

中空圆柱形边界条件下非线性介质中的晶格孤子*

姜先策¹⁾ 徐斌²⁾ 梁检初³⁾ 易林^{4)†}

1) (海军航空工程学院青岛校区航空机械系, 青岛 266041)

2) (华北水利水电学院数学与信息科学学院, 郑州 450008)

3) (惠州学院电子科学系, 惠州 516000)

4) (华中科技大学物理学院, 武汉 430074)

(2012年12月10日收到; 2013年3月18日收到修改稿)

本文采用自相似方法求解中空圆柱形边界贝塞尔晶格中变系数非线性薛定谔方程, 得到了与数值模拟解一致的解析解, 表明由非衍射贝塞尔光束诱导的光子晶格可支持稳定的自相似孤子簇. 精确解 ψ_{mn} 是 $n+2$ 层, $2m$ 极的多极孤立波, 其形状及大小在传播过程中保持不变.

关键词: 空间光孤子, 贝塞尔晶格, 边界, 自相似

PACS: 02.30.Jr, 42.65.Tg

DOI: 10.7498/aps.62.110205

1 引言

在光子晶体中, 相邻光学势的线性耦合效应和非线性效应影响着孤子的动力学行为, 当这两种效应恰好到达平衡时则形成自陷状态, 会产生晶格孤子或离散孤子. 线性折射率的空间调制深远地影响着光束的衍射特性和孤子的特性 (包括涡旋孤子和项链孤子). 光折变液晶中的晶格孤子已经在理论上被提出并被实验证实存在, 在光折变液晶材料中, 折射率的调制可被光学诱导^[1-4]. 贝塞尔光子晶格拥有圆柱形对称性, 可以被相应的非衍射光束所诱导. 这里假设折射率的轮廓是由 m 阶贝塞尔光束诱导产生的, 这有助于涡旋孤子和项链孤子的形成. 原则上讲, 在光折变半导体液晶材料 (如 GaAs:Cr 和 InP:Fe) 中, 非线性系数、衍射和折射率调制深度都随着传播距离而改变, 这样的实验条件是可以被控制的^[5-8]. 非线性偏微分方程的解析解是理论物理学家和应用数学家特别感兴趣的课题. 关于描述光束传播或光脉冲演化的一维非线性薛定谔方程, 出现了很多解析求解方法及相应的解

析解^[9-14]. 然而, 据我们所知, 高维非线性薛定谔方程的求解要困难得多, 比较少见有相关的求解方法^[7-10]. 本文考虑含贝塞尔晶格势的二维变系数非线性薛定谔方程, 在中空圆柱形边界条件下, 得到自相似孤立波解.

2 贝塞尔晶格中的自相似解

在伴有横向折射率调制的块状非线性介质中, 我们考虑光沿 z 轴的传播. 通常, 光场的复振幅是由变系数广义薛定谔方程描述的^[7,8]:

$$i \frac{\partial \psi}{\partial z} = \frac{\beta(z)}{2} \nabla_{\perp}^2 \psi - \gamma(z) |\psi|^2 \psi + p(z) R(r, \varphi, z) \psi + i \frac{g(z)}{2} \psi, \quad (1)$$

其中算符 $\nabla_{\perp}^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$ 为横向拉普拉斯算符, $\beta(z)$ 为衍射系数; $\gamma(z)$ 为非线性系数, $\gamma(z) > 0$ 代表聚焦型, 反之为散焦型; $p(z)$ 是与折射率调制深度成正比的参量; $R(r, \varphi, z)$ 代表横向折射率的轮廓; $g(z)$ 代表增益分布系数. 根据自相似法,

* 国家自然科学基金 (批准号: 61144004, 51171069, 11147180) 资助的课题.

† 通讯作者. E-mail: yilin@mail.hust.edu.cn

设方程 (1) 的相似解的形式为

$$\psi(r, \varphi, z) = \frac{1}{1 - c_0 D(z)} F\left(\frac{r}{1 - c_0 D(z)}\right) \times \Phi(\varphi) e^{\frac{G(z)}{2} + i[a(z) + c(z)r^2]}, \quad (2)$$

其中 c_0 为非零常数, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$

$$D(z) = 2 \int_0^z \beta(z') dz', \quad (3)$$

$$G(z) = \int_0^z g(z') dz'. \quad (4)$$

设

$$w(z) = 1 - c_0 D(z), \quad (5)$$

$$\theta(z, r) = \frac{r}{1 - c_0 D(z)}. \quad (6)$$

分离实部和虚部得到

$$\begin{aligned} & \frac{2c_0\beta(z)}{1 - c_0 D(z)} F(\theta) + \frac{2c_0\beta(z)r}{[1 - c_0 D(z)]^2} \frac{dF(\theta)}{d\theta} \\ & + \frac{g(z)}{2} F(\theta) = \frac{[2c(z)r]\beta(z)}{1 - c_0 D(z)} \frac{dF(\theta)}{d\theta} \\ & + 2c(z)\beta(z)F(\theta) + \frac{g(z)}{2} F(\theta), \quad (7) \\ & - \left[\frac{da(z)}{dz} + \frac{dc(z)}{dz} r^2 \right] F(\theta) \\ & = \frac{\beta(z)}{2} \left\{ \frac{1}{[1 - c_0 D(z)]^2} \frac{d^2 F(\theta)}{d\theta^2} - [2c(z)r]^2 F(\theta) \right. \\ & \left. + \frac{1}{r} \left[\frac{1}{1 - c_0 D(z)} \frac{dF(\theta)}{d\theta} \right] + \frac{1}{r^2} \frac{F(\theta)}{\Phi(\varphi)} \frac{d^2 \Phi(\varphi)}{d\varphi^2} \right\} \\ & - \frac{\gamma(z)}{[1 - c_0 D(z)]^2} |F(\theta)|^2 |\Phi(\varphi)|^2 e^{G(z)} F(\theta) \\ & + pRF(\theta). \quad (8) \end{aligned}$$

比较 (7) 式中 $F(\theta)$ 和 $\frac{dF(\theta)}{d\theta}$ 的系数得

$$c(z) = \frac{c_0}{1 - c_0 D(z)}, \quad (9)$$

$$\frac{dc(z)}{dz} = \frac{c_0^2 D'(z)}{[1 - c_0 D(z)]^2} = 2\beta(z)c^2(z), \quad (10)$$

将 (9), (10) 式代入 (8) 式并整理得到

$$\begin{aligned} & \theta^2 \frac{d^2 F(\theta)}{d\theta^2} + \theta \frac{dF(\theta)}{d\theta} + \left\{ \frac{2[1 - c_0 D(z)]^2}{\beta(z)} \frac{da(z)}{dz} \theta^2 \right. \\ & \left. + \frac{1}{\Phi(\varphi)} \frac{d^2 \Phi(\varphi)}{d\varphi^2} \right\} F(\theta) + \Pi(z, r, \varphi) = 0, \quad (11) \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} \Pi(z, r, \varphi) = & - \frac{2r^2}{\beta(z)} \left\{ \frac{\gamma(z)}{[1 - c_0 D(z)]^2} \right. \\ & \left. \times e^{G(z)} |F(\theta)\Phi(\varphi)|^2 - pR \right\} F(\theta). \quad (12) \end{aligned}$$

令

$$\frac{2[1 - c_0 D(z)]^2}{\beta(z)} \frac{da(z)}{dz} = \lambda^2, \quad (13)$$

得到

$$a(z) = a_0 + \frac{\lambda^2}{2} \int_0^z \frac{\beta(z')}{[1 - c_0 D(z')]^2} dz'. \quad (14)$$

令

$$\rho(z) = \frac{\beta(z)}{\gamma(z)}, \quad (15)$$

可得

$$g(z) = \frac{1}{\rho(z)} \frac{d\rho(z)}{dz}. \quad (16)$$

令

$$\frac{1}{\Phi(\varphi)} \frac{d^2 \Phi(\varphi)}{d\varphi^2} = -m^2, \quad (17)$$

其通解为

$$\Phi(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{1+q^2}} [\cos(m\varphi) + iq \sin(m\varphi)], \quad (18)$$

其中 q 代表光强调制深度, $0 \leq q \leq 1$, 根据周期边界条件, 角量子数 m 为整数. 将 (13) 式和 (17) 式代入方程 (11) 得到

$$\begin{aligned} & \theta^2 \frac{d^2 F(\theta)}{d\theta^2} + \theta \frac{dF(\theta)}{d\theta} + (\lambda^2 \theta^2 - m^2) F(\theta) \\ & + \Pi(z, r, \varphi) = 0. \quad (19) \end{aligned}$$

(19) 式中前三项都与相位角 φ 无关, 而 $\Pi(z, r, \varphi)$ 是 φ 的函数, 所以 $\Pi(z, r, \varphi) = 0$, 由此可推出

$$p(z) = \frac{-e^{G(z)} \gamma(z)}{[1 - c_0 D(z)]^2}, \quad (20)$$

以及光子晶格函数

$$R(z, r) = [F(\theta)\Phi(\varphi)]^2. \quad (21)$$

由 (19) 得到整数阶贝塞尔方程

$$\begin{aligned} & \theta^2 \frac{d^2 F(\theta)}{d\theta^2} + \theta \frac{dF(\theta)}{d\theta} + (\lambda^2 \theta^2 - m^2) F(\theta) \\ & = 0, \quad (22) \end{aligned}$$

其解为

$$F(\theta) = C_1 J_m(\lambda\theta) + C_2 N_m(\lambda\theta), \quad (23)$$

其中 m 阶贝塞尔函数

$$J_m(\lambda\theta) = \sum_0^\infty \frac{(-1)^k}{k!(m+k)!} \left(\frac{\lambda\theta}{2}\right)^{m+2k},$$

$$(m = 0, 1, 2, \dots), \quad (24)$$

m 阶诺埃曼函数

$$N_m(\lambda\theta) = \frac{2}{\pi} \left(\ln \frac{\lambda\theta}{2} + C \right) J_m(\lambda\theta)$$

$$- \frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{m-1} \frac{(m-n-1)!}{n!} \left(\frac{\lambda\theta}{2}\right)^{-m+2n}$$

$$- \frac{1}{\pi} \sum_{n=m}^\infty \frac{(-1)^{n-m}}{n!(n-m)!}$$

$$\times \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right) \left(\frac{\lambda\theta}{2}\right)^{-m+2n}$$

$$- \frac{1}{\pi} \sum_{n=m+1}^\infty \frac{(-1)^{n-m}}{n!(n-m)!}$$

$$\left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n-m}\right)$$

$$\times \left(\frac{\lambda\theta}{2}\right)^{-m+2n}. \quad (25)$$

3 中空圆柱中自相似孤立波

由于坐标原点 ($\theta = 0$) 为诺伊曼函数的奇点, 如上函数所表示的波在实心圆柱中不存在. 于是我们考虑在中空圆柱条件下的孤立波解. 不失一般性, 我们假设衍射系数和非线性系数的分布如下 $\beta(z) = \beta_0 e^{-\sigma z}$, $\gamma(z) = \gamma_0 e^{\alpha z}$. 易得此时方程 (1) 的孤立波解为

$$\psi(r, \varphi, z) = \frac{1}{1 - c_0 D(z)} F\left(\frac{r}{1 - c_0 D(z)}\right) \Phi(\varphi) e^{\frac{G(z)}{2} + i[a(z) + c(z)r^2]}$$

$$= \frac{\sigma}{(\sigma - 2c_0\beta_0) + 2c_0\beta_0 e^{-\sigma z}} [C_1 J_m(\lambda\theta) + C_2 N_m(\lambda\theta)]$$

$$\times \Phi(\varphi) e^{\frac{-(\alpha+\sigma)z}{2} + i\left\{a_0 + \frac{\lambda^2\sigma}{4c_0} \left[\frac{1}{(\sigma-2c_0\beta_0)+2c_0\beta_0 e^{-\sigma z}} - \frac{1}{\sigma}\right] + \frac{c_0\sigma r^2}{(\sigma-2c_0\beta_0)+2c_0\beta_0 e^{-\sigma z}}\right\}}, \quad (26)$$

其中 a_0, c_0, β_0 是任意非零系数.

在中空圆柱形边界条件下

$$\psi_0|_{r=r_1} = [C_1 J_m(\lambda r_1) + C_2 N_m(\lambda r_1)]$$

$$\times \Phi(\varphi) e^{i(a_0 + c_0 r_1^2)}$$

$$= 0, \quad (27)$$

$$\psi_0|_{r=r_2} = [C_1 J_m(\lambda r_2) + C_2 N_m(\lambda r_2)]$$

$$\times \Phi(\varphi) e^{i(a_0 + c_0 r_2^2)}$$

$$= 0 \quad (28)$$

其中 r_1, r_2 为中空圆柱形的内外半径. 由上两式可得

$$C_1 J_m(\lambda r_1) + C_2 N_m(\lambda r_1) = 0, \quad (29)$$

$$C_1 J_m(\lambda r_2) + C_2 N_m(\lambda r_2) = 0. \quad (30)$$

这个齐次线性方程组只能解出无意义的 $C_1 = C_2 = 0$, 除非系数行列式等于零, 即

$$J_m(\lambda r_1) N_m(\lambda r_2) - J_m(\lambda r_2) N_m(\lambda r_1) = 0. \quad (31)$$

设方程的根为 λ_m^n , 代入 (29) 式, 求得 C_{2n} 与 C_{1n} 的比值

$$\kappa_n = \frac{C_{2n}}{C_{1n}} = -\frac{J_m(\lambda_m^n r_1)}{N_m(\lambda_m^n r_1)}, \quad (32)$$

为简化表示, 令

$$F_{mn}(\theta) = C_{1n} J_m(\lambda_m^n \theta) + C_{2n} N_m(\lambda_m^n \theta),$$

则 (26) 式可表示为

$$\Psi_{mn}(r, \varphi, z) = \frac{\sigma}{(\sigma - 2c_0\beta_0) + 2c_0\beta_0 e^{-\sigma z}} F_{mn}(\theta) \Phi(\varphi)$$

$$\times e^{\frac{-(\alpha+\sigma)z}{2} + i\left\{a_0 + \frac{\lambda^2\sigma}{4c_0} \left[\frac{1}{(\sigma-2c_0\beta_0)+2c_0\beta_0 e^{-\sigma z}} - \frac{1}{\sigma}\right] + \frac{c_0\sigma r^2}{(\sigma-2c_0\beta_0)+2c_0\beta_0 e^{-\sigma z}}\right\}}. \quad (33)$$

我们取材料内径为 $r_1 = 1$, 外径为 $r_2 = 8$. 图 1 中给出了在此边界条件下函数 F_{mn} 在 $m = 0, n = 1, 2, 3, 4$ 时对应的几条函数曲线. 图中函数特点是在边界处函数值为零, 在边界内, 有多个极值, 由内向外, 极值的绝对值是依次减小的.

图 2 中第一行和第二行是 $|\psi_{10}|^2$ 在 $z = 0$ (第一列), $z = 10$ (第二列), $z = 20$ (第三列) 和 $z = 30$ (第四列) 处的解析解的光强分布三维图 2(a1)—(d1) 及其在 x - y 平面上的投影图 2(a2)—(d2). 这里取参数 $\sigma = 0.01, a_0 = c_0 = q = 1, \alpha = \beta_0 = -0.01, m = g(z) = 0$. 可以看出, 中空圆柱中孤立波的波形在传播过程中不发生改变, 只是光波强度发生变化. 我们并用数值模拟对孤立波的稳定性予以检验. 采用解析解的初始解作为数值模拟的初始条件并加以 $\sigma^2 = 0.05$ 的白噪声, 利用基于有限元的数值计算软件 Multiphysics Comsol 对方程 (1) 进行数值模拟. 结果如图 2(e)—(h) 所示. 显然, 白噪声并没有导致孤立波的坍塌, 说明孤立波是稳

定的. 这是因为光子晶格能大大抑制孤子的不稳定性.

图 3 显示的是取 $q = 0.5, m$ 和 n 分别取 1, 2, 3 时, 在 $z = 10$ 处的 ψ_{mn} 光子光强分布图. 由图可看出 ψ_{mn} 孤子的振幅包络形状由一套量子数 (n, m) 决定. 亮环的数目为 $n + 2$, 而每个光环都是 $2m$ 极, 即 ψ_{mn} 是 $n + 2$ 层, $2m$ 极的多极孤子.

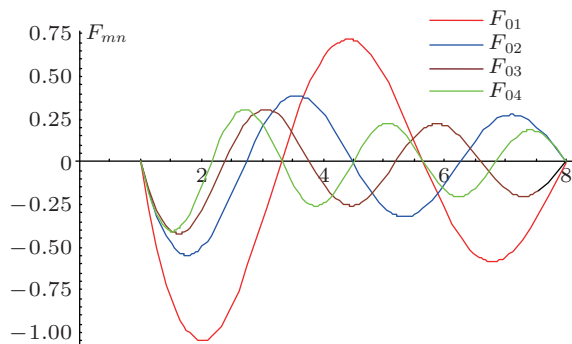


图 1 函数 F_{mn} 在 $m = 0, n = 1, 2, 3, 4$ 时对应曲线

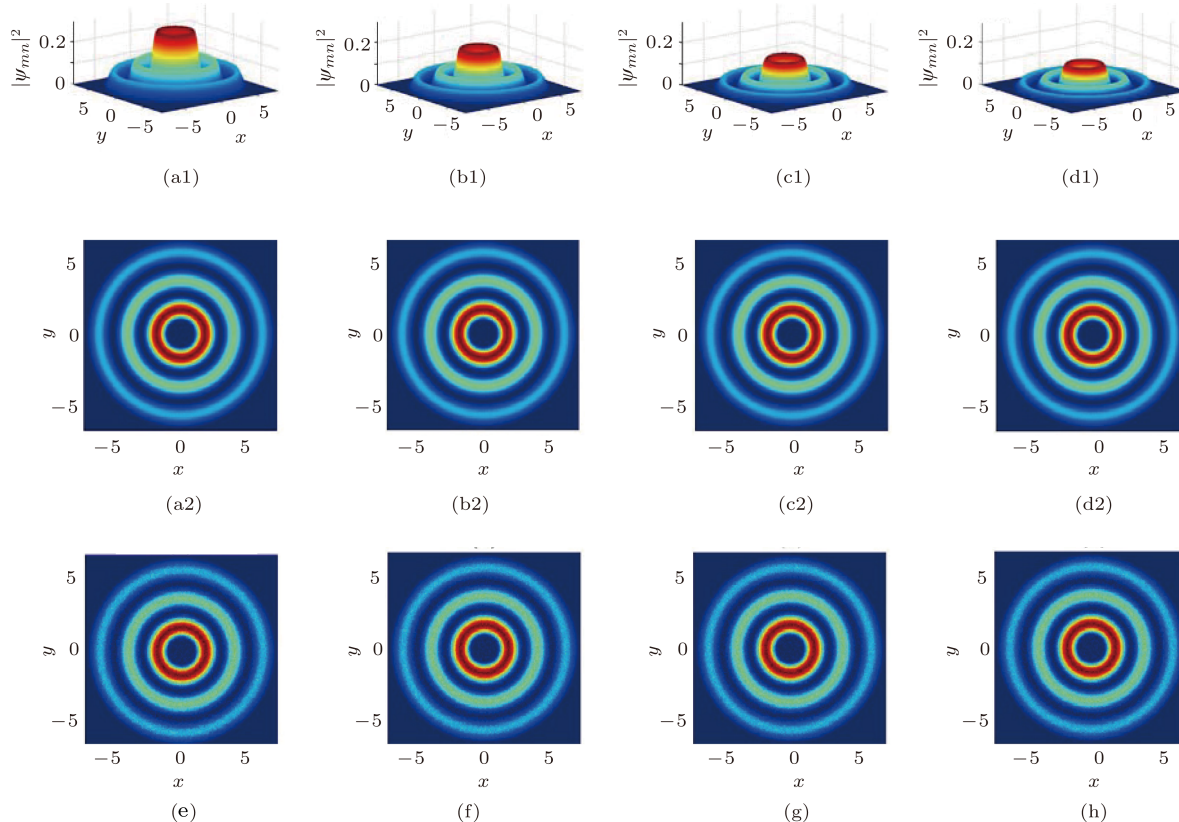


图 2 ψ_{10} 孤子的传播 ($|\psi_{10}|^2$ 在 $z = 0$ (第一列), $z = 10$ (第二列), $z = 20$ (第三列) 和 $z = 30$ (第四列) 处的三维图 (a1)—(d1) 及其在 x - y 平面上的投影图 (a2)—(d2) 及 (e)—(h). 前两行是解析解结果, 第三行是数值模拟结果)

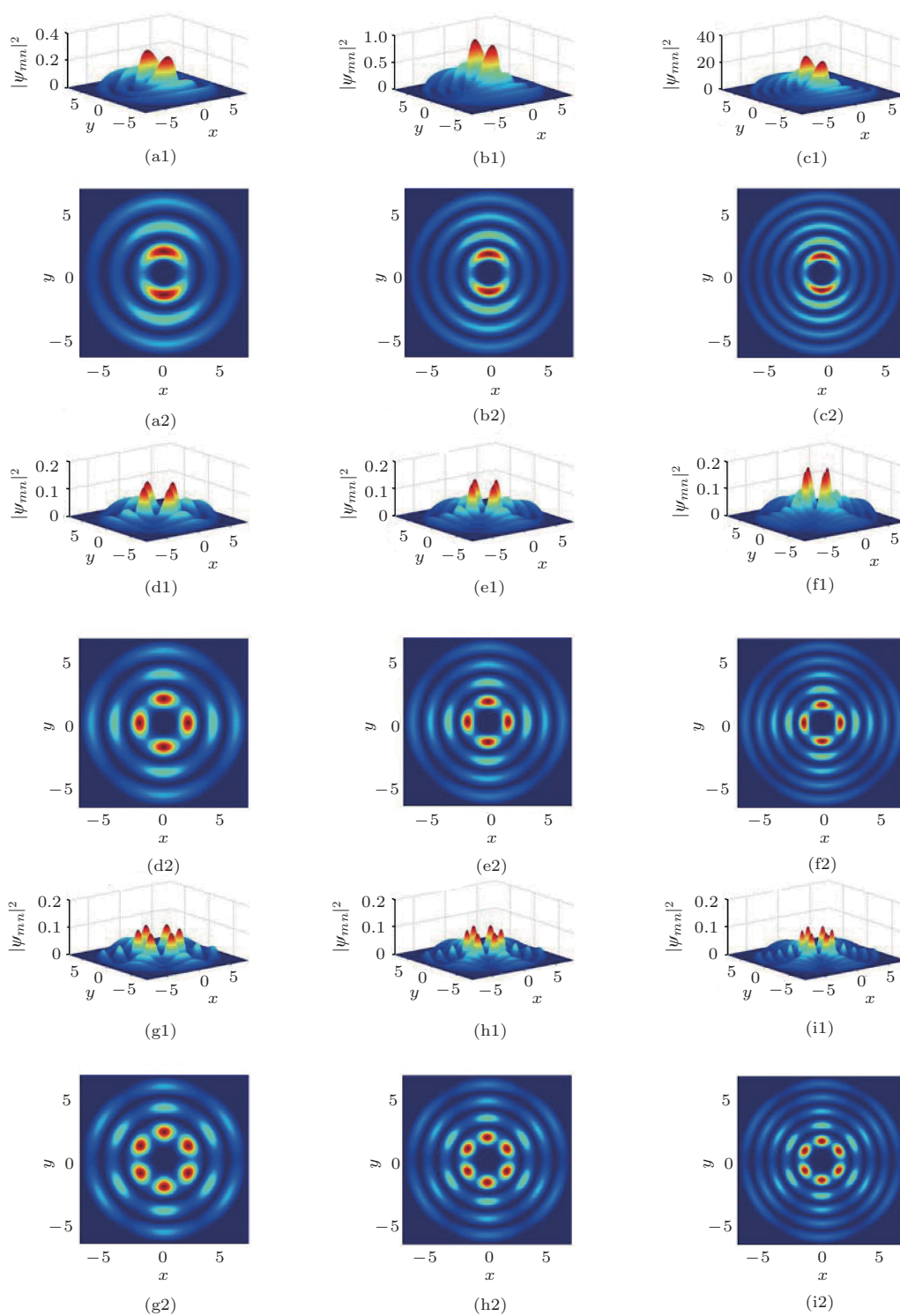


图3 ψ_{mn} 孤子光强分布图 (这里 $z=10, q=0.5$, 其他参数同图2) (a1)—(i1) 是三维光强图; (a2)—(i2) 是光强投影图; 三列分别对应于 $n=1, 2, 3$ 的情况 (第一二行, 第三四行, 第五六行分别对应 $m=1, 2, 3$ 的情况)

4 结 论

本文采用自相似方法求解变系数非线性薛定谔方程, 研究中空圆柱形边界条件下贝塞尔晶格中的自相似孤子, 得到的解析解与数值模拟结果是一

致的, 表明由非衍射贝塞尔光束诱导的光子晶格可能支持稳定的自相似孤子簇. 精确解 ψ_{mn} 是 $n+2$ 层, $2m$ 极的多极孤立波, 其形状及大小在传播过程中保持不变.

- [1] Fleischer J W, Segev M, Efremidis N, Christodoulides D N 2003 *Nature* (London) **422** 147
- [2] Efremidis N K, Hudock J, Christodoulides D N, Fleischer J W, Cohen O, Segev M 2003 *Phys. Rev. Lett.* **91** 213906
- [3] Kartashov Y V, Vysloukh V A, Torner L 2004 *Opt. Express* **12** 2831
- [4] Neshev D, Ostrovskaya E, Kivshar Y, Krolikowski W 2003 *Opt. Lett.* **28** 710
- [5] Chen S M, Shi S X, Dong H Z 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 1379 (in Chinese) [陈守满, 石顺祥, 董洪舟 2007 物理学报 **56** 1379]
- [6] Qing X J, Shao Y Q, Guo Q 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 5269 (in Chinese) [秦晓娟, 邵毅全, 郭旗 2007 物理学报 **56** 5269]
- [7] Liang J C, Liu H, Liu F, Yi L, 2009 *J. Phys. A Math. Theor.* **42** 335204
- [8] Liang J C, Cai Z B, Yi L, Wang H C, 2010 *Opt. Commun.* **283** 386
- [9] Song X, Li H M 2013 *Phys. Lett. A* **377** 714
- [10] He J R, Li H M, Li L 2012 *Phys. Lett. A* **376** 3108
- [11] Ablowitz M J 1991 *Nonlinear Schrödinger Equation and Inverse Scattering*. (New York: Cambridge University Press)
- [12] Matveev V B, Salle M A 1991 *Dardoux Transformations and Solitons* (Berlin: Springer Series in Non-linear Dynamics)
- [13] Kruglov V I, Peacock A C, Harvey J D 2003 *Phys. Rev. Lett.* **90** 113902
- [14] Zhang S W, Yi L 2008 *Phys. Rev. E* **78** 026602

Optical lattice solitons in nonlinear media under the condition of hollow cylinder boundary*

Jiang Xian-Ce¹⁾ Xu Bin²⁾ Liang Jian-Chu³⁾ Yi Lin^{4)†}

1) (Department of Mechanical and Aeronautical Engineering, Naval Aeronautical Engineering Institute Qingdao Branch, Qingdao 266041, China)

2) (Department of Mathematics and Information Sciences, North China Institute of Water Conservancy and Hydroelectric Power, Zhengzhou 450008, China)

3) (Department of Electronic Science, Huizhou University, Guangdong 516001, China)

4) (Department of Physics, Huazhong University of Science & Technology, Wuhan 430074, China)

(Received 10 December 2012; revised manuscript received 18 March 2013)

Abstract

By using the self-similar method to solve the nonlinear Schrödinger equation with distributed coefficients, the self-similar solitons in Bessel lattice are studied under the hollow cylinder boundary conditions and the analytical solutions are obtained. Analytical solutions and numerical solutions are found to be identical. The result indicates that optical lattices induced by non-diffractive Bessel beams are possible to support stable self-similar soliton clusters.

Keywords: spatial optical solitons, Bessel lattice, boundary, self-similarity

PACS: 02.30.Jr, 42.65.Tg

DOI: 10.7498/aps.62.110205

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 61144004, 51171069, 11147180).

† Corresponding author. E-mail: yilin@mail.hust.edu.cn