

场与非线性介质原子相互作用模型的 量子纠缠动力学特性*

吕海艳 袁伟 侯喜文†

(华中师范大学物理科学与技术学院, 武汉 430079)

(2012年12月28日收到; 2013年2月27日收到修改稿)

在场和非线性介质原子相互作用模型下, 利用 concurrence 和约化 Neumann 熵两种纠缠量度, 研究推广的二项式场态和原子基态的量子纠缠动力学. 结果表明 concurrence 与约化 Neumann 熵是正关联占优势; 在合适的条件下, 纠缠在较长时间内几乎是不变的. 这有利于量子信息过程.

关键词: 推广的二项式态, concurrence, 约化 Neumann 熵

PACS: 03.65.Ud, 42.50.Dv

DOI: 10.7498/aps.62.110301

1 引言

由于量子纠缠在量子信息科学中起着非常重要的作用, 人们提出了多种纠缠量度如约化 Neumann 熵, concurrence^[1], 和负性等^[2]. 约化 Neumann 熵是通过计算子系统的约化密度矩阵得到, 能很好的描述纯态的量子纠缠. 对两量子比特, concurrence 能用解析的数学公式计算^[1], 负性是计算部分转置密度矩阵的迹模^[2]. 尽管它们的定义完全不同, 但它们能很好地描述纠缠态的特性, 特别是约化 Neumann 熵被广泛地用来研究场与原子相互作用系统^[3]和其他模型^[4-8]的量子纠缠动力学.

最近文献^[9]给出任意两组分量子态的 concurrence, 其优点是不仅考虑了密度矩阵的部分转置, 而且还考虑了密度矩阵的重排. 我们将利用文献^[9]提出的 concurrence 来研究场与原子相互作用系统的纠缠动力学, 并计算约化 Neumann 熵, 发现 concurrence 与约化 Neumann 熵主要是正关联的. 此外, 在合适的模型参数与初态的条件下, 量子纠缠在较长时间内具有几乎不变的特性, 使得人们有足够的时间来完成量子信息处理.

2 模型

我们考虑场与非线性介质原子相互作用的系统为研究模型, 其哈密顿量^[3]为 ($\hbar = 1$)

$$H = \omega a^\dagger a + \omega_0 b^\dagger b + \gamma b^{\dagger 2} b^2 + g(a^\dagger b + b^\dagger a), \quad (1)$$

其中 ω 和 ω_0 分别为场和原子的频率; a^\dagger 和 a 是场的产生和湮没算符; b^\dagger 和 b 是原子的产生和湮没算符; γ 是非线性参数; g 是场与原子的耦合参数. 当原子处在基态与场处在光子相加相干态的直积为初始态, 将模型参数固定为 $\omega = \omega_0 = 1$, $\gamma = 1$, $g = 100$, 文献^[3]研究了约化 Neumann 熵动力学. 由于推广的二项式态能在实验中实现, 还能用于量子门^[10], 我们将考虑场处在推广的二项式态和几组不同的模型参数 γ 和 g , 研究 concurrence 和约化 Neumann 熵的动力学.

3 纠缠动力学特性

我们选取场的初态为推广的二项式态, 而原子的初态为基态, 整个系统的初态为

$$|\psi(0)\rangle = |N, p, \phi\rangle_a \otimes |0\rangle_b,$$

* 国家自然科学基金资助 (批准号: 11174099) 资助的课题.

† 通讯作者. E-mail: xwhou@phy.ccnu.edu.cn

$$|N, p, \phi\rangle_a = \sum_{n=0}^N \left[\frac{N!}{(N-n)!n!} p^n (1-p)^{N-n} \right]^{1/2} \times e^{in\phi} |n\rangle_a, \quad (2)$$

其中 $|N, p, \phi\rangle_a$ 是推广的二项式态^[10], N 是光子数, $0 \leq p \leq 1$, ϕ 是相角, $|n\rangle_a$ 是场的 Fock 态, $|0\rangle_b$ 是原子的基态, 下标 a 和 b 分别对应于场和原子子系统, 初态的时间演化是 $|\psi(t)\rangle = e^{-iHt}|\psi(0)\rangle$, 相应的密度矩阵 $\rho = |\psi(t)\rangle\langle\psi(t)|$.

我们利用两种纠缠量度来研究场与原子相互作用模型 (1) 的初态 (2) 的纠缠动力学. 一种量度是 concurrence, 其定义^[9] 为

$$C(t) = \frac{1}{2} [\max(\|\rho^T\|, \|\Re(\rho)\|) - 1], \quad (3)$$

其中 $\|\chi\| = \text{Tr}\sqrt{\chi\chi^\dagger}$ 代表矩阵 χ 的迹模^[2,4], χ^\dagger 是 χ 转置复共轭, $\rho_{ik,jl}^\dagger \equiv \rho_{ik,jl}$ 是将密度矩阵对第二个子系统进行部分转置, $\Re(\rho)_{ij,kl} \equiv \rho_{ik,jl}$ 是对密度矩阵进行重排, 下标 i 和 j 分别是场系统的行列指标, k 和 l 分别是原子系统的行列指标. 考虑到负性^[2] 以及推广的负性^[11] 的定义, 我们将 concurrence 的系数取为 1/2. 另一种纠缠量度是约化 Neumann 熵, 其定义为

$$S(t) = -\text{Tr}(\rho_a \ln \rho_a), \quad (4)$$

其中 $\rho_a = \text{Tr}_b \rho$ 是将密度矩阵对其中一个子系统 b 求迹.

在共振 ($\omega = \omega_0 = 1$) 条件下, 我们计算 concurrence 和约化 Neumann 熵的时间演化. 图 1 给出了 $g = 1$, $N = 18$, $\phi = \frac{\pi}{4}$: $\gamma = 0.02$ ((a),(c)); $\gamma = 0.25$ ((b),(d)); $p = 0.04$ ((a),(b)); $p = 0.5$ ((c),(d)) 的 concurrence 和约化 Neumann 熵. 在图 1 中, 我们可以得到两个有趣的结果. 在早期的时间演化阶段, concurrence 的增加率比约化 Neumann 熵的增加率大; concurrence 与约化 Neumann 熵主要是正关联的, 即它们同时增加或同时减小, 但两者数值上的差别依赖模型参数和初态, 也依赖演化时间. 在图 1(d) 中, 我们注意到当 $t > 16$, concurrence 与约化 Neumann 熵出现短时间的反关联行为, 即一个量增加 (减小), 而另一个量减小 (增加). 需要说明的是, 在研究其他模型的纠缠动力学演化过程中^[12-14], 人们也注意到不同的纠缠量度会出现短时间的反关联行为. 这主要来源于纠缠量度的定义有较大的差别, 以及模型和初态的特性. Neumann 熵的计算需要对子系统进行约化, 会遗失部分纠缠信息, 因而不能描述混态的量子纠缠, 而 concurrence 包含所有的纠缠信息, 能很好地描述纯态和混态的量子纠缠. 当然, 不同的纠缠量度都有自己独特的优点与不足, 也有许多不同的应用. 最合适的纠缠量度的建立还需要量子纠缠和量子信息理论的深入研究和广泛应用.

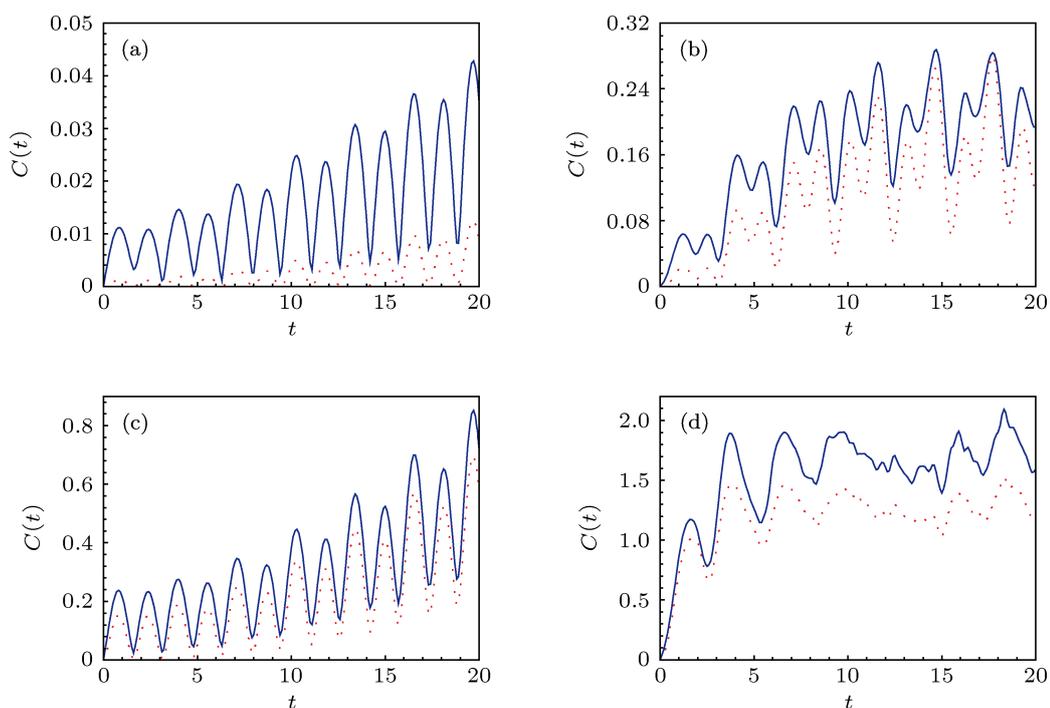


图 1 concurrence (实线) 和约化 Neumann 熵 (点线) 的时间演化, 其中 $g = 1$, $N = 18$, $\phi = \frac{\pi}{4}$: $\gamma = 0.02$ ((a),(c)); $\gamma = 0.25$ ((b),(d)); $p = 0.04$ ((a),(b)); $p = 0.5$ ((c),(d))

我们还研究了其他模型参数和初态, 以及较长的演化时间, 发现上述两个结论还是适用的, 图 2 是又一个例子. 在图 2 中, $g = 1, p = 1, \gamma = 0.02$ ((a),(c)); $\gamma = 0.25$ ((b),(d)); $N = 3$ ((a),(b)); $N = 6$ ((c),(d)) 的 concurrence 和约化 Neumann 熵. 当 $p = 1$ 时, 推广是二项式态退化为 Fock 态 $|N\rangle_a$. 从图 2(a) 可以看到, 在弱非线性参数 γ 和低激发

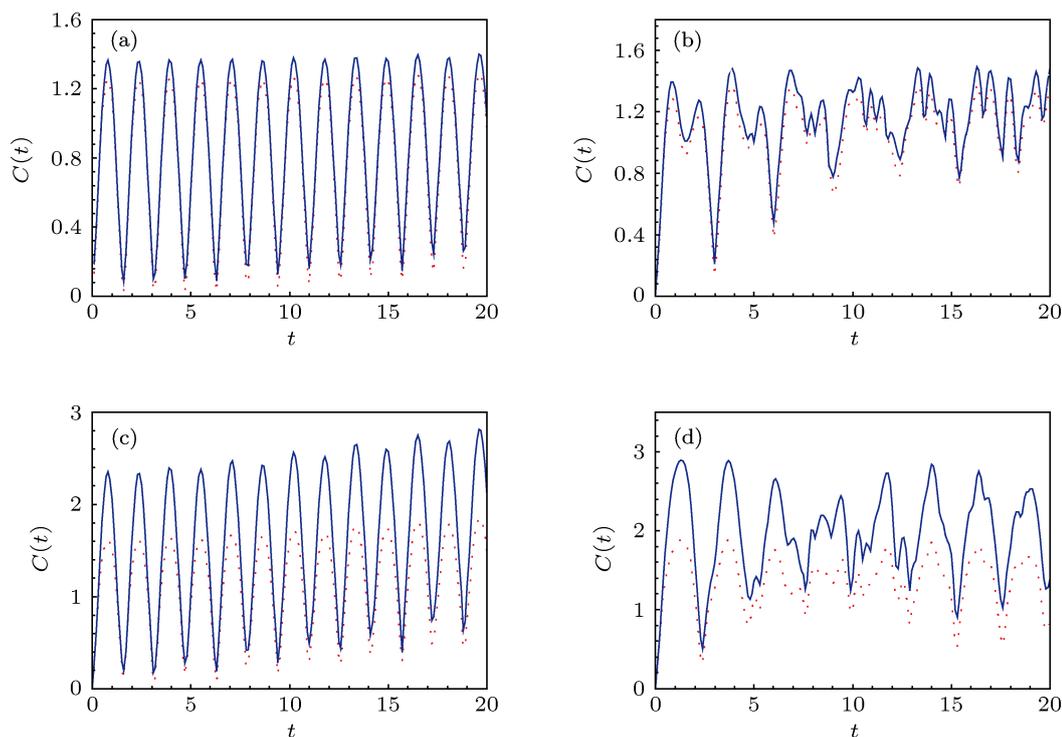


图 2 concurrence (实线) 和约化 Neumann 熵 (点线) 的时间演化, 其中 $g = 1, p = 1: \gamma = 0.02$ ((a),(c)); $\gamma = 0.25$ ((b),(d)); $N = 3$ ((a),(b)); $N = 6$ ((c),(d))

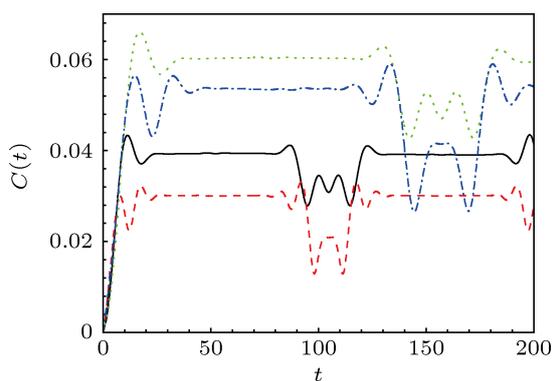


图 3 concurrence 的时间演化, 其中参数 $g = 0.005, \phi = \frac{\pi}{6}$: $\gamma = 0.03, p = 0.5, N = 15$ (实线); $\gamma = 0.03, p = 0.7, N = 15$ (短虚线); $\gamma = 0.02, p = 0.5, N = 15$ (点虚线); $\gamma = 0.02, p = 0.7, N = 12$ (短点虚线)

的约化 Neumann 熵还是与 concurrence 是正关联的, 因此我们在图 3 中略去了 Neumann 熵的曲线. 从图 3 可以看到 concurrence 的确在较长时间内具

Fock 态条件下, concurrence 和约化 Neumann 熵几乎是等同的, 且具有较好的准周期性.

我们在图 3 中画出了 concurrence 的四条曲线, 其中参数 $g = 0.005, \phi = \frac{\pi}{6}$: $\gamma = 0.03, p = 0.5, N = 15$ (实线); $\gamma = 0.03, p = 0.7, N = 15$ (短虚线); $\gamma = 0.02, p = 0.5, N = 15$ (点虚线); $\gamma = 0.02, p = 0.7, N = 12$ (短点虚线). 需要说明的是, 与这些参数对应

有几乎不变的特征. 此外, 通过适当减小非线性参数 γ 可以增加这个时间, 如段虚线所示, 这种较长时间的量子纠缠, 为人们提供了足够的时间来完成量子信息处理. 尽管它们的纠缠不是最大值, 但任何纠缠态都有利于量子信息过程 [15].

4 结论

我们研究了场与非线性介质中的原子相互作用系统的量子纠缠动力学, 发现纠缠的两种量度 concurrence 和约化 Neumann 熵是正关联占优势; 在适当的条件下, 几乎不变的纠缠具有较长的时间. 这有利于量子纠缠理论和量子信息. 此外, 我们可以探讨混态的纠缠特性, 包括多组分量子纠缠, 并考虑环境对纠缠的影响 [16,17].

- [1] Wootters K W 1998 *Phys. Rev. Lett.* **80** 2245
 [2] Vidal G, Werner F R 2002 *Phys. Rev. A* **65** 032314
 [3] Sudheesh C, Lakshmi S, Balakrishnan V 2006 *J. Phys. B* **39** 3345
 [4] Hou X W, Cheng C M 2009 *Chin. Phys. B* **18** 2719
 [5] Zhai L J, Zheng Y J, Ding S L 2012 *Chin. Phys. B* **21** 070503
 [6] Qi L N, Zhang S 2009 *Acta. Phys. Sin.* **58** 4630 (in Chinese) [齐琳娜, 张寿 2009 物理学报 **58** 4630]
 [7] Xia J P, Ren X Z, Cong H L, Wang X W, He S 2012 *Acta. Phys. Sin.* **61** 014208 (in Chinese) [夏建平, 任学藻, 从红璐, 王旭文, 贺树 2012 物理学报 **61** 014208]
 [8] Cui C C, Xie S Y, Yang Y P 2012 *Acta. Phys. Sin.* **61** 124206 (in Chinese) [崔丛丛, 谢双媛, 羊亚平 2012 物理学报 **61** 124206]
 [9] Chen K, Alberverio S, Fei S M 2005 *Phys. Rev. Lett.* **95** 040504
 [10] Franco R L, Compagno G, Messina A, Napoli A 2012 *Phys. Lett. A* **374** 2235
 [11] Chen K, Wu L A 2002 *Phys. Lett. A* **306** 14
 [12] Li Z J, Li J Q, Jin Y H, Nie Y H 2007 *J. Phys. B* **40** 3401
 [13] Hou X W, Chen J H, Wan M F, Ma Z Q 2008 *Eur. Phys. J. D* **49** 37
 [14] Hou X W, Wan M F, Ma Z Q 2009 *Phys. Rev. A* **79** 022308
 [15] Masanes L 2006 *Phys. Rev. Lett.* **96** 150501
 [16] Hou X W, Wan M F, Ma Z Q 2012 *Eur. Phys. J. D* **66** 152
 [17] Hou X W, Wan M F, Ma Z Q 2012 *Chin. Phys. B* **21** 103301

Dynamical entanglement in the model of field interacted with atoms of a nonlinear medium*

Lü Hai-Yan Yuan Wei Hou Xi-Wen[†]

(College of physical science and technology, Huazhong Normal University, Wuhan 430079, China)

(Received 28 December 2012; revised manuscript received 27 February 2013)

Abstract

The dynamical entanglement in a model of the field interacted with atoms in a nonlinear medium is studied in terms of concurrence and the reduced Neumann entropy for the generalized binomial state of the field and the ground state of atoms. It is shown that concurrence is dominantly-positively correlated with the reduced Neumann entropy. The entanglement under suitable condition is nearly unchanged for a long time. This is useful for quantum information processing.

Keywords: generalized binomial state, concurrence, reduced Neumann entropy

PACS: 03.65.Ud, 42.50.Dv

DOI: 10.7498/aps.62.110301

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 11174099).

[†] Corresponding author. E-mail: xwhou@phy.ccnu.edu.cn