

飞秒脉冲激光对纳米金属薄膜传导模型的解*

韩祥临¹⁾ 赵振江¹⁾ 程荣军^{2)†} 莫嘉琪¹⁾³⁾

1) (湖州师范学院理学院, 湖州 313000)

2) (浙江大学宁波理工学院, 宁波 315100)

3) (安徽师范大学数学系, 芜湖 241003)

(2012年11月20日收到; 2013年1月18日收到修改稿)

研究了一类飞秒脉冲激光对纳米金属薄膜传导模型. 首先求出模型的退化解, 然后利用摄动理论和方法, 得到了相应模型的任意次渐近解. 最后论述了解的渐近性态.

关键词: 飞秒脉冲, 激光, 渐近性态

PACS: 02.30.Mv

DOI: 10.7498/aps.62.110202

1 引言

当前超短波脉冲激光技术正在迅速的发展, 已经可以达到阿秒 (10^{-18} s) 量级. 飞秒 (量级 10^{-15} s) 的激光器已经十分成熟. 它在激光受控核聚变、高密度信息存储、精密器件加工、医学外科手术等领域都有广泛的应用. 同时超短脉冲技术的加工, 由于有能耗低、加工精确、避免附加加热损耗等特点, 因而广泛地应用在精密加工方面. 对于异质结场效应晶体管等微电子器件在超高频率运行时, 由于电子和声子将处于非平衡状态, 这将使微器件的热阻增大, 导致为电子器件的温度升高, 从而严重影响器件的工作性能, 因此需要对电子和声子超短脉冲激光加热金属薄膜的导热温度的研究, 以寻求转化电子和声子温度达到平衡过程. 但其机理很为复杂, 目前学者已做了许多工作^[1-6]. 又因不同的模型只适用于描述超短脉冲激光加热金属薄膜的不同阶段, 而不能采用一个统一的模型描述完整的热量扩展过程. 所以目前对纳米薄膜材料性质的研究, 特别是瞬间导热的研究, 采用了超快速激光反射方法的实验. 王海东等利用飞秒激光热反射/透热系统测量了金属/半导体薄膜的反射率随时间的

变化^[5]. 然而, 目前对超短波脉冲飞秒激光传导的理论分析, 也在同步研究, 特别是用解析的方法来得到模型解的解析表达式, 并通过数学解表示式对模型各物理量性态作进一步的解析分析. 本文就是建立一个普适模型用于描述超短脉冲激光加热薄膜的整个导热过程的双温度模型, 其实验装置示意图如图 1 所示^[1,5,6], 并用渐近方法得到其近似解析解. 非线性问题在国际学术界是一个十分关注的对象. 近来, 很多学者做了许多工作^[7-12]. 一些近似方法也被优化, 包括合成展开法, 边界层法, 匹配法, 多重尺度法等. 作者等也研究了一些非线性问题, 得到了相应问题解的渐近表示式^[13-18]. 本文是利用数学的解析方法来研究一类飞秒脉冲激光电子和声子控制导热模型, 并求出其渐近解析解.

2 飞秒脉冲激光传导模型及其退化解

讨论如下类飞秒脉冲激光电子和声子控制导热模型^[5,6]:

$$\gamma T_e \frac{\partial T_e}{\partial t} = k_{eq} \frac{\partial T_e}{\partial x} \frac{\partial T_e}{\partial x} - G(T_e - T_l) + S, \quad (1)$$

$$C_l \frac{\partial T_l}{\partial t} = G(T_e - T_l), \quad (2)$$

* 国家自然科学基金 (批准号: 11202106)、浙江省自然科学基金 (批准号: Y6110502, Y13A010029) 和安徽高校省级自然科学基金项目 (批准号: KJ2012A001, KJ2012Z245) 资助的课题.

† 通讯作者. E-mail: chengrongjun76@126.com

其中 T_e, T_l 分别为电子与声子温度, γ, C_l 分别为电子与声子热容, k_{eq} 为初始温度下电子的导热系数, G 为电子-声子耦合系数, S 为激光及热过程转化为热源项

$$S(x, t) = \sqrt{\frac{4 \ln 2 (1-R) J}{\pi t_p \delta}} \exp\left(-\frac{x}{\delta} - 4 \ln 2 \left(\frac{t}{t_p}\right)^2\right),$$

其中 R 为金属表面反射率, J 为激光功率密度, t_p 为激光脉冲宽度, l 为激光渗透厚度. 在本文中假设 $G = \varepsilon$ 为正的小参数. 初始条件为

$$T_e|_{t=t_0} = T_l|_{t=t_0} = T_0. \quad (3)$$

又因为热能通过导热向基底的渗透可以忽略, 则方程的边界 ($x=0, x=l$) 可视为绝热的:

$$\frac{\partial T_e}{\partial x}\bigg|_{x=0} = \frac{\partial T_l}{\partial x}\bigg|_{x=0} = \frac{\partial T_e}{\partial x}\bigg|_{x=l} = \frac{\partial T_l}{\partial x}\bigg|_{x=l} = 0. \quad (4)$$

飞秒脉冲激光电子和声子控制导热模型 (1)—(4) 的退化系统为

$$\gamma T_e \frac{\partial T_e}{\partial t} - k_{eq} \frac{\partial T_e}{\partial x} \frac{\partial T_e}{\partial x} = \sqrt{\frac{4 \ln 2 (1-R) J}{\pi t_p \delta}} \exp\left(-\frac{x}{\delta} - 4 \ln 2 \left(\frac{t}{t_p}\right)^2\right), \quad (5)$$

$$C_l \frac{\partial T_l}{\partial t} = 0, \quad (6)$$

$$T_e|_{t=t_0} = T_0, \quad T_l|_{t=t_0} = T_0. \quad (7)$$

$$\frac{\partial T_e}{\partial x}\bigg|_{x=0} = \frac{\partial T_e}{\partial x}\bigg|_{x=l} = 0, \quad (8)$$

$$\frac{\partial T_l}{\partial x}\bigg|_{x=0} = \frac{\partial T_l}{\partial x}\bigg|_{x=l} = 0.$$

不难可得退化系统 (5)—(8) 的解 (T_{e0}, T_{l0}) 为

$$T_e = \left[T_0 + \frac{8(1-R)J}{t_0 \delta \pi} \sqrt{\frac{\ln 2 T_0}{\gamma k_{eq} \pi}} \times \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} \int_{t_0}^t \left(\exp\left(-\frac{x}{\delta} - 4 \ln 2 \left(\frac{\tau}{t_p}\right)^2\right) - \frac{k_{eq} k^2 \pi^2}{\gamma T_0 l^2} \tau d\tau \right) \cos \frac{k \pi x}{l} \right)^{1/2}, \quad (9)$$

$$T_l = T_0. \quad (10)$$

不妨选取参数为: $R = 0.57, k_{ep} = 1, J = 1 \text{ mW}, t_p = 0.96 \text{ J} \cdot \text{m}^{-2}, l = 2 \text{ nm}, \gamma = 0.95 \times 10^6 \text{ J} \cdot \text{m}^{-3} \cdot \text{K}^{-2}, \delta = 0.5 \text{ nm}, T_0 = 1 \text{ }^\circ\text{C}, C_l = 1 \times 10^6 \text{ J} \cdot \text{m}^{-3} \cdot \text{K}^{-1}$. 由 (9), (10) 式可得飞秒脉冲激光退化系统 (5)—(8) 的

电子温度 $T_{e0}(x, t)$ 的扩散分布如图 2 所示.

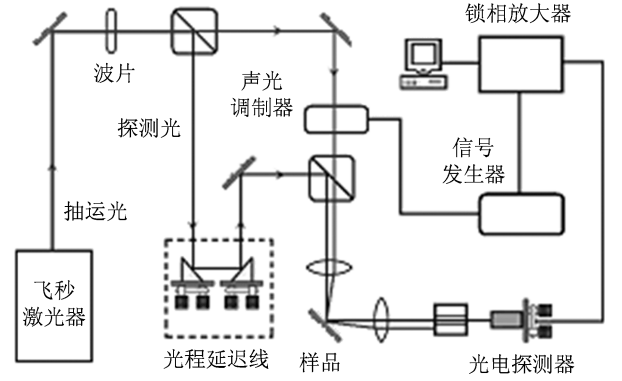


图 1 飞秒激光的系统实验装置示意图

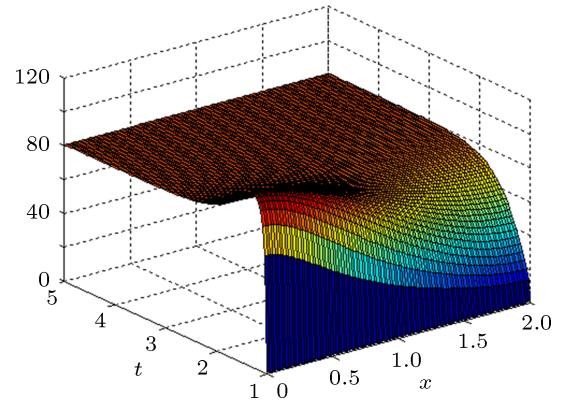


图 2 飞秒脉冲激光退化系统电子温度 $T_e(x, t)$ 的扩散分布图

显然, 飞秒脉冲激光电子和声子控制系统 (5)—(8) 的退化解 (9), (10) 式, 并不是飞秒脉冲激光电子和声子控制系统导热模型 (1)—(4) 的解. 为此我们还需构造系统的渐近解.

3 飞秒脉冲激光传导模型的渐近解

设飞秒脉冲激光传导模型 (1)—(4) 的解 (\bar{T}_e, \bar{T}_l) 为

$$\bar{T}_e = \sum_{i=0}^{\infty} \bar{T}_{ei} \varepsilon^i, \quad \bar{T}_l = \sum_{i=0}^{\infty} \bar{T}_{li} \varepsilon^i. \quad (11)$$

将 (11) 式代入系统 (1)—(4) 式, 按 ε 的幂级数展开, 合并 ε 的同次幂项, 并令各次幂的系数为零. 由 ε^0 的系数为零, 得到的问题的解 ($\bar{T}_{e0}, \bar{T}_{l0}$) 就是退化系统的解 (9), (10). 即

$$T_{e0} = \left[T_0 + \frac{8(1-R)J}{t_p \delta \pi} \sqrt{\frac{\ln 2 T_0}{\gamma K_{eq} \pi}} \right]$$

$$\begin{aligned} & \times \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} \int_{t_0}^t \left(\exp \left(-\frac{x}{\delta} - 4 \ln 2 \left(\frac{\tau}{t_p} \right)^2 \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. - \frac{k_{\text{eq}} k^2 \pi^2}{\gamma T_0 l^2} \tau \right) \cos \frac{k \pi x}{l} \right)^{1/2}, \quad (24) \right. \\ & \left. - \frac{k_{\text{eq}} k^2 \pi^2}{\gamma T_0 l^2} \tau \right) \cos \frac{k \pi x}{l} \right]^{1/2}, \quad (12) \end{aligned}$$

$$\bar{T}_{l0} = T_0. \quad (13)$$

将 (11) 式代入系统 (1)—(4) 式, 按 ε 的幂级数展开, 并考虑到 (12), (13) 式, 由 ε^1 的系数为零, 得到

$$\frac{\partial \bar{T}_{e1}^2}{\partial t} - \frac{k_{\text{eq}} C_l}{\gamma T_0} \frac{\partial^2 \bar{T}_{e1}^2}{\partial x^2} = \frac{1}{2 \gamma C_l} (\bar{T}_{e0} - T_0), \quad (14)$$

$$\frac{\partial \bar{T}_{l1}}{\partial t} = \frac{1}{C_l} (\bar{T}_{e0} - T_0), \quad (15)$$

$$T_{e1}|_{t=t_0} = 0, \quad T_{l1}|_{t=t_0} = 0. \quad (16)$$

$$\left. \frac{\partial T_{e1}}{\partial x} \right|_{x=0} = \left. \frac{\partial T_{e1}}{\partial x} \right|_{x=l} = 0,$$

$$\left. \frac{\partial T_{l1}}{\partial x} \right|_{x=0} = \left. \frac{\partial T_{l1}}{\partial x} \right|_{x=l} = 0. \quad (17)$$

不难得到系统 (14)—(17) 的解为

$$\begin{aligned} \bar{T}_{e1} = & \left[-\frac{2}{\pi C_l} \sqrt{\frac{T_0}{\gamma^3 k_{\text{eq}}}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \left(\int_{t_0}^t (\bar{T}_{e0} - T_0) \right. \right. \\ & \left. \left. \times \exp \left(-\frac{k_{\text{eq}} k^2 \pi^2}{\gamma T_0 l^2} \tau \right) \cos \frac{k \pi x}{l} \right)^{1/2}, \quad (18) \right. \end{aligned}$$

$$\bar{T}_{l1} = \frac{1}{C_l} \int_{t_0}^t (\bar{T}_{e0}(x, \tau) - T_0) d\tau, \quad (19)$$

其中 \bar{T}_{e0} 由 (9) 式表示.

继续用同样的方法, 将 (11) 式代入系统 (1)—(4) 式, 按 ε 的幂级数展开, 由 ε^i ($i = 2, 3, \dots$) 的系数为零, 得到

$$\frac{\partial \bar{T}_{ei}^2}{\partial t} - \frac{k_{\text{eq}} C_l}{\gamma T_0} \frac{\partial^2 \bar{T}_{ei}^2}{\partial x^2} = F_i(x, t), \quad i = 2, 3, \dots, \quad (20)$$

$$\frac{\partial \bar{T}_{li}}{\partial t} = (\bar{T}_{e(i-1)} - T_{0(i-1)}), \quad i = 2, 3, \dots, \quad (21)$$

$$\bar{T}_{ei}|_{t=t_0} = 0, \quad \bar{T}_{li}|_{t=t_0} = 0, \quad i = 2, 3, \dots, \quad (22)$$

$$\left. \frac{\partial T_{ei}}{\partial x} \right|_{x=0} = \left. \frac{\partial T_{ei}}{\partial x} \right|_{x=l} = 0,$$

$$\left. \frac{\partial T_{li}}{\partial x} \right|_{x=0} = \left. \frac{\partial T_{li}}{\partial x} \right|_{x=l} = 0, \quad i = 2, 3, \dots, \quad (23)$$

其中 $F_i(x, t)$ 为逐次已知的函数, 其结构从略. 问题 (20)—(23) 的解为

$$\bar{T}_{ei} = \left[\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{4}{k \pi} \sqrt{\frac{T_0}{\gamma k_{\text{eq}}}} \int_{t_0}^t F_i(x, \tau) \right. \right.$$

$$\begin{aligned} & \left. \times \exp \left(-\frac{k_{\text{eq}} k^2 \pi^2}{\gamma T_0 l^2} \tau \right) \cos \frac{k \pi x}{l} \right]^{1/2}, \quad (24) \\ & \bar{T}_{li} = \int_{t_0}^t (\bar{T}_{e(i-1)}(x, \tau) - T_{0(i-1)}(x, \tau)) d\tau, \\ & i = 2, 3, \dots. \quad (25) \end{aligned}$$

将 (12), (13), (24), (25) 式代入 (11) 式, 便得到飞秒脉冲激光模型 (1)—(4) 的任意的 m 次渐近解

$$\begin{aligned} T_{em} = & \left[T_0 + \frac{8(1-R)J}{t_p \delta \pi} \sqrt{\frac{\ln 2 T_0}{\gamma k_{\text{eq}} \pi}} \right. \\ & \times \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k_{\text{eq}}} \int_{t_0}^t \left(\exp \left(-\frac{x}{\delta} - 4 \ln 2 \left(\frac{\tau}{t_p} \right)^2 \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. - \frac{k_{\text{eq}} k^2 \pi^2}{\gamma T_0 l^2} \tau \right) d\tau \cos \frac{k \pi x}{l} \right)^{1/2} \\ & + \left[-\frac{2}{\pi C_l} \sqrt{\frac{T_0}{\gamma^3 k_{\text{eq}}}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \left(\int_{t_0}^t (\bar{T}_{e0} - T_0) \right. \right. \\ & \left. \left. \times \exp \left(-\frac{k_{\text{eq}} k^2 \pi^2}{\gamma T_0 l^2} \tau \right) \cos \frac{k \pi x}{l} \right)^{1/2} \varepsilon \right. \\ & + \frac{4}{\pi} \sqrt{\frac{T_0}{\gamma k_{\text{eq}}}} \sum_{i=2}^m \left[\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} \int_{t_0}^t F_i(x, t) \right. \right. \\ & \left. \left. \times \exp \left(-\frac{k_{\text{eq}} k^2 \pi^2}{\gamma T_0 l^2} \tau \right) \cos \frac{k \pi x}{l} \right)^{1/2} \varepsilon^i \right. \\ & \left. \left. + O(\varepsilon^m), \quad 0 < \varepsilon \ll 1. \quad (26) \right. \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{T}_{lm} = & T_0 + \frac{1}{C_l} \left[\int_{t_0}^t (\bar{T}_{e0}(x, \tau) - T_0) d\tau \right] \varepsilon \\ & + \sum_{i=2}^m \left[\int_{t_0}^t (\bar{T}_{e(i-1)}(x, \tau) - T_{0(i-1)}(x, \tau)) d\tau \right] \varepsilon^i \\ & + O(\varepsilon^m), \quad 0 < \varepsilon \ll 1. \quad (27) \end{aligned}$$

我们还可证明^[7,8], 在 (26), (27) 式中, 取 $m \rightarrow \infty$ 时, 便为飞秒脉冲激光电子和声子控制导热模型 (1)—(4) 的精确解.

4 飞秒激光传导模型渐近解的模拟图

现考察飞秒脉冲激光电子和声子控制导热模型 (1)—(4), 仍选取相应的参数为

$$\begin{aligned} R = 0.57, \quad k_{\text{ep}} = 1, \quad J = 1 \text{ mW}, \quad t_p = 0.96 \text{ Jm}^{-2}, \\ l = 2 \text{ nm}, \quad G = 0.5 \times 10^{15} \text{ W} \cdot \text{m}^{-3} \cdot \text{K}^{-1}, \\ \gamma = 0.95 \times 10^6 \text{ J} \cdot \text{m}^{-3} \cdot \text{K}^{-2}, \quad \delta = 0.5 \text{ nm}, \\ T_0 = 1 \text{ }^\circ\text{C}, \quad C_l = 1 \times 10^6 \text{ J} \cdot \text{m}^{-3} \cdot \text{K}^{-1}. \end{aligned}$$

由 (9), (10), (24), (25) 式得飞秒脉冲激光系统 (1)—(4) 的电子和声子温度关于 ε 的一次渐近解 $(T_{e1}(x,t), T_{i1}(x,t))$ 的扩散分布如图 3 和图 4 所示.

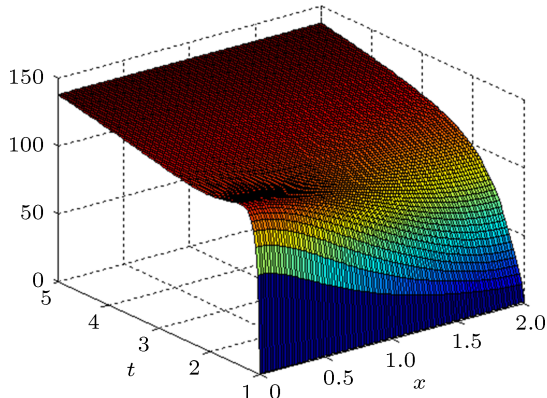


图 3 飞秒脉冲激光系统电子温度一次渐近解 $T_{e1}(x,t)$ 的扩散分布图

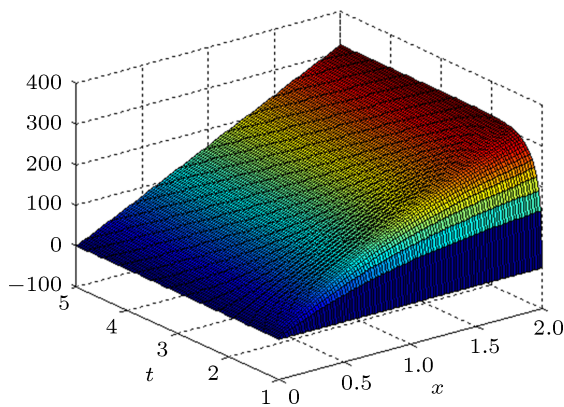


图 4 飞秒脉冲激光系统声子温度一次渐近解 $T_{i1}(x,t)$ 的扩散分布图

利用渐近解 (18), (19) 式和上述模拟图, 可以分析和观察到脉冲激光电子和声子温度的峰值、通

量和其他物理量的趋势等性状, 得到的结果完全符合其规律. 并证实了在超短脉冲激光超快加热薄膜的过程中, 由于电子和声子将处于非平衡状态转化电子和声子温度达到平衡过程. 从渐近解 (18), (19) 式和上述模拟图, 还可调整飞秒速度及脉冲激光强度和其他有关参数, 使得导热模型达到最佳状态. 由上述的分析、计算过程, 特别是用解析的方法来得到模型解的解析表达式, 并通过数学解析表示式对模型各物理量性态作进一步的解析分析. 使得对问题有一个更深刻的了解.

由上述提供的方法还可继续得到更高次的渐近解, 并可画出它们的模拟图. 再经过研讨, 可得到更精确的结果, 使得模型的分析与实际情况更接近, 从而能得到更满意的结果. 关于方面的讨论, 在此不再进一步论述.

5 结论

本文是用数学理论和方法来求解飞秒脉冲激光对纳米金属薄膜导热模型得到的近似解. 它可以对相应模型的实验结果作比较, 以此作为改进加工技术的依据. 超短波脉冲激光加热传导是当前一个尖端技术, 它在许多领域中被广泛地应用. 许多学者正致力于开发更多的技术范围. 因此需要研究相关的理论, 其中就需要用数学理论的方法得到有关模型的近似解. 本文就是在这方面的一个探讨. 模型解的渐近解析表达式. 所用的是渐近方法可得到任意次精度的近似解. 这种方法直观明确, 并且还可以继续用微分、积分的数学解析工具来得到更多相关物理量的性态. 因此在方法上很具有很广的前展性..

[1] Xin Z L, Fan Z X, Shao J D 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 3007 (in Chinese) [夏志林, 范正修, 邵建达 2006 物理学报 **55** 3007]

[2] Eesley G L 1983 *Phys. Rev. Lett.* **51** 2140

[3] Qpu T Q, Tien C L 1993 *J. Heat Transf. Trans. ASME* **115** 835

[4] Xiong G C, Zou Y H, Xin Z J, Yuan P, Lian G J, Li J 1994 *Acta Phys. Sin.* **43** 1860 (in Chinese) [熊光成, 邹英华, 夏宗炬, 袁平, 连贵君, 李洁 1993 物理学报 **43** 1860]

[5] Ma W G, Wang H D, Zhang X, Wang W 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 064401 (in Chinese) [马维刚, 王海东, 张兴, 王玮 2011 物理学报 **60** 064401]

[6] Zhu L D, Sun F Y, Zhu J, Tang D W 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 130512 (in Chinese) [朱丽丹, 孙方远, 祝捷, 唐大伟 2012 物理学报 **61** 130512]

[7] de Jager E M Jiang Furu 1996 *The Theory of Singular Perturbation* (Amsterdam: North-Holland Publishing Co)

[8] Barbu L, Morosanu G 2007 *Singularly Perturbed Boundary-Value Problem* (Basel: Birkhauserm Verlag AG)

[9] D'Aprile T, Pistoia A 2010 *J. Differ. Eqns.* **248** 556

[10] Ei, Shin-Ichiro, Matsuzawa H 2010 *Discrete Contin. Dyn. Syst.* **26** 910

[11] Suzuki R 2010 *Adv. Differ. Eqns.* **15** 283

[12] Deng S B 2012 *J. Differ. Equations* **253** 727

[13] Mo J Q 1989 *Science in China Ser A* **32** 1306

[14] Mo J Q 2008 *J. Sys. Sci. & Complex* **20** 119

[15] Mo J Q 2009 *Science in China Ser. G* **52** 1007

[16] Mo J Q 2009 *Chin. Phys. Let.* **26** 010204

[17] Mo J Q 2010 *Commun. Theor. Phys.* **53** 440

[18] Mo J Q, Lin Y H, Lin W T 2010 *Chin. Phys. B* **19** 030202

Solution of the transfer models of femtosecond pulse laser for nano metal film^{*}

Han Xiang-Lin¹⁾ Zhao Zhen-Jiang¹⁾ Cheng Rong-Jun^{2)†} Mo Jia-Qi¹⁾³⁾

1) (*Faculty of Science, Huzhou Teacher College, Huzhou 313000, China*)

2) (*Ningbo Institute of Technology, Zhejiang University, Ningbo 315100, China*)

3) (*Department of Mathematics, Anhui Normal University, Wuhu 241000, China*)

(Received 20 November 2012; revised manuscript received 18 January 2013)

Abstract

A class of transfer models for femtosecond pulse laser on nano metal film has been investigated. First, we solve the reduced solution. And then, the arbitrary order asymptotic solution of corresponding model is obtained by using the perturbation theory and method. Finally, the behavior of the solution is discussed.

Keywords: femtosecond pulse, laser, asymptotic behavior

PACS: 02.30.Mv

DOI: 10.7498/aps.62.110202

^{*} Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 11202106), the Natural Science Foundation of Zhejiang Province, China (Grant Nos. Y6110502, Y13A010029), and the Natural Science Foundation from the Education Bureau of Anhui Province (Grant Nos. KJ2012A001, KJ2012Z245).

[†] Corresponding author. E-mail: chengrongjun76@126.com