

弹性壳结构静力与动力分析的光滑粒子法*

明付仁 张阿漫[†] 姚熊亮

(哈尔滨工程大学船舶工程学院, 哈尔滨 150001)

(2012 年 12 月 25 日收到; 2013 年 1 月 17 日收到修改稿)

本文通过采用移动最小二乘函数作为近似函数和完全拉格朗日方程作为近似方程来改善光滑粒子法的稳定性和数值精度; 在此基础上, 提出了壳结构静力分析的光滑粒子法, 并完善了壳结构动力分析方法; 最后, 采用国际公认的壳结构的标准测试模型对静力和动力问题分别进行了验证, 所得结果与已有数据吻合良好, 证明了本文数值模型的有效性和可靠性, 为光滑粒子法进一步在裂纹、破碎等非线性壳结构中的应用提供参考。

关键词: 弹性壳, 静力与动力分析, 光滑粒子法, 完备性和稳定性

PACS: 02.60.-x, 02.60.cb, 46.15.-x

DOI: 10.7498/aps.62.110203

1 引言

空间壳结构已广泛应用在工业生产与生活的各个方面, 包括船舶与海洋工程、航空航天、土木工程、冶金等, 研究空间壳结构在不同载荷作用下的响应意义重大. 多年来涌现了众多壳结构的研究方法, 包括实验研究、理论研究和数值研究: 实验研究^[1-3] 由于代价高和移植性差等特点, 并不能广泛采用; 理论研究^[4-6] 对于简单模型十分有效, 但对于复杂壳结构仍存在很大局限性; 数值研究^[7-19] 随着计算机技术的发展进步迅猛, 其中有网格算法发展最快, 典型的有限元方法已经涌现了众多大型软件, 然而由于受网格的限制, 网格算法在结构裂纹、破碎等非线性问题中遇到了不少难题, 扩展有限元方法 (XFEM)、节点松弛等新兴算法^[20-22] 仍应用受限; 基于上述缺点, 近年来许多学者将目光转向了无网格算法^[11-19], 典型的无单元 Garlekin 算法文献众多^[7-9], 此方法数值精度和稳定性可观, 然而由于其为弱形式的基于背景网格积分的方法, 在处理断裂等问题时也存在困难; 作为强形式的完全不依赖于网格的无网格光滑粒子法 (smoothed particle hydrodynamics, SPH) 方法近

年来在低速流动、自由液面问题^[23-25] 中发展迅速, 然而由于受精度和稳定性等局限, 在固体力学方面的应用发展缓慢, 特别是由于壳单元、梁单元的缺失, 在许多工程应用中十分受限. 传统 SPH 方法的核函数由于存在完备性缺陷, 直接影响着收敛性和数值精度. 由于正则化 SPH (NSPH)^[26] 和移动最小二乘 SPH (MLSPH)^[27,28] 等近似方法可保证近似函数的完备性, 同时基于初始未变形构型的完全拉格朗日 SPH (TLSPH) 方程^[29,30], 十分擅长处理大变形等非线性问题, 所以从改善近似函数和近似方程两方面改善 SPH 方法的数值精度和稳定性前景可观.

SPH 壳单元突破了薄壁结构 3D 实体建模的技术难题, 但对于数值精度和稳定性要求非常严格, 作为在强形式无网格算法中几乎唯一成功的壳单元案例, Combescure 等^[31,32] 基于 Mindlin-Ressiner 理论提出了 SPH 壳单元的思想, 仅以一层粒子为研究对象来捕捉壳的动态响应特性. 本研究基于 Combescure 等人的思想^[31,32], 首先从改善传统 SPH 方法的稳定性和数值精度的角度论述 SPH 壳单元的近似函数和近似方程, 然后给出适合静力与动力分析的 SPH 壳单元的简化过程, 最后通过

* 国家自然科学基金优秀青年基金 (批准号: 51222904)、国家自然科学基金重点项目 (批准号: 50939002) 和 the Llyod's Register Educational Trust (The LRET) 资助的课题.

[†] 通讯作者. E-mail: zhangaman2010@gmail.com

国际上壳单元的标准测试模型以及已有的结果对本文的 SPH 壳单元的静力与动力分析结果进行验证分析.

2 理论背景

2.1 高阶完备性的近似函数

近似函数的完备性对于 SPH 方法的收敛性及数值精度至关重要. 通常满足零阶和一阶完备性是十分必要的, 可分别表示为:

$$\sum_b W_{ab} = 1, \quad \sum_b \nabla W_{ab} = 0, \quad (1)$$

$$\sum_b W_{ab} \mathbf{x}_b = \mathbf{x}_a, \quad \sum_b \nabla W_{ab} \mathbf{x}_b = \mathbf{I}. \quad (2)$$

传统核函数 W 由于存在严重的边界缺陷, 为了保证计算精度, 许多改进核函数完备性的办法被提出, 典型的修正零阶完备性的方法见文献 [33—35], 修正一阶完备性的方法见文献 [36—39]. 其中, 满足高阶完备性的移动最小二乘函数 (MLS) 在许多无网格算法中被广泛采用 [27,28], 其表达式为

$$\mathbf{N}(\mathbf{x}) = \mathbf{p}^T(\mathbf{x}) \mathbf{G}^{-1}(\mathbf{x}) \mathbf{H}(\mathbf{x}), \quad (3)$$

其中 $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_k, \dots, \mathbf{x}_n$ 为 $\mathbf{x}$ 邻域内点;

$$\mathbf{G}(\mathbf{x}) = \sum_k W_k(\mathbf{x}) \mathbf{p}(\mathbf{x}_k) \mathbf{p}^T(\mathbf{x}_k), \quad (4)$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{x}) = [\mathbf{W}_1(\mathbf{x}) \mathbf{p}(\mathbf{x}_1) \mathbf{W}_2(\mathbf{x}) \times \mathbf{p}(\mathbf{x}_2) \cdots \mathbf{W}_n(\mathbf{x}) \mathbf{p}(\mathbf{x}_n)], \quad (5)$$

$\mathbf{p}^T(\mathbf{x})$ 为不同阶的基函数, 如表 1 所示, 其中 l 为阶数, m 为项数, 则 $m = (l+1)(l+2)/2$.

表 1 不同阶数的二维基函数

l	m	$\mathbf{p}^T(\mathbf{x})$
0	1	1
1	3	1, x , y
2	6	1, x , y , x^2 , xy , y^2
3	10	1, x , y , x^2 , xy , y^2 , x^3 , x^2y , xy^2 , y^3
4	15	1, x , y , x^2 , xy , y^2 , x^3 , x^2y , xy^2 , y^3 , x^4 , x^3y , x^2y^2 , xy^3 , y^4

MLS 函数前两阶次的导数表示为

$$\mathbf{N}_{,i} = \varphi_{,i}^T \mathbf{H} + \varphi^T \mathbf{H}_{,i}, \quad (6)$$

$$\mathbf{N}_{,ij} = \varphi_{,ij}^T \mathbf{H} + \varphi_{,i}^T \mathbf{H}_{,j} + \varphi_{,j}^T \mathbf{H}_{,i} + \varphi^T \mathbf{H}_{,ij}, \quad (7)$$

其中下标 “ $,i$ ”, “ $,ij$ ” 分别表示相对于空间坐标的一阶和二阶导数, 例如 $\mathbf{B}_{,x}$ 等价于 $\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial x}$, $\mathbf{B}_{,xy}$ 则表示 $\frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial x \partial y}$; 此外,

$$\varphi = \mathbf{G}^{-1} \mathbf{p}, \quad (8)$$

$$\varphi_{,i} = \mathbf{G}^{-1} (\mathbf{p}_{,i} - \mathbf{G}_{,i} \varphi), \quad (9)$$

$$\varphi_{,ij} = \mathbf{G}^{-1} (\mathbf{p}_{,ij} - \mathbf{G}_{,i} \varphi_{,j} - \mathbf{G}_{,j} \varphi_{,i} - \mathbf{G}_{,ij} \varphi). \quad (10)$$

MLS 函数能够构造满足任意阶数完备性的近似函数, 所以本文在 SPH 壳单元中采用 MLS 函数作为近似函数. 实践证明, 高阶的 MLS 函数对于壳单元的剪切自锁现象亦十分有效, 参见文献 [10, 40].

2.2 高稳定性的 SPH 固体方程

传统 SPH 方法为更新的拉格朗日方法, 采用的是相对于空间位置坐标的欧拉 (Euler) 意义上的近似函数, 支持域在时间与空间上是实时更新的, 这对于处理易变形且变形剧烈的流体问题极为适合. 然而, 在处理固体模型时, 由于变形程度有限, 相邻粒子变化一般不大, 采用完全拉格朗日思想, 依托于物质坐标, 粒子的支持域仅需在初始时搜索一次, 这无疑会大大节省计算资源, 同时可有效克服数值断裂现象 [32], 如图 1 所示. 同时, 相对于初始构型的完全拉格朗日近似函数对于处理大变形问题也十分有利.

完全拉格朗日框架下, 质量、动量和能量守恒方程可分别记为 [41]

$$\rho_0 J_0 = \rho J, \quad (11a)$$

$$\rho_0 \ddot{\mathbf{u}} = \nabla_0 \mathbf{P} + \rho_0 \mathbf{g}, \quad (11b)$$

$$\rho_0 \dot{\mathbf{e}} = \dot{\mathbf{F}} : \mathbf{P}^T, \quad (11c)$$

其中 ρ , ρ_0 分别为当前密度和初始密度; J , J_0 分别为 Jacobian 行列式和初始 Jacobian 行列式; $\mathbf{u}$, $\mathbf{e}$ 分别表示位移和内能; $\mathbf{P}$ 为名义应力张量; $\mathbf{F}$ 为变形梯度张量; $\mathbf{g}$ 为体力; 上标 “ $\cdot$ ” “ $\ddot{\cdot}$ ” 分别表示对时间的一阶和二阶导数. 若忽略热力学效应以及质量与能量之间的转化, 则质量和能量守恒是自然满足的. 因此, 在完全拉格朗日框架下, 通过粒子近似 [42], 动量守恒的离散形式为

$$\rho_0 \ddot{\mathbf{u}}_a = \sum_b (\mathbf{P}_b - \mathbf{P}_a) \nabla_0 \mathbf{N} + \rho_0 \mathbf{g}_a, \quad (12)$$

其中, a, b 为一对相互作用的粒子;

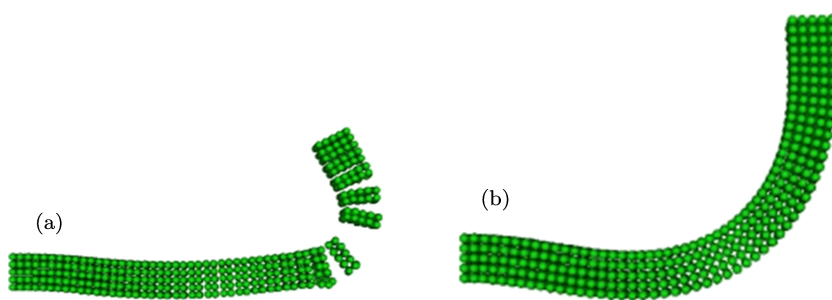


图1 更新拉格朗日法与完全拉格朗日法结果对比 (a) 为更新拉格朗日法的数值断裂现象; (b) 为完全拉格朗日法较好的结果 [32]

需要指出的是, 在材料经历极大变形时, 粒子的影响域需要更新, 相对初始构型的近似函数必须重新计算, 此时已不再是严格意义上的完全拉格朗日方法, 通常超大变形结构的近似函数每隔一定时间步更新一次.

2.3 高精度格式的 SPH 壳理论

本研究壳单元建立在 Combescure 等 [31,43] 的思想上, 基于 Mindlin-Ressiner 理论, 即保留 Kirchhoff-Love 理论关于直法线的假设, 但由于考虑横向剪切的影响, 法线在变形后不再垂直于板的中面. 虽然厚壳理论会存在剪切自锁和薄膜自锁现象, 但由于高阶完备性近似函数的应用, 为此难题提供了很好的解决平台 [10,40]. 壳上每个点有五个自由度, 如图 2 所示, 三个沿轴向的平动自由度和两个绕轴的转动自由度, 缺失绕法线的旋转 [31,43].

2.3.1 构型的定义

壳结构的描述需要确定三个构型 [31,43], 如图 3 所示, 即全局构型 S_g , 初始局部构型 S_{L0} 和当前局部构型 S_L . 全局构型 S_g 与大地固连; 局部构型由壳的两条正交切线和法线确定, 壳的任意两条切线 τ_1, τ'_1 可定义为

$$\tau_1 = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial x}, \quad \tau'_1 = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial y}, \quad (13)$$

则法线为

$$\mathbf{n} = \tau_1 \times \tau'_1. \quad (14)$$

以其中一条切线和法线可获得正交的切线

$$\tau_2 = \tau_1 \times \mathbf{n}. \quad (15)$$

这样 $\tau_1, \tau_2, \mathbf{n}$ 就构成了局部构型.

本研究约定 $\mathbf{X}, \mathbf{x}_0, \mathbf{x}$ 和 $\mathbf{U}, \mathbf{u}_0, \mathbf{u}$ 分别表示在 S_g, S_{L0}, S_L 构型内任意点的位置矢量和位移矢量,

则三个不同构型之间的旋转关系为

$$\mathbf{x}_0 = \mathbf{R}_0 \mathbf{X}, \quad (16)$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{R} \mathbf{X}, \quad (17)$$

其中 $\mathbf{R}_0, \mathbf{R}$ 为正交的旋转矩阵, 即 $\mathbf{R}_0^{-1} = \mathbf{R}_0^T$, $\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^T$.

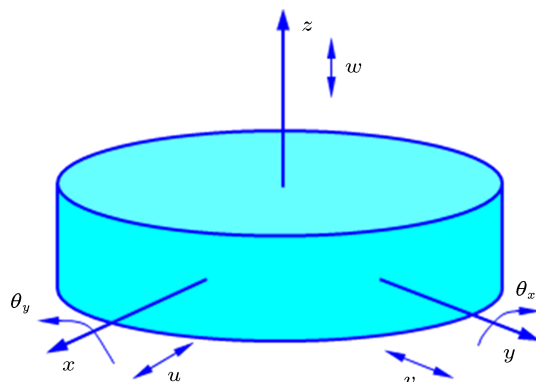


图2 粒子的五个自由度

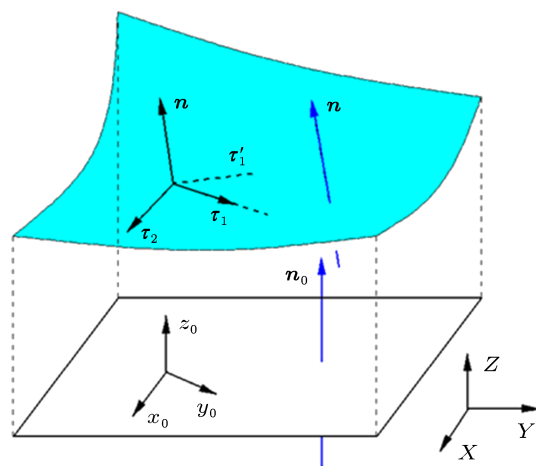


图3 构型的定义

连接未变形(初始)的构型和变形(当前)的构型的变形梯度张量 $\mathbf{F}$ 可表示为

$$\mathbf{F} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial X} & \frac{\partial x}{\partial Y} & \frac{\partial x}{\partial Z} \\ \frac{\partial y}{\partial X} & \frac{\partial y}{\partial Y} & \frac{\partial y}{\partial Z} \\ \frac{\partial z}{\partial X} & \frac{\partial z}{\partial Y} & \frac{\partial z}{\partial Z} \end{bmatrix}. \quad (18)$$

因此变形梯度的 Jacobian 行列式可记为

$$J = |\mathbf{F}|. \quad (19)$$

2.3.2 壳运动的描述

在 S_g 内, 壳的任意一点的位置可由一对变量 $(\mathbf{X}_m, \mathbf{n})$ 描述, 其中 $\mathbf{X}_m(X_m, Y_m, Z_m)$ 表示壳的中面上点的位置, 下标“ m ”表示中面物理量; $\mathbf{n}(n_x, n_y, n_z)$ 表示中面的单位法线. 则横截面内的任意一点位置表示为

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}_m + \xi \cdot \mathbf{n}, \xi \in [-d/2, d/2]. \quad (20)$$

式中 ξ 为壳截面内点与中面距离; d 为板厚.

在 S_L 内, 壳的任意一点的位移可由一对变量 $(\mathbf{u}_m, \boldsymbol{\theta})$ 表示, 其中 $\mathbf{u}_m(u_m, v_m, w_m)$ 表示壳的中面上点的位移, 与坐标轴的正向同向; $\boldsymbol{\theta}(\theta_x, \theta_y, 0)$ 为法线旋转角度, θ_x, θ_y 分别为中面的法线在 xz, yz 平面内的旋转角度, 以 x, y 轴旋转 90° 至 z 轴方向为正. 因此壳横截面内的任意一点位移表示为

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_m - \xi \cdot \boldsymbol{\theta}, \xi \in [-d/2, d/2]. \quad (21)$$

2.3.3 应变的度量

在非线性连续介质力学中存在多种应变和应变率的度量, 本研究采用 Green-Lagrangian 应变的度量. 完全拉格朗日框架下, 应变的度量在初始构型内, 通过变形关系转换到当前构型内应用本构关系^[43].

在构型 S_{L0} 内以位移梯度表示的 Green-Lagrangian 应变^[41]为

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \frac{1}{2}((\nabla_0 \mathbf{u})^T + \nabla_0 \mathbf{u} + \nabla_0 \mathbf{u}(\nabla_0 \mathbf{u})^T) \\ &= \mathbf{E}_C + \mathbf{E}_L, \end{aligned} \quad (22)$$

其中 $\mathbf{E}_C$ 为在厚度方向为常量的应变分量, 包括膜应变、等效的横向剪切应变等; $\mathbf{E}_L$ 表示在厚度方向上成线性变化的应变分量, 包括弯曲应变等. 通常在大挠度时, 壳的非线性膜应变会计入线性分量, 而非线性的剪切应变和弯曲应变在 SPH

壳模型中不予考虑. 根据 Green-Lagrangian 应变与 Euler-Almansi 应变的定义,

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} - \mathbf{I}), \quad (23a)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}(\mathbf{I} - \mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{F}^{-1}). \quad (23b)$$

故在 S_L 内 Euler-Almansi 应变为

$$\boldsymbol{\varepsilon}_C = \mathbf{R} \cdot \mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{R}_0^T \cdot \mathbf{E}_C \cdot \mathbf{R}_0 \cdot \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{R}^T, \quad (24a)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_L = \mathbf{R} \cdot \mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{R}_0^T \cdot \mathbf{E}_L \cdot \mathbf{R}_0 \cdot \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{R}^T. \quad (24b)$$

2.3.4 应力的度量

在非线性问题中, 应力的度量有 Cauchy 应力 $\boldsymbol{\sigma}$ 和名义应力 $\mathbf{T}$ 等. 在完全拉格朗日框架下, 动量方程是以名义应力表示的, 故通过当前构型的 Euler-Almansi 求得当前构型的真实应力即 Cauchy 应力, 再转换为名义应力的应力度量^[43].

若以 $\boldsymbol{\varepsilon}_C, \boldsymbol{\varepsilon}_L$ 应变来表示广义应变, 则应用本构关系可得广义应力 $\boldsymbol{\sigma}_C$ 与 $\boldsymbol{\sigma}_L$, 因此, 通过在板厚方向的积分, 可得广义内力与广义应力的关系

$$\begin{aligned} T_{ij} &= \sigma_{Cij}d, \quad S_{iz} = \sigma_{Ciz}d, \\ M_{ij} &= \sigma_{Lij}d^3/12 \quad i, j = x, y, \end{aligned} \quad (25)$$

T_{ij}, S_{iz}, M_{ij} 分别为壳截面内单位长度的中面应力、剪力、弯矩. 根据力的不同性质, 可记为

$$\begin{aligned} \mathbf{T} &= \begin{bmatrix} T_{xx} & T_{xy} & 0 \\ T_{yx} & T_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{S} &= \begin{pmatrix} S_{xz} \\ S_{yz} \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \mathbf{M} &= \begin{bmatrix} M_{xx} & M_{xy} & 0 \\ M_{yx} & M_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (26)$$

因此, 转换为 S_g 内的名义应力为^[41]

$$\mathbf{T}_g = \mathbf{J}\mathbf{F}^{-1}\mathbf{R}^T\mathbf{T}\mathbf{R}, \quad (27)$$

$$\mathbf{S}_g = \mathbf{J}\mathbf{R}^T\mathbf{S}, \quad (28)$$

$$\mathbf{M}_g = \mathbf{J}\mathbf{F}^{-1}\mathbf{R}^T\mathbf{M}\mathbf{R}, \quad (29)$$

2.3.5 空间的离散

在 S_g 内, 平衡微分方程可表达为

$$\nabla_0 \cdot \mathbf{T}_g = \rho_0 d \ddot{\mathbf{U}}, \quad (30)$$

$$\nabla_0 \cdot \mathbf{M}_g + \mathbf{S}_g = I_0 \ddot{\Theta}_g. \quad (31)$$

因此进行粒子离散后得

$$\sum_b (\mathbf{T}_g)_b \nabla_0 \mathbf{N}_{ab} = \rho_0 d (\ddot{\mathbf{U}}_g), \quad (32)$$

$$\sum_b (\mathbf{M}_g)_b \nabla_0 \mathbf{N}_{ab} + (\mathbf{S}_g)_a = I_0 (\ddot{\Theta}_g)_a, \quad (33)$$

其中, I_0 为考虑转动的影响系数, Θ 为 S_g 内法线旋转角度.

为了克服减缩积分所带来的沙漏奇异模式, 通常在 SPH 粒子中布置另一系列类似于高斯积分点的粒子即应力点^[26,44,45], 顾名思义, 这些点主要用于应力的计算, 而它们的运动量由周围 SPH 粒子插值获得; SPH 粒子的应力来自于周围应力点的插值, 而运动量由动量方程获得.

2.3.6 时域的离散

本研究在时域内采用 Newmark 方法进行离散^[41], 它可实现显式和隐式分析的时间积分器. 在这个时间积分器内, 更新的位移和速度为

$$\mathbf{U}_{t+\Delta t} = \tilde{\mathbf{U}}_{t+\Delta t} + \beta \Delta t^2 \ddot{\mathbf{U}}_{t+\Delta t}, \quad (34)$$

$$\dot{\mathbf{U}}_{t+\Delta t} = \tilde{\dot{\mathbf{U}}}_{t+\Delta t} + \gamma \Delta t \ddot{\mathbf{U}}_{t+\Delta t}, \quad (35)$$

其中

$$\tilde{\mathbf{U}}_{t+\Delta t} = \mathbf{U}_t + \Delta t \dot{\mathbf{U}}_t + \frac{\Delta t^2}{2} (1 - 2\beta) \ddot{\mathbf{U}}_t, \quad (36)$$

$$\tilde{\mathbf{U}}_{t+\Delta t} = \dot{\mathbf{U}}_t + (1 - \gamma) \Delta t \ddot{\mathbf{U}}_t, \quad (37)$$

其中, $\beta \geq \frac{\gamma}{2} \geq \frac{1}{4}$ 为无条件稳定.

在本研究中, 动力分析主要应用 Newmark 的显式积分, 类似于预测 - 修正的形式^[46], 其中 $\tilde{\mathbf{U}}_{t+\Delta t}$ 为预测值, $\mathbf{U}_{t+\Delta t}$ 为修正值; 在静力问题中, 由于 SPH 方法为显式动力分析代码, 所以无法应用到隐式分析中, 故本研究中提出十分简单方便的准静力分析办法. 主要思路为采用 SPH 动力分析的显式代码, 但在计算过程中施加一定的人工阻尼, 借鉴 Monaghan 等^[47] 提出的光顺技术, 对速度 $\dot{\mathbf{U}}$ 采用如下处理:

$$\tilde{\dot{\mathbf{U}}}_a = \dot{\mathbf{U}}_a + \varsigma \left[\left(\sum_b \dot{\mathbf{U}}_b N_{ab} \right) / \left(\sum_b N_{ab} \right) - \dot{\mathbf{U}}_a \right]. \quad (38)$$

这样能量会逐渐的耗散, 最终达到静力平衡, 其中参数 ς 直接关系收敛和平衡的速率, 一定范围内, ς 越大, 平衡速率越快, 文中 $\varsigma = 0.5$.

角度的更新主要用于更新节点法线, 本研究采用 Rodrigue 乘法公式^[48], 其形式为

$$\mathbf{n}_{t+\Delta t} = \mathbf{R}_{t+\Delta t} \mathbf{n}_0, \quad (39)$$

$$\mathbf{R}_{t+\Delta t} = \Delta \mathbf{R} \mathbf{R}_t, \quad (40)$$

其中 $\Delta \mathbf{R}$ 为在 $[t, t + \Delta t]$ 内的旋转增量, 若 Θ_X , Θ_Y , Θ_Z 分别表示此时间段内角度增量, 则

$$\Delta \mathbf{R} = \begin{bmatrix} \cos \Theta_Y \cos \Theta_Z & -\cos \Theta_Y \sin \Theta_Z & \sin \Theta_Y \\ \cos \Theta_X \sin \Theta_Z + \sin \Theta_X \sin \Theta_Y \cos \Theta_Z & \cos \Theta_X \cos \Theta_Z - \sin \Theta_X \sin \Theta_Y \sin \Theta_Z & -\sin \Theta_X \cos \Theta_Y \\ \sin \Theta_X \sin \Theta_Z - \cos \Theta_X \sin \Theta_Y \cos \Theta_Z & \sin \Theta_X \cos \Theta_Z + \cos \Theta_X \sin \Theta_Y \sin \Theta_Z & \cos \Theta_X \cos \Theta_Y \end{bmatrix} \quad (41)$$

3 理论实践

3.1 弹性壳结构静力分析

3.1.1 方形壳的静力变形

首先以一个非常简单的模型为例, 来证明本文 SPH 壳单元静力分析的有效性与可行性. 如图 4 所示, 四周刚性固定方形壳的 1/4 计算模型, 其中边长 $a = 1$ m, 整个壳体受均布面载荷 q . 壳的材料参数为: 弹性模量 $E = 2.0 \times 10^{11}$ Pa, 泊松比 $\nu = 0.3$, 密度 $\rho = 7800$ kg·m⁻³, 厚度 d 为变量. 整个模型被离散为 2601 个 SPH 粒子和 2500 个应力点, 等粒子

间距 0.02 m. 板的中心处挠度最大值的理论解^[4]:

$$w = kqa^4/D, \quad (42)$$

其中弯曲刚度 $D = Ed^3/12(1 - \nu^2)$, k 为挠度系数.

当 $d/a = 0.1$ 时, SPH 壳的最大变形如图 5 所示. 恒定载荷 $q = 1$ MPa, 不同厚跨比 d/a 时, 通过不同算法得到的壳中点的挠度如图 6 所示, SPH 壳的静力分析结果与理论解十分接近, 误差在 $\pm 1.0\%$ 左右; 厚跨比 $d/a = 0.1$ 、不同载荷时, 壳中心的挠度如图 7 所示, 可以看出, 此时 SPH 壳的计算结果与其他算法几乎重合, 保持着较高的精度, 这初步证明了 SPH 壳方法在解决静力分析时具有较好的数值精度.

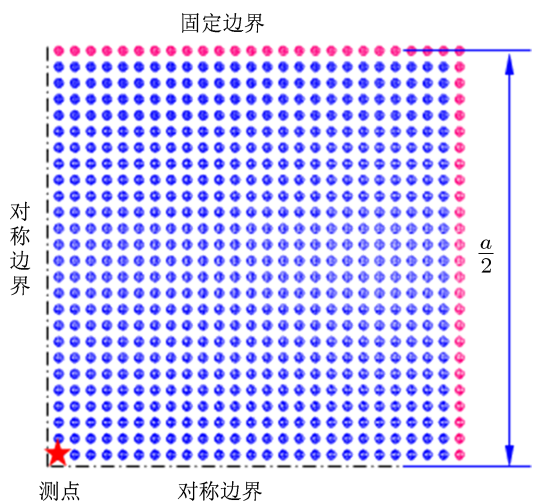


图4 刚性固定方形壳的1/4计算模型

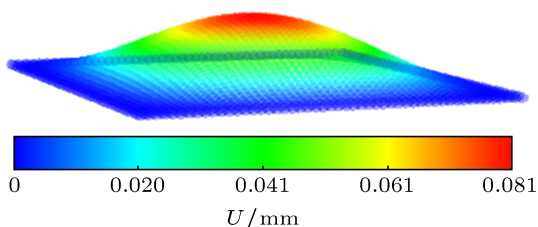
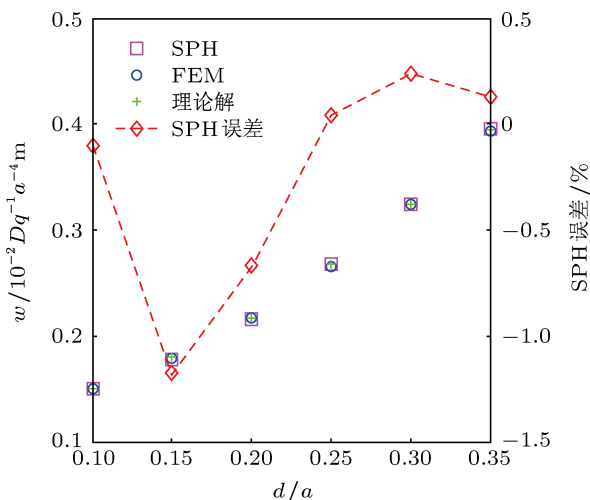
图5 SPH 方形壳的最大变形 ($d/a = 0.1$)

图6 恒定载荷、不同厚跨比时壳中心的挠度

3.1.2 筒形穹顶的静力变形

基于上述研究,采用国际测试壳单元的标准模型^[49]进一步测试本文壳单元的分析精度和可靠性.筒形穹顶(the barrel vault roof)为其中之一,如图所示,深度弯曲的穹顶的曲边被隔板支撑,直边

为自由端,整个穹顶在自身的重力作用下变形.此问题令人感兴趣的是在穹顶的中心处会在垂直向下的自身的重力作用下向上运动,这也是此问题在数值上的难点所在.

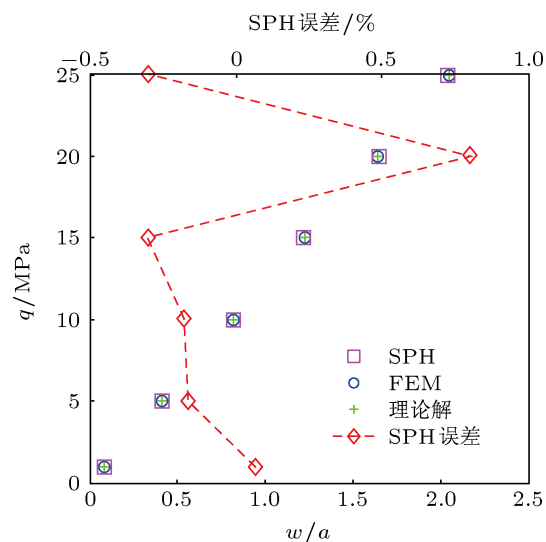


图7 厚跨比恒定、不同载荷时壳中心的挠度

如图8所示,筒形穹顶几何参数为:半径 $R = 7.62$ m, 长度 $L = 15.24$ m, 厚度 $d = 0.0762$ m, 半跨度 $\theta = 40^\circ$, 曲边受隔限定满足 $u_X = u_Y = \theta_Z = 0$. 材料参数为: 密度 $\rho = 5766.55 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ 弹性模量 $E = 2.068 \times 10^{10} \text{ Pa}$, 泊松比 $\nu = 0$. 重力加速度 $g = 9.8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$, 测点 A, B, C 分别位于壳的中心、直边中点和曲边中点. 整个壳体变形过程处于膜应力和不可延展的弯曲应力的复杂的应力状态, 壳体的最终变形如图9所示, 对应的沿曲线 AB, CA 的垂直挠度如图10和图11所示, 可以看出, 在壳的中心处产生了向上的挠度, SPH 壳单元的计算结果与 Krysl 等^[7]的 EFG 结果和 Simo 等^[50]的 FEM 结果相近, 但更接近 EFG 算法.

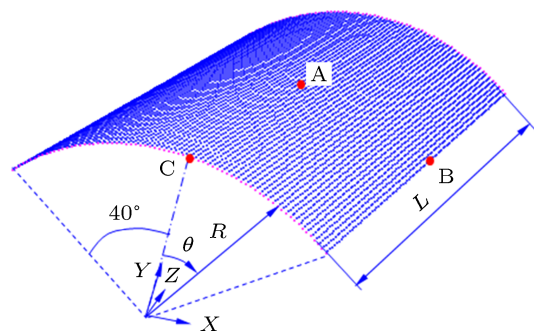


图8 筒形穹顶 SPH 计算模型

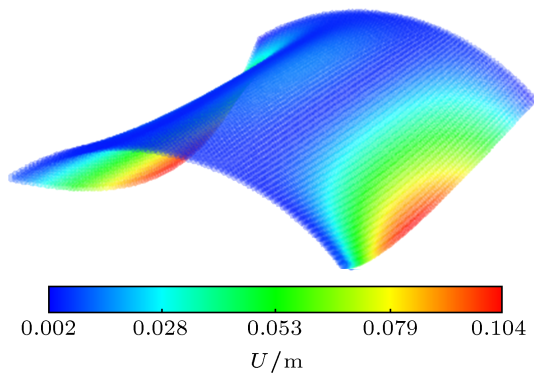
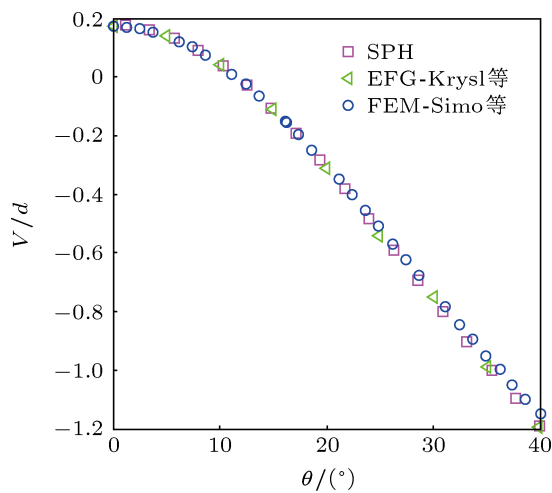

 图9 筒形穹顶的最大变形 ($\times 10$)


图10 沿曲线AB的垂向挠度

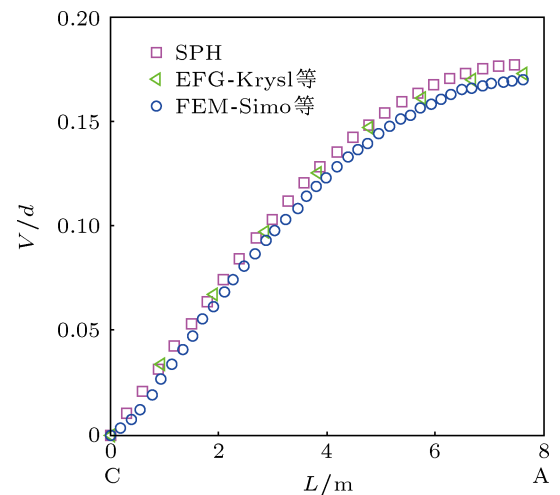


图11 沿曲线CA的垂向挠度

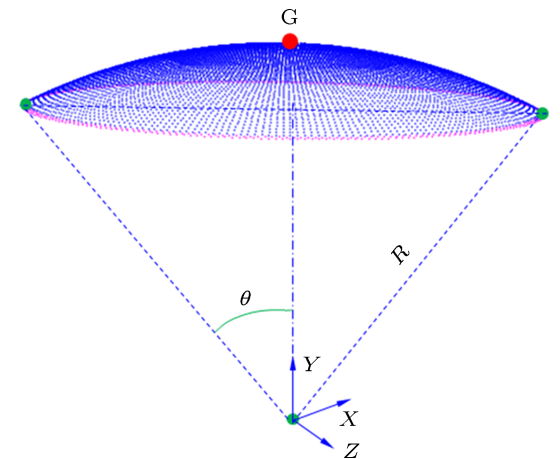


图12 球冠的SPH计算模型

3.2 弹性壳结构动力分析

3.2.1 球冠的瞬态冲击响应

为了考察在膜力和弯曲应力共同作用下壳体的动响应特性, 首先建立如图12所示的模型, 刚性固定的球冠在 $q = 4.14 \text{ MPa}$ 的阶跃面载荷作用下开始振动. 壳体的几何参数为: 半径 $R = 0.577 \text{ m}$, 厚度 $d = 0.01041 \text{ m}$, 半跨度 $\theta = 26.67^\circ$; 材料参数为: 弹性模量 $E = 7.24 \times 10^{10} \text{ Pa}$, 泊松比 $\nu = 0.3$, 密度 $\rho = 2618 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$. 测点G位于球冠的极点.

将本文的计算结果与文献[51]和[52]的EFM结果进行对比, 对应的球冠中心点处的垂向挠度曲线如图13所示, 其中A-F点对应时刻的变形如图14所示, 可以看出, 球壳受膜力和弯曲力的共同作用发生了较大的变形过程, 三者的计算结果非常接近, 壳的振动幅值以及周期均比较符合, 不同的是在振动时的相位发生了一点偏差, 但总体来看, SPH壳单元的动力分析结果与前人结果符合较好.

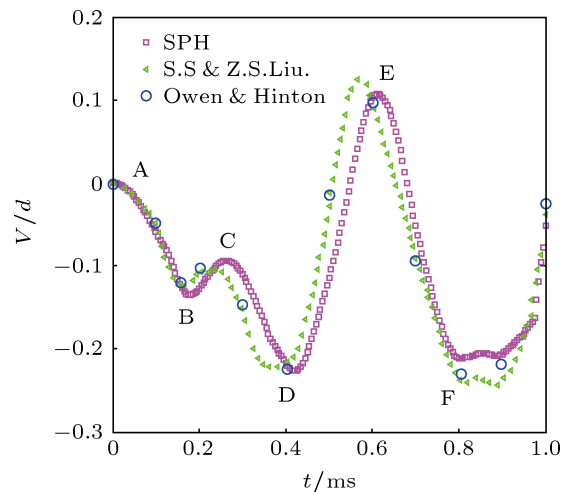
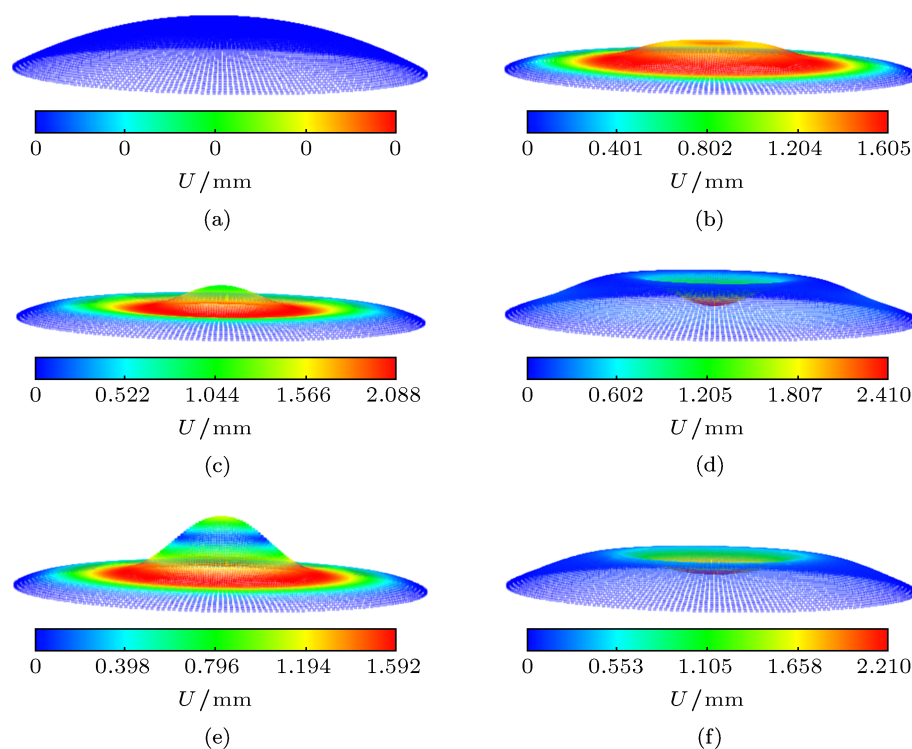


图13 球冠中心点的垂向挠度


 图 14 球冠在典型时刻的变形 ($\times 15$) (a)—(f) 分别对应曲线中 A—F 时刻

3.2.2 圆锥壳的瞬态冲击响应

基于上述研究, 本文建立了 Li 等^[12] 在计算力学权威杂志发表的用于测试重构核粒子方法的计算模型, 如图 15 所示, 截顶的圆锥壳, 底部半径 $R = 0.0508$ m, 顶部半径 $r = 0.0254$ m, 高 $H = 0.0254$ m, 厚度 $d = 0.00127$ m, 圆锥壳的底部圆周刚性固定, 截顶端以恒定的垂直向下的速度 V 运动, 本模型的难度在于顶部的拉拽使壳体从内部实现翻转, 整个过程非线性大变形, 多种内力耦合作用严重. 与 Li 不同的是, 本研究的壳材料并未采用超弹参数和相应的本构关系, 文中壳为完全弹性壳, 材料参数为: 密度 $\rho = 7800 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$, 弹性模量 $E = 2.0 \times 10^{11} \text{ Pa}$, 泊松比 $\nu = 0.3$. 壳顶端速度 $V = 10 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$.

圆锥壳截面内挠度的变化过程如图 16 所示, 相应的变形如图 17 所示, 可以看出, 整个壳体前期变形缓慢, 但随着挠度的增大, 变形呈非线性增长, 这就是所谓的大变形过程的“突跳”现象, 这主要由于顶端的拖曳力会随着顶端的垂向位移交错变化. 壳体的非线性变形过程实现了圆锥壳体的内部翻转, 这再次证明了本文数值理论的有效性和可靠性.

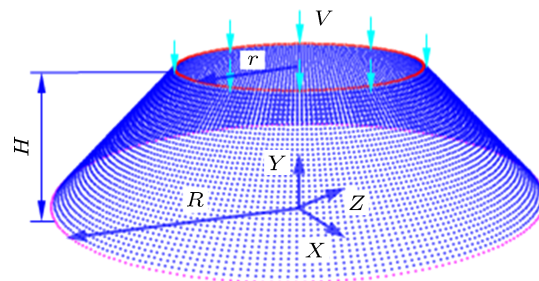


图 15 圆锥壳 SPH 计算模型

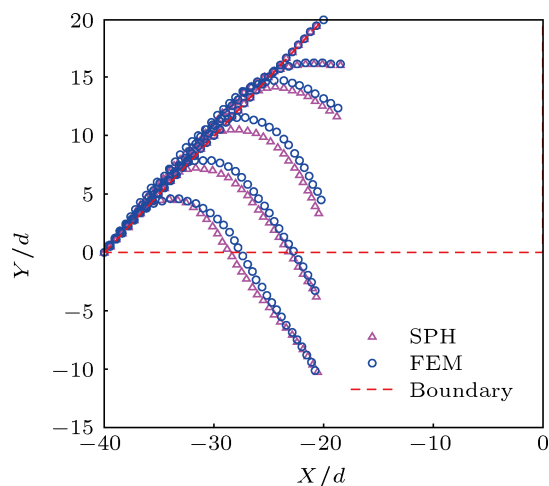


图 16 圆锥壳截面挠度变化

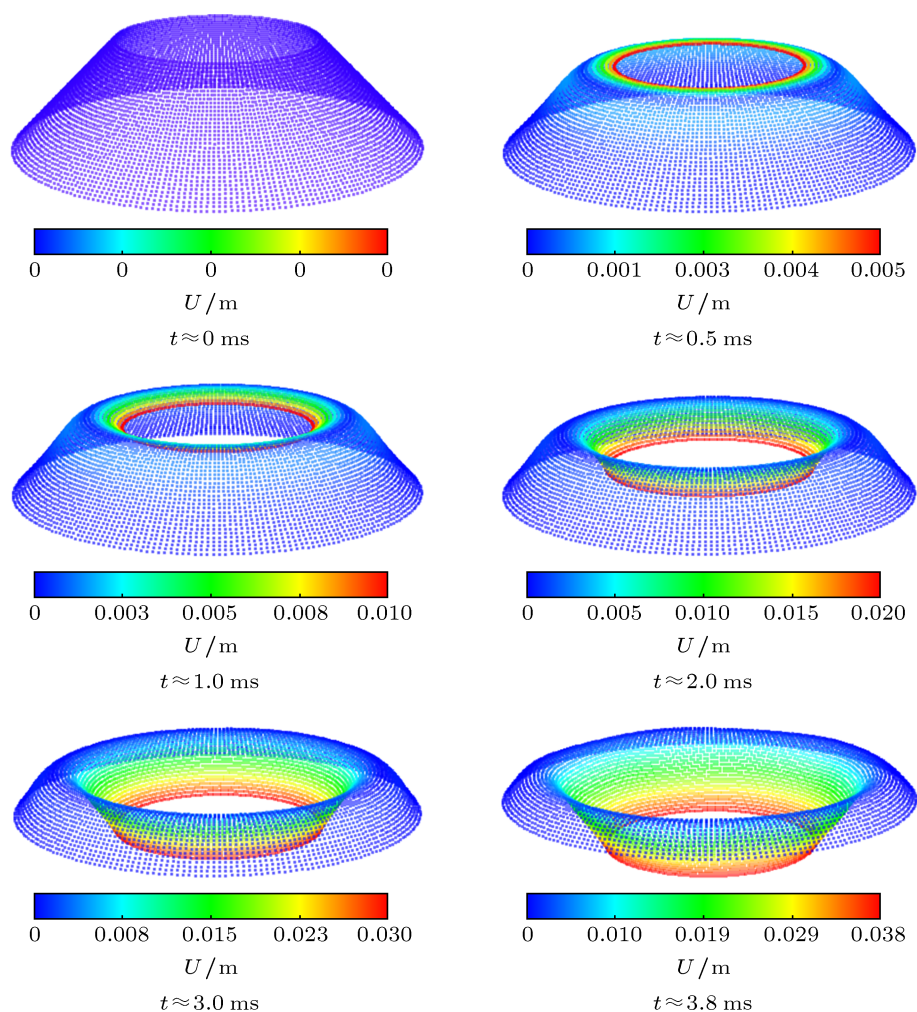


图 17 SPH 方法的圆锥壳变形过程

4 结 论

本文详细阐述了具有较高稳定性和数值精度的壳结构在无网格光滑粒子法中的简化过程, 提出与完善了弹性壳结构静力和动力分析的光滑粒子法, 最后采用标准测试模型验证了上述理论. 可以得出: 通过采用高阶完备性的近似函数和基于初始构型的近似方程, 可有效保证 SPH 方法处理固体力学问题的数值稳定性和计算精度; 基于 Mindlin-Ressiner 理论的光滑粒子法仅将空间壳结构离散为一层粒子来捕捉壳的响应特性, 克服了 3D 实体

建模的昂贵代价, 通用性强且实施方便; 文中提出的采用人工光滑技术对速度处理代替常规算法中的人工阻尼, 可有效实现准静态分析方法, 实施过程简单易行且计算精度可靠; 针对不同的测试模型, 包括静力分析和动力分析, 数值结果均与既有数据符合良好, 误差在可控范围内, 特别是对空间曲面壳体大变形问题仍保留着较好的数值精度, 这无疑为后续的壳板的裂纹、破碎问题打下了良好的基础.

感谢法国里昂国立应用科学学院 (INSA-Lyon) 的 Alain Combescure 教授在本文学习过程中给予的帮助和指导.

- [1] Au F T K, Cheung Y K 1996 *Thin wall Struct.* **24** 53
- [2] Morino L, Leech J W, Witmer E A 1971 *J. Appl. Mech.* **38** 429
- [3] Rossing T D, Fletcher N H 1983 *J. Acoust. Soc. Am.* **73** 345
- [4] Timoshenko S, Woinowsky-Krieger S 1959 *Theory of plates and shells* (2nd Edn.) (New York: McGraw-Hill) p201
- [5] Parisch H 1995 *Int. J. Numer. Meth. Engng.* **38** 1855
- [6] Reddy J N 2007 *Theory and analysis of elastic plates and shells* (2nd Edn.) (Florida: CRC) p21
- [7] Krysl P, Belytschko T 1996 *Int. J. Solids Struct.* **33** 3057
- [8] Noguchi H, Kawashima T, Miyamura T 2000 *Int. J. Numer. Meth Engng.* **47** 1215
- [9] Rabczuk T, Areias P M A, Belytschko T 2007 *Int. J. Numer. Meth Engng.* **72** 524
- [10] Wang D, Chen J S 2003 *Comput. Methods Appl. Mech. Engng.* **193** 1065
- [11] Miao Y, Wang Y 2005 *Eng. Anal. Bound. Elem.* **29** 703
- [12] Li S, Hao W, Liu W K 2000 *Comput. Mech.* **25** 102
- [13] Garcia O, Fancello E A, de Barcellos C S, Duarte C A 2000 *Int. J. Numer. Meth Engng.* **47** 1381
- [14] Sladek J, Sladek V, Wen P H, Aliabadi M H 2006 *CMES-Comp. Model Eng.* **13** 103
- [15] Oh H S, Davis C, Jeong J W 2012 *Comput. Methods Appl. Mech. Engng.* **209** 156
- [16] Liu G R 2002 *Int. J. Solids Struct.* **39** 261
- [17] Cheng Y M, Li J H 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 4463 (in Chinese) [程玉民, 李九红 2005 物理学报 **54** 4463]
- [18] Yang X L, Dai B D, Li Z F 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 050204 (in Chinese) [杨秀丽, 戴保东, 栗振锋 2012 物理学报 **61** 050204]
- [19] Qin Y X, Cheng Y M 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 3215 (in Chinese) [秦义校, 程玉民 2006 物理学报 **55** 3215]
- [20] Belytschko T, Black T 1999 *Int. J. Numer. Meth Engng.* **45** 601
- [21] Unosson M, Olovsson L, Simonsson K 2006 *Finite Elem. Anal. Des.* **42** 283
- [22] Moes N, Dolbow J, Belytschko T 1999 *Int. J. Numer. Meth. Engng.* **46** 133
- [23] Chang J Z, Liu M B, Liu H T 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 3954 (in Chinese) [常建忠, 刘谋斌, 刘汉涛 2008 物理学报 **57** 3954]
- [24] Liu M B, Chang J Z 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 3654 (in Chinese) [刘谋斌, 常建忠 2010 物理学报 **59** 3654]
- [25] Shao J R, Li H Q, Liu G R, Liu M B 2012 *Comput. Struct.* **100-101** 18
- [26] Randles P W, Libersky L D 2000 *Int. J. Numer. Meth Engng.* **48** 1445
- [27] Dilts G A 1999 *Int. J. Numer. Meth Engng.* **44** 1115
- [28] Dilts G A 2000 *Int. J. Numer. Meth Engng.* **48** 1503
- [29] Vidal Y, Bonet J, Huerta A 2007 *Int. J. Numer. Meth Engng.* **69** 2687
- [30] Belytschko T, Rabczuk T, Xiao S P 2004 *Comput. Methods Appl. Mech.* **193** 1035
- [31] Maurel B, Combescure A 2008 *Int. J. Numer. Meth Engng.* **76** 949
- [32] Maurel B, Combescure A, Potapov S 2006 *Eur. J. Comput. Mech.* **15** 495
- [33] Shepard D 1968 *Proceedings of the 23rd ACM national conference* New York, August 27-29, 1968 p517
- [34] Bonet J, Lok T S L 1999 *Comput. Methods Appl. Mech. Engng.* **180** 97
- [35] Liu W K, Li S, Belytschko T 1997 *Comput. Methods Appl. Mech. Engng.* **143** 113
- [36] Johnson G R, Stryk R A, Beissel S R 1996 *Comput. Methods Appl. Mech. Engng.* **139** 347
- [37] Belytschko T, Krongauz Y, Dolbow J, Gerlach C 1998 *Int. J. Numer. Meth Engng.* **43** 785
- [38] Krongauz Y, Belytschko T 1997 *Comput. Methods Appl. Mech. Engng.* **146** 371
- [39] Randles P W, Libersky L D 1996 *Comput. Methods Appl. Mech. Engng.* **139** 375
- [40] Kanok-Nukulchai W, Bary W, Saran-Yasoontorn K, Bouillard P H 2001 *Int. J. Numer. Meth Engng.* **52** 705
- [41] Belytschko T, Liu W K, Moran B 2000 *Nonlinear Finite Elements for Continua and Structures* (New York: John Wiley and Sons Ltd) p1
- [42] Liu G R, Liu M B 2003 *Smoothed particle hydrodynamics: a meshfree particle method*. (Singapore: World Scientific) p1
- [43] Caleyron F, Combescure A, Faucher V, Potapov S 2012 *Int. J. Numer. Meth Engng.* **90** 707
- [44] Dyka C T, Randles P W, Ingel R P 1997 *Int. J. Numer. Meth Engng.* **40** 2325
- [45] Belytschko T, Guo Y, Liu W K, Xiao S P 2000 *Int. J. Numer. Meth Engng.* **40** 1359
- [46] Hughes T J R, Liu W K 1978 *J. Appl. Mech.* **45** 371
- [47] Monaghan J J, Gingold R 1983 *J. Comput. Phys.* **52** 374
- [48] Betsch P, Menzel A, Stein E 1998 *Comput. Methods Appl. Mech.* **155** 273
- [49] Macneal R H, Harder R L 1985 *Finite Elem. Anal. Des.* **1** 3
- [50] Simo J C, Fox D D, Rifai M S 1989 *Comput. Methods Appl. Mech.* **73** 53
- [51] Swaddiwudhipong S, Liu Z S 1996 *Thin Wall Struct.* **26** 223
- [52] Owen D R J, Hinton E 1980 *Finite Elements in Plasticity: Theory and Practice* (Swansea: Pineridge press) p254

Static and dynamic analysis of elastic shell structures with smoothed particle method*

Ming Fu-Ren Zhang A-Man[†] Yao Xiong-Liang

(College of Shipbuilding Engineering, Harbin Engineering University, Harbin 150001, China)

(Received 25 December 2012; revised manuscript received 17 January 2013)

Abstract

Meshfree smoothed particle method has great advantages in dealing with nonlinear problems of solid structures. However, due to the instability and poor accuracy, it has been limited to the application in solid mechanics for a long time; especially the study on shell structure with smoothed particle method is even rarely reported on account of expensive three-dimensional continuum modeling and the phenomenon of numerical fracture in the traditional method. The moving least square function and total Lagrangian equations are introduced as an approximation function and approximation equations respectively to improve the stability and numerical accuracy of smoothed particle method; on this basis, the method of static analysis is proposed, and meanwhile the dynamic analysis method is also refined. Finally, the internationally recognized standard test models on static and dynamic problems are adopted to verify the above shell theory, and the results are in good agreement with the existing data, which proves the validity and reliability of the present numerical model. This paper aims to provide a reference for the further research of smoothed particle method on nonlinear shell structures, such as crack, crushing, etc.

Keywords: elastic shell, static and dynamic analysis, smoothed particle hydrodynamics (SPH), completeness and stability

PACS: 02.60.-x, 02.60.cb, 46.15.-x

DOI: 10.7498/aps.62.110203

* Project supported by the Excellent Young Scientists Fund (Grant No. 51222904), the Key Program of the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 50939002), and the Llyod's Register Educational Trust (The LRET).

[†] Corresponding author. E-mail: zhangaman2010@gmail.com