\xi}_2-\dot{q}_2\dot{\xi}_0=0. \tag{39}$$

取生成元

$$\begin{aligned}\xi_0=&0,\\\xi_1=&\ln(\dot{q}_1+\mu t\dot{q}_2-\mu q_2+t),\\\xi_2=&0.\end{aligned} \tag{40}$$

将 (40) 式代入 (33), (37) 式得

$$X^{(1)}(L)=-\ln(\dot{q}_1+\mu t\dot{q}_2-\mu q_2+t). \tag{41}$$

$$X^{(1)}(Q_1+\Lambda_1)=X^{(1)}(Q_2+\Lambda_2)=0. \tag{42}$$

将 (41), (42) 式代入结构方程 (20) 得

$$G_X=\frac{\mu q_2+t}{\dot{q}_1+\mu t\dot{q}_2-\mu q_2+t}. \tag{43}$$

由规范函数 (43) 和守恒量 (22) 式给出

$$I_{X1}=1-\ln(\dot{q}_1+\mu t\dot{q}_2-\mu q_2+t). \tag{44}$$

对于一次近似系统, 由方程 (11) 可得

$$\ddot{q}_1+1=0,\quad \ddot{q}_2=\mu\dot{q}_1-\mu t. \tag{45}$$

做计算有

$$\begin{aligned}Q_1+\Lambda_{10}+\mu\Lambda_{11}=&0,\\Q_2+\Lambda_{20}+\mu\Lambda_{21}=&\mu\dot{q}_1-\mu t.\end{aligned} \tag{46}$$

$$\begin{aligned}X^{(1)}\left(Q_1+\Lambda_{10}+\mu\Lambda_{11}\right)=&0,\\X^{(1)}\left(Q_2+\Lambda_{20}+\mu\Lambda_{21}\right)=&-\xi_0\mu+\left(\dot{\xi}_1-\dot{q}_1\dot{\xi}_0\right)\mu.\end{aligned} \tag{47}$$

由 Mei 对称性的判据方程 (18), 得

$$\begin{aligned}\ddot{\xi}_1-2\ddot{q}_1\dot{\xi}_0-2\dot{q}_1\ddot{\xi}_0=&0,\\\ddot{\xi}_2-2\ddot{q}_2\dot{\xi}_0-2\dot{q}_2\ddot{\xi}_0=&-\xi_0\mu+\left(\dot{\xi}_1-\dot{q}_1\dot{\xi}_0\right)\mu.\end{aligned} \tag{48}$$

由限制方程 (19) 得

$$-\xi_0\mu\dot{q}_1-\left(\dot{\xi}_1-\dot{q}_1\dot{\xi}_0\right)\mu t+\dot{\xi}_2-\dot{q}_2\dot{\xi}_0=0. \tag{49}$$

取生成元

$$\xi_0=0,\quad \xi_1=\ln\left(\dot{q}_1+t\right),\quad \xi_2=0. \tag{50}$$

将 (50) 式代入 (33), (47) 式得

$$X^{(1)}(L)=-\ln\left(\dot{q}_1+t\right), \tag{51}$$

$$\begin{aligned}&X^{(1)}\left(Q_1+\Lambda_{10}+\mu\Lambda_{11}\right)=X^{(1)}\left(Q_2+\Lambda_{20}+\mu\Lambda_{21}\right)\\&=0.\end{aligned} \tag{52}$$

将 (51), (52) 式代入结构方程 (25) 得

$$G_X=\frac{t}{\dot{q}_1+t}. \tag{53}$$

由规范函数 (53) 和守恒量 (22) 式给出

$$I_{X2}=1-\ln\left(\dot{q}_1+t\right). \tag{54}$$

根据命题 2 和命题 4 可知, I_{X1} 是弱非完整系统 Lagrange 方程的强 Mei 对称性导致的精确新型守恒量, I_{X2} 是弱非完整系统 Lagrange 方程的强 Mei 对称性导致的近似新型守恒量.

根据方程 (32), 将表达式 (54) 对 t 求导数, 得

$$\begin{aligned}\dot{I}_{X2}=&-\frac{\ddot{q}_1+1}{\dot{q}_1+t}=\frac{\dfrac{\mu^2t\dot{q}_1-\mu^2t^2}{1+\mu^2t^2}}{\dot{q}_1+t}\\=&\frac{\mu^2t\dot{q}_1-\mu^2t^2}{\left(1+\mu^2t^2\right)\left(\dot{q}_1+t\right)}=O\left(\mu^3\right).\end{aligned} \tag{55}$$

所以 I_{X2} 是弱非完整系统 Lagrange 方程的强 Mei 对称性导致的近似新型守恒量.

6 结 论

本文提出了弱非完整系统 Lagrange 方程的 Mei 对称性导致的新型守恒量的理论, 主要研究了系统的精确新型守恒量和近似新型守恒量. 在小参数 μ 等于零或 1 时, 本文的结论自然适用于一般完整系统或非完整系统. 文中将广义约束力 Λ_s 按小参数 μ 的幂级数展开而求得近似新型守恒量的方法, 可以推广并应用于其他带小参数的力学系统和物理系统. 本文由 Mei 对称性的导致的新型守恒量也可以推广到其他约束力学系统, 并逐步成为动力学系统中通用性的守恒量. 因此, 本文所得的结果, 对完善和发展力学系统的 Mei 对称性和守恒量理论具有较大的意义.

[1] Neimark J I, Fufaev N A 1972 *Providence, RI:AMS*

[2] Bloch A M, Krishnaprasad P S, Marsden J E, Murray R M 1996 *Arch. Rat. Mech. Anal.* **136** 21

[3] Ostrovskaya S, Angels, 1998 *ASME Appl. Mech. Rev.* **51** 415

[4] Mei F X 2000 *ASME Appl. Mech. Rev.* **53** 283

[5] Zegzhda S A, Soltakhanov S K, Yushkov M P 2005 *Moscow: FIMATLIT*

[6] Mei F X 1989 *Beijing Inst. Technol.* **9** 10

[7] Mei F X 1992 *Chin. Sci. Bull.* **37** 1180

[8] Mei F X 1995 *Beijing Inst. Technol.* **15** 237

[9] Noether A E 1918 *Nachr Akad Wiss Gottingen Math. Phys.* **Kl** 235

[10] Mei F X 2000 *Beijing Inst. Technol.* **9** 120

[11] Zheng S W, Xie J F, Chen W C 2008 *Chin. Phys. Lett.* **25** 809

[12] Ge W K 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 6714 (in Chinese) [葛伟宽 2008 物理学报 **57** 6714]

[13] Cai J L 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 22 (in Chinese) [蔡建乐 2009 物理学报 **58** 22]

[14] Fang J H 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 3617 (in Chinese) [方建会 2009 物理学报 **58** 3617]

[15] Zheng S W, Xie J F, Chen X W 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 5209 (in Chinese) [郑世旺, 解加芳, 陈向伟 2010 物理学报 **59** 5209]

[16] Yang X F, Sun X T, Wang X X, Zhang M L, Jia L Q 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 111101 (in Chinese) [杨新芳, 孙现亭, 王肖肖, 张美玲, 贾利群 2011 物理学报 **60** 111101]

[17] Cai J L 2012 *Nonlinear Dyn.* **69** 487

[18] Jia L Q, Wang X X, Zhang M L Han Y L 2012 *Nonlinear Dyn.* **69** 1807

[19] Chen X W, Li Y M, Zhao Y H 2005 *Phys. Lett.* A **337** 274

[20] Luo S K 2007 *Chin. Phys. Lett.* **24** 2463

[21] Cai J L 2008 *Chin. Phys. Lett.* **25** 1523

[22] Cai J L, Mei F X 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 5369 (in Chinese) [蔡建乐, 梅凤翔 2008 物理学报 **57** 5369]

[23] Jiang W A, Li Z J, Luo S K 2011 *Chin. Phys.* B **20** 030202

[24] Xu X J, Mei F X, Qin M C 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 4021 (in Chinese) [许学军, 梅凤翔, 秦茂昌 2004 物理学报 **53** 4021]

[25] Cai J L, Luo S K, Mei F X 2008 *Chin. Phys.* B **17** 3170

[26] Cui J C, Zhang Y Y, Jia L Q 2009 *Chin. Phys.* B **18** 1731

[27] Xie Y L, Jia L Q 2010 *Chin Phys. Lett.* **27** 120201

[28] Zheng S W, Xie J F, Chen X W 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 5209 (in Chinese) [郑世旺, 解加芳, 陈向伟 2010 物理学报 **59** 5209]

[29] Li Y C, Wang X M, Xia L L 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 2935 (in Chinese) [李元成, 王小明, 夏丽莉 2010 物理学报 **59** 2935]

[30] Jia L Q, Sun X T, Zhang M L, Wang X X, Xie Y L 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 084501 (in Chinese) [贾利群, 孙现亭, 张美玲, 王肖肖, 解银丽 2011 物理学报 **60** 084501]

[31] Jiang W A, Luo S K 2012 *Nonlinear Dyn.* **67** 475

[32] Li Z J, Luo S K 2012 *Nonlinear Dyn.* **70** 1117

[33] Luo S K, Li Z J, Li L 2012 *Acta Mech.* **223** 2621

[34] Luo S K, Li Z J, Peng W, Li L 2013 *Acta Mech.* **224** 71

[35] Han Y L, Wang X X, Zhang M L, Jia L Q 2013 *Nonlinear Dyn.* **71** 401

[36] Mei F X 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 1048 (in Chinese) [梅凤翔 2003 物理学报 **52** 1048]

[37] Zhang Y, Fan C X, Ge W K 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 3644 (in Chinese) [张毅, 范存新, 葛伟宽 2008 物理学报 **53** 3644]

[38] Fang J H, Liu Y K, Zhang X N 2008 *Chin. Phys.* B **17** 1962

[39] Jia L Q, Xie Y L, Zhang Y Y, Cui J C, Yang X F 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 7552 (in Chinese) [贾利群, 解银丽, 张耀宇, 崔金超, 杨新芳 2010 物理学报 **59** 7552]

[40] Zhao L, Fu J L, Chen B Y 2011 *Chin. Phys.* B **20** 040201

[41] Han Y L, Sun X T, Wang X X, Zhang M L, Jia L Q 2012 *Chin. Phys.* B **21** 120201

[42] Mei F X 2004 *Beijing Institute of Technology Press*, Beijing

A type of the new exact and approximate conserved quantity deduced from Mei symmetry for a weakly nonholonomic system*

Han Yue-Lin Wang Xiao-Xiao Zhang Mei-Ling Jia Li-Qun†

(*School of Science, Jiangnan University, Wuxi* 214122, *China*)

(Received 28 December 2012; revised manuscript received 23 January 2013)

Abstract

A type of structural equation, new exact and approximate conserved quantity which are deduced from Mei symmetry of Lagrange equations for a weakly nonholonomic system, are investigated. First, Lagrange equations of weakly nonholonomic system are established. Next, under the infinitesimal transformations of Lie groups, the definition and the criterion of Mei symmetry for Lagrange equations in weakly nonholonomic systems and its first-degree approximate holonomic system are given. And then, the expressions of new structural equation and new exact and approximate conserved quantities of Mei symmetry for Lagrange equations in weakly nonholonomic systems are obtained. Finelly, an example is given to study the question of the exact and the approximate new conserved quantities.

Keywords: weakly nonholonomic system, Mei symmetry, new structural equation, new conserved quantity

PACS: 02.20.Sv, 11.30.−j, 45.20.Jj **DOI:** 10.7498/aps.62.110201

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 11142014), and the scientific research and innovation plan for College Graduates of Jiangsu province, China (Grant No. CXLX12_0720).

† Corresponding author. E-mail: jlq0000@163.com