

# 不同磁场环境下 Heisenberg XXZ 自旋链中的热量子失协\*

谢美秋 郭斌†

(武汉理工大学理学院, 武汉 430070)

(2012 年 12 月 26 日收到; 2013 年 2 月 5 日收到修改稿)

本文研究了不同磁场环境下一维 Heisenberg XXZ 自旋链中两量子比特的热量子失协特性. 在四种不同的磁场环境下: 1)  $B_1 = B_2 = 0$  (无磁场); 2)  $B_1 \neq 0, B_2 = 0$  (磁场只作用于其中一个量子比特); 3)  $B_1 = B_2$  (均匀磁场); 4)  $B_1 = -B_2$  (非均匀磁场), 对分别作用在每个量子比特上的磁场  $B_1$  和  $B_2$  对其量子关联的影响作了详细的讨论, 且数值计算和比较了其量子失协和量子纠缠的异同. 结果显示: 在有限温度下, 量子失协相比于量子纠缠更普遍, 且非均匀磁场相比于均匀磁场对量子失协和量子纠缠更有用, 更有利于量子通讯和量子信息处理过程.

**关键词:** 量子关联, 纠缠, 量子失协

**PACS:** 03.67.Ac, 03.67.Hk, 03.65.Ud

**DOI:** 10.7498/aps.62.110303

## 1 引言

量子纠缠是一种量子关联, 在通信和信息处理如量子编码、量子隐形传态、量子密钥分配和量子计算中起着举足轻重的作用<sup>[1-4]</sup>. 随着研究的深入, 人们发现量子纠缠仅仅是一种特殊的量子关联, 并没有完全刻画出经典关联与量子关联的本质区别, 于是比量子纠缠更一般的量子关联现象的研究变得迫切起来. 2001 年 Oliveier 和 Zurek 提出了量子失协<sup>[5]</sup> (quantum discord, QD) 这个概念用来量化量子关联. QD 是用来度量系统中的所有非经典关联, 在量子领域中与量子纠缠是不等价的. 同时据观察, QD 是更一般的量子关联度量, 它可能包含一个独立的量子纠缠. 此外, QD 给非经典关联提供一个更大区域的量子态, 并且提供一个非零值的量子关联<sup>[6,7]</sup>, 这种关联不是量子纠缠. 因此, QD 是一种新的量子信息处理的资源.

近十年来, QD 已在许多方面受到重视并引起广泛关注, 如热动力学及其关联<sup>[8-11]</sup>、量子计算<sup>[12]</sup>、失协的动力学<sup>[13,14]</sup>, 等等<sup>[15-18]</sup>. 另外, QD

还可用来提高量子卡诺热机的效率<sup>[9]</sup>, 同时它能更好地理解量子相变<sup>[19-21]</sup> 和格罗弗搜索过程<sup>[22]</sup>. 特别是, 一些文献研究了在不同的海森伯模型中的热纠缠和 QD 行为<sup>[23-25]</sup>. 结果显示: 热量子失协比热纠缠更强大, 因为 QD 在有限温度下不会消失, 但热纠缠在一定温度下完全消失. 所以在描述量子关联时 QD 比量子纠缠更实际, 而且基于 QD 的量子算法比那些基于量子纠缠的算法更强大. 另一方面, 关于外加磁场所带来的影响这一课题也已经有人研究<sup>[24,26]</sup>, 结果表明: 外加磁场不仅在量子纠缠中, 而且在 QD 中, 都起着很重大的作用. 然而, 在这些研究中外加磁场要么是均匀的要么是非均匀的. 因此, 在不同磁场环境下研究热量子失协是件非常有趣的事情. 基于此目的, 本文研究了在不同磁场环境下两量子比特的 Heisenberg XXZ 自旋链中的热量子失协, 通过比较其量子纠缠和 QD 的行为, 探讨二者之间存在的异同.

## 2 量子关联: 纠缠和量子失协

为了描述量子关联, 我们采用两种度量方法,

\* 中央高校基本科研业务费专项资金 (批准号: 2012-1a-053) 资助的课题.

† 通讯作者. E-mail: binguo@whut.edu.cn

即纠缠 (concurrence,  $C$ ) 和 QD. 由 Wootters<sup>[27]</sup> 定义的  $C$  是计算两个量子比特混合态  $\rho_{AB}$  的形成纠缠度, 它可以由  $C = \max \{ \sqrt{\lambda_1} - \sqrt{\lambda_2} - \sqrt{\lambda_3} - \sqrt{\lambda_4}, 0 \}$  表示, 其中物理量  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$  分别是矩阵  $R = \rho_{AB}(\sigma_y \otimes \sigma_y)\rho_{AB}^*(\sigma_y \otimes \sigma_y)$  按降序排列的本征值.  $C = 0$  对应于没有纠缠态, 而  $C = 1$  为最大纠缠态.

另一方面, 在经典信息理论中, 对于任意的二分态  $\rho_{AB}$ , 两个子系统之间的总关联可以用量子互信息来描述, 有<sup>[28]</sup>

$$L(\rho_{AB}) = S(\rho_A) + S(\rho_B) - S(\rho_{AB}), \quad (1)$$

其中  $S(\rho) = -\text{Tr}(\rho \log_2 \rho)$  是冯·诺伊曼熵,  $\rho_{A(B)} = \text{Tr}_{B(A)}\rho$  是通过追踪系统 B(A) 的约化密度矩阵. 量子互信息它通常被用来度量包含量子关联和经典关联的总关联. 对于子系统 A 和 B 的经典关联可以定义为

$$CC(\rho_{AB}) = \max_{\{B_k\}} L(\rho_{AB}|\{B_k\}), \quad (2)$$

其中  $L(\rho_{AB}|\{B_k\})$  是在量子系统 B 上的一个基于给定度量基  $\{B_k\}$  的量子相互信息的变量, 如下所示:

$$L(\rho_{AB}|\{B_k\}) = S(\rho_A) - \sum_k p_k S(\rho_k), \quad (3)$$

其中

$$\rho_k = (I_k \otimes B_k)\rho_{AB}(I_k \otimes B_k)/p_k$$

是  $k$  在 B 的概率

$$p_k = \text{Tr}[(I_k \otimes B_k)\rho_{AB}(I_k \otimes B_k)]$$

之后对 A 的投影度量态.  $I_k$  是子系统的单位算符. 子系统 B 在二维希尔伯特空间由  $\{|0\rangle, |1\rangle\}$  描述时, 局部度量的完全集由  $\{B_k = V|k\rangle\langle k|V^\dagger, (k=0,1)\}$  给出, 这里任意么正变换  $V(\theta, \varphi)$  (其中  $\theta \in [0, \pi], \varphi \in [0, 2\pi]$ ) 为

$$V(\theta, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} & \sin \frac{\theta}{2} e^{-i\varphi} \\ \sin \frac{\theta}{2} e^{i\varphi} & -\cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}, \quad (4)$$

那么, QD 是总关联  $L(\rho_{AB})$  和经典关联  $CC(\rho_{AB})$  之差, 即

$$\text{QD}(\rho_{AB}) = L(\rho_{AB}) - CC(\rho_{AB}). \quad (5)$$

### 3 结果及其讨论

在各向异性的两量子比特 Heisenberg XXZ 自旋链中, 每个量子比特受到外加磁场  $B_1, B_2$  的影响

而分别起作用的系统的总哈密顿量为

$$H = \frac{1}{2}[J\sigma_1^x\sigma_2^x + J\sigma_1^y\sigma_2^y + J_z\sigma_1^z\sigma_2^z + B_1\sigma_1^z + B_2\sigma_2^z], \quad (6)$$

其中  $\sigma_n^\alpha$  是第  $n$  个量子比特的泡利矩阵,  $J$  和  $J_z$  是自旋相互作用的实耦合常数. 这个模型中  $J > 0$  和  $J_z > 0$  表示反铁磁性的, 而  $J < 0$  和  $J_z < 0$  表示铁磁性的. 正如在引言中所叙述的, 我们通过分别改变  $B_1$  和  $B_2$  来研究磁场对热纠缠 (由  $C$  来度量) 和 QD 的影响. 注意到我们所做的工作  $B_1, B_2, J$  和  $J_z$  是无量纲的, 经过简单的计算, 哈密顿方程 (6) 的本征态可以由下列式子给出:

$$\begin{aligned} |\varphi_1\rangle &= |00\rangle, \\ |\varphi_2\rangle &= |11\rangle, \\ |\varphi_3\rangle &= \frac{1}{\sqrt{1+\xi^2/J^2}} \left( \frac{\xi}{J} |10\rangle + |01\rangle \right), \\ |\varphi_4\rangle &= \frac{1}{\sqrt{1+\zeta^2/J^2}} \left( \frac{\xi}{J} |10\rangle + |01\rangle \right). \end{aligned} \quad (7)$$

相应的本征值为

$$\begin{aligned} E_1 &= \frac{1}{2}[J_z - (B_1 + B_2)], \\ E_2 &= \frac{1}{2}[J_z + (B_1 + B_2)], \\ E_3 &= -\frac{J_z}{2} - \eta, \\ E_4 &= -\frac{J_z}{2} + \eta. \end{aligned} \quad (8)$$

其中

$$\eta = \sqrt{J^2 + \left(\frac{B_1 - B_2}{2}\right)^2}, \quad \xi = \frac{B_1 - B_2}{2} - \eta$$

和  $\zeta = \frac{B_1 - B_2}{2} + \eta$ .  $|0\rangle$  和  $|1\rangle$  表示两能级粒子的基态和激发态.

这里我们令  $\hbar = 1$ . 密度矩阵  $\rho_{AB} = \exp(-H/k_B T)/Z$  描述了在温度为  $T$  下的热 (正则系综) 平衡系统, 其中  $Z = \text{Tr}\{\exp(-H/k_B T)\}$  是一个配分函数, 而  $k_B$  是玻尔兹曼常数, 为了简便起见, 我们假定  $k_B = 1$ . 因此在基矢  $\{|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle\}$  中, 方程 (6) 式具有以下形式:

$$\rho_{AB} = \frac{1}{Z} \begin{pmatrix} u & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & w & 0 \\ 0 & w & y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & v \end{pmatrix}, \quad (9)$$

这里

$$\begin{aligned}
 Z &= 2e^{-\frac{J_z}{2T}} \cosh[(B_1 + B_2)/2T] \\
 &\quad + 2e^{\frac{J_z}{2T}} \cosh(\eta/2T), \\
 u &= e^{-E_1/T}, \\
 x &= J^2 \left( \frac{e^{-E_3/T}}{\xi^2 + J^2} + \frac{e^{-E_4/T}}{\zeta^2 + J^2} \right), \\
 v &= e^{-E_2/T}, \\
 y &= \frac{e^{-E_3/T} \xi^2}{\xi^2 + J^2} + \frac{e^{-E_4/T} \zeta^2}{\zeta^2 + J^2}, \\
 w &= \frac{e^{-E_3/T} J \xi}{\xi^2 + J^2} + \frac{e^{-E_4/T} J \zeta}{\zeta^2 + J^2}. \quad (10)
 \end{aligned}$$

经过简单的代数运算, 我们很容易地分别得出在有限温度下热量子纠缠

$$C = \frac{2}{Z} \max \{ |w| - \sqrt{uv}, 0 \}, \quad (11)$$

和热量子失协

$$QD(\rho_{AB}) = S(\rho_B) - S(\rho_{AB}) + \min(S_0, S_1), \quad (12)$$

其中

$$\begin{aligned}
 S_0 &= -\frac{1-\theta_0}{2} \log_2 \frac{1-\theta_0}{2} - \frac{1+\theta_0}{2} \log_2 \frac{1+\theta_0}{2}, \\
 \theta_0 &= \sqrt{\left( \frac{u-y+x-v}{Z} \right)^2 + 4 \left| \frac{w}{Z} \right|^2}, \\
 S_1 &= \frac{v}{Z} \log_2 \frac{v}{x+v} + \frac{x}{Z} \log_2 \frac{x}{x+v} \\
 &\quad + \frac{u}{Z} \log_2 \frac{u}{u+y} + \frac{y}{Z} \log_2 \frac{y}{u+y}. \quad (13)
 \end{aligned}$$

接着下来我们应用方程 (11) 和 (12) 式数值计算和讨论在有限温度  $T$  下外加磁场 ( $B_1$  和  $B_2$ ) 对  $C$  和  $QD$  特性的影响.

首先我们考虑无任何外加磁场的情况, 即  $B_1 = B_2 = 0$  (无磁场作用于量子比特) 时,  $C$  和  $QD$  随着温度  $T$  的变化情况, 如图 1 显示. 当无任何外加磁场的时候, 文献 [24, 26] 曾研究过, 但它们只是给出了固定的或者是一定范围的耦合参数  $J$  和  $J_z$  下的热纠缠和热量子失协, 并没有对比  $J$  和  $J_z$  之间的关系下的热纠缠和热量子失协的特性. 这里, 我们着重讨论耦合参数  $J$  和  $J_z$  不同关系下的热纠缠和热量子失协, 并给出一个有趣的结论. 不失一般性, 限定  $J > 0$  的情况. 在负值区域内给定一个合适的  $J_z$  值, 就会得出以下两种结果: 1)  $J < |J_z|$ : 这时  $C$  总为 0, 而  $QD$  刚开始为 0, 随着温度  $T$  的升高而增加到一定的值, 再随着温度  $T$  的进一步升高而渐近地下降到 0; 2)  $J \geq |J_z|$ : 对于  $C$  的情况, 当  $J = |J_z|$  时,  $C$  始终为 0; 当  $J > |J_z|$  时, 刚开始  $C$  为某个最

大值, 然后随着温度  $T$  的上升而下降, 直到达到临界温度时, 纠缠  $C$  消失; 而对于  $QD$ , 在  $J = |J_z|$  和  $J > |J_z|$  时,  $QD$  刚开始分别为某个定值与最大值, 然后都随着温度  $T$  的上升而降低. 由于没有考虑退相干效应, 所以量子关联将不会消失. 因此, 在这种情况下,  $C$  比  $QD$  (考虑温度  $T$ ) 具有更强的破坏性作用. 从这层意义上来说, 在有限温度下,  $QD$  比  $C$  更强大.

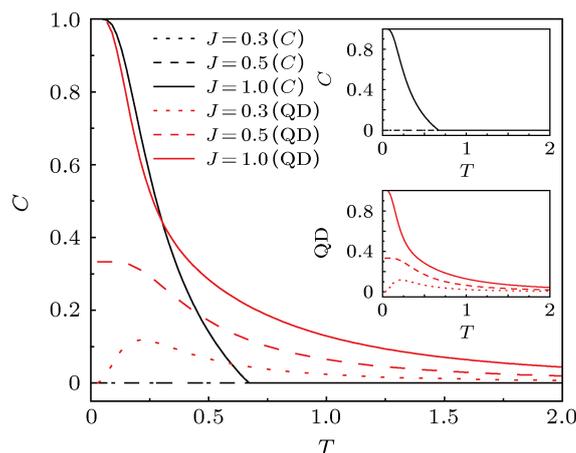


图 1 量子失协  $QD$  和量子纠缠  $C$  与温度  $T$  的关系, 其中:  $B_1 = B_2 = 0$ ,  $J_z = 0.5$ ,  $J = 0.3$  (点线),  $J = 0.5$  (虚线),  $J = 1$  (实线)

当考虑到外部磁场  $B_1$  和  $B_2$  的影响时, 对于不同的温度  $T$ , 热量子关联与外加磁场  $B_1$  的关系如图 2—图 4 所示. 这里我们定义一个新的无量纲量  $\gamma = B_2/B_1$ , 考虑以下三种情况: 1)  $\gamma = 0$ , 如图 2 所示, 外加磁场仅仅作用在一量子比特 ( $B_2 = 0$ ) 上; 2)  $\gamma = 1$ , 如图 3 所示, 外加磁场分别作用在两个量子比特上, 且磁场是均匀的 ( $B_1 = B_2$ ); 3)  $\gamma = -1$ , 如图 4 所示, 外加磁场分别作用在个两量子比特上, 且磁场是非均匀的 ( $B_1 = -B_2$ ).

从图 2 至图 4 很容易得到: 1) 在三种情况中,  $QD$  和  $C$  都是关于零磁场 ( $B_1 = 0$ ) 对称. 在温度较低 (取  $T = 0.5$ ) 的情形中,  $QD$  和  $C$  的变化趋势基本一致: 它们都是随着  $|B_1|$  的增加而逐渐地减小, 只是  $C$  总是比  $QD$  大. 然而, 在高温 (取  $T = 1.5$ ) 的情形,  $C$  在磁场  $B_1$  的一定范围内为 0, 而  $QD$  在整个区域内都不为 0. 2)  $\gamma = 1$  是不同于其他情况 ( $\gamma = 0$ ,  $\gamma = -1$ ) 的. 在  $\gamma = 1$  时, 如图 3 所示, 除了在高温  $T = 1.5$  时, 这时  $C$  在整个区域内始终为 0, 其他温度时,  $QD$  和  $C$  随着磁场  $B_1$  的增加而逐渐减小. 但是, 对于  $\gamma = 0$  (如图 2),  $\gamma = -1$  (如图 4), 在高温  $T = 1.5$  时,  $QD$  随着  $|B_1|$  的增加始终下降, 而  $C$  在整个区域内不全为 0. 从图 4 中看出,  $C$  刚开始为 0,

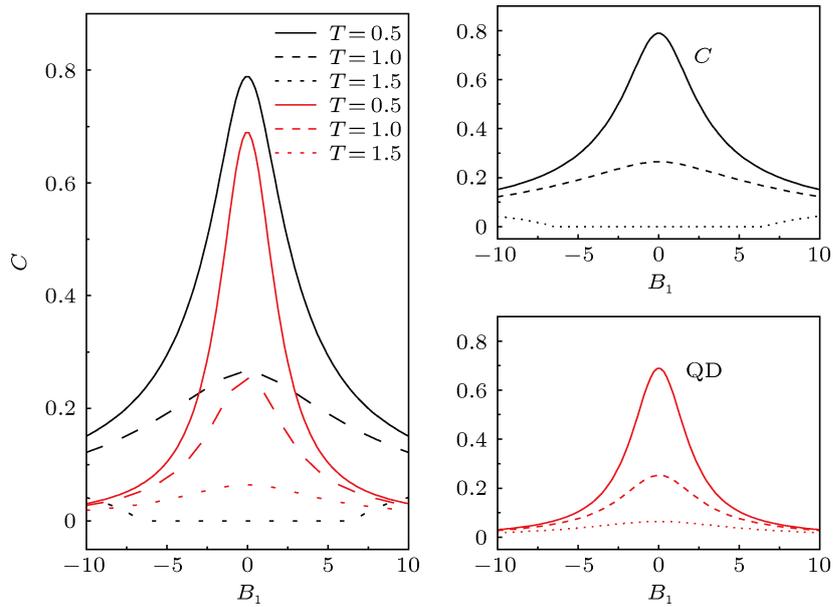


图2 量子失协 QD 和量子纠缠  $C$  与外部磁场  $B_1$  的关系, 其中:  $\gamma=0, J=1, J_z=0.5, T=0.5$ (实线),  $T=1$ (虚线),  $T=1.5$ (点线)

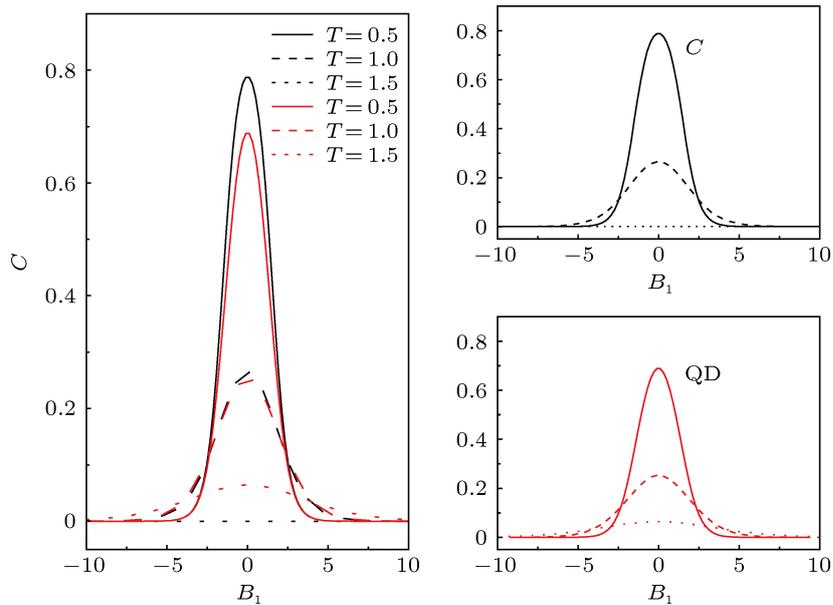


图3 量子失协 QD 和量子纠缠  $C$  与外部磁场  $B_1$  的关系, 其中:  $\gamma=1, J=1, J_z=0.5, T=0.5$ (实线),  $T=1$ (虚线),  $T=1.5$ (点线)

它会随着  $|B_1|$  的增加而增大. 事实上, 中间温度  $T=1$  的变化情况与高温  $T=1.5$  基本相同, 只是变化不明显而已. 3) 特别地, 我们发现在一些区域, 起初  $C$  (甚至从 0 开始) 增加到顶峰接着下降. 对于某一温度值, 在一些区域内,  $C$  增加的地方而 QD 减小, 比如在  $\gamma=0$ (如图 2) 时  $|B_1| > 7$  和  $\gamma=-1$ (如图 4) 时  $|B_1| > 3$ . 在另一些区域内, 如  $\gamma=0$ (如图 2) 时  $|B_1| \leq 7$  和  $\gamma=-1$ (如图 4) 时  $|B_1| \leq 3$ , 在这里没有纠缠的资源可利用. 从上面三种情况的比较, 我

们可以发现, 外部磁场在  $\gamma=-1$  时对  $C$  是最有用的, 而  $\gamma=0$  仅次于它. 这个有趣的现象可有以下的解释: 当温度达到一个特定值时, 一个合适的外加磁场能部分地削弱热波动和提高量子纠缠的破坏性作用. 注意到  $\gamma=1$  表示匀强磁场, 而  $\gamma=0$  和  $\gamma=-1$  表示非匀强磁场 (这里, 在某种意义上, 我们认为  $\gamma=0$  是非匀强磁场), 在这种情况下, 我们很容易得出: 对于  $C$  和 QD 来说, 非匀强磁场比匀强磁场更有力.

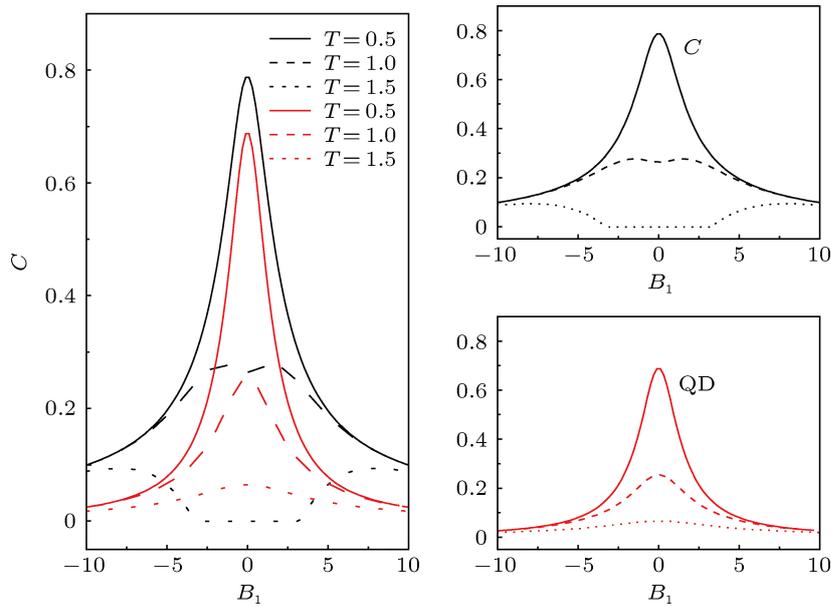


图4 量子失协 QD 和量子失协  $C$  与外部磁场  $B_1$  的关系, 其中:  $\gamma = -1, J = 1, J_z = 0.5, T = 0.5$ (实线),  $T = 1$ (虚线),  $T = 1.5$ (点线)

## 4 结论

本文研究了在四种不同的磁场环境下两量子比特 Heisenberg XXZ 自旋链中的热量子关联特性, 并讨论了温度  $T$  和分别作用在每个量子比特上的任意磁场  $B_1$  和  $B_2$  对其量子关联的影响作了详细讨论. 文中我们详细推导了  $C$  和 QD 的两种度量量子关联的解析表达式, 接着数值计算和讨论了不同磁场环境参数中它们的变化趋势. 结果表明: 在有

限温度下, 不同的磁场导致量子关联的行为不同; 在某些特定区域内, 不管外部磁场怎么变化, QD 相比于  $C$  更具有普遍性, 这是因为当不存在热纠缠 (即  $C = 0$ ) 时, QD 依然存在 (即 QD 可以不为 0). 此外, 在有外加磁场的情况下, 对于 QD 和  $C$  两者来说, 非匀强磁场比匀强磁场更有用. 因此, 在量子计算和量子信息处理过程中, 我们可以通过调整外部磁场来控制量子关联.

- [1] Nielsen M A, Chuang I L 2000 *Quantum Computation and Quantum Information* (Cambridge: Cambridge University Press) p58
- [2] Bennett C H, Wiesner S J 1992 *Phys. Rev. Lett.* **69** 2881
- [3] Ekert A K 1991 *Phys. Rev. Lett.* **67** 661
- [4] Bennett C H, Sicincenzo D P 2000 *Nature* **404** 247
- [5] Ollivier H, Zurek W H 2001 *Phys. Rev. Lett.* **88** 017901
- [6] Datta A, Shaji A, Caves C M 2008 *Phys. Rev. Lett.* **100** 050502
- [7] Lanyon B P, Barbieri M, Almedia M P, White A G 2008 *Phys. Rev. Lett.* **101** 200501
- [8] Horodecki M, Horodecki P, Horodecki R, Oppenheim J, Sen A, Sen U, Synak-Radtke B 2005 *Phys. Rev. A* **71** 062307
- [9] Dillenschneider R, Lutz E 2009 *Europhys. Lett.* **88** 50003
- [10] Rodriguez-Rosario C A, Modi K, Kuah A, Shaji A, Sudarshan E C G 2008 *J. Phys. A: Math. Theor* **41** 205301
- [11] Shabani A, Lidar D A 2009 *Phys. Rev. Lett.* **102** 100402
- [12] Datta A, Shaji S, Caves C M 2008 *Phys. Rev. Lett.* **100** 050502
- [13] Werlang T, Souza S, Fanchini F F, Villas-Boas C J 2009 *Phys. Rev. A* **80** 024103
- [14] Ding B F, Wang X Y, Liu J F, Yan L, Zhao H P 2011 *Chin. Phys. Lett.* **28** 104216
- [15] Ren J, Wu Y Z, Zhu S Q 2012 *Chin. Phys. Lett.* **29** 060305
- [16] Chakrabarty I, Agrawal P, Pati A K 2011 *Eur. Phys. J. D* **65** 605
- [17] Dhar H S, Ghosh R, Sen (De) A, Sen U 2012 *EuroPhys. Lett.* **98** 30013
- [18] Hassanl A S M, Lari B, Joag P S 2012 *Phys. Rev. A* **85** 024302
- [19] Dillenschneider R 2008 *Phys. Rev. B* **78** 224413
- [20] Sun Z, Lu X M, Song L J 2010 *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.* **43** 215504
- [21] Wang L C, Shen J, Yi X X 2011 *Chin. Phys. B* **20** 050306
- [22] Sarandy M S 2009 *Phys. Rev. A* **80** 022108
- [23] Werlang T, Trippé C, Ribeiro G A P, Rigolin G 2010 *Phys. Rev. Lett.* **105** 095702
- [24] Guo J L, Mi Y J, Zhang J, Song H S 2011 *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.* **44** 065504
- [25] Guo J L, Li Z D, Sun Y B 2011 *Opt. Commun.* **284** 1461
- [26] Werlang T, Rigolin G 2010 *Phys. Rev. A* **81** 044101
- [27] Wootters W K 1998 *Phys. Rev. Lett.* **80** 2245
- [28] Groisman B, Popescu S, Winter A 2005 *Phys. Rev. A* **72** 032317

# Thermal quantum discord in Heisenberg XXZ model under different magnetic field conditions\*

Xie Mei-Qiu Guo Bin<sup>†</sup>

(School of Science, Wuhan University of Technology, Wuhan 430070, China)

(Received 26 December 2012; revised manuscript received 5 February 2013)

## Abstract

The quantum discord of a two-qubit one-dimensional Heisenberg XXZ spinchain in thermal equilibrium depends on the temperature  $T$ , when subjected to different magnetic fields, with  $B_1$  and  $B_2$  acting separately on the qubit, is studied in this paper. Four cases are considered here: (1)  $B_1 = B_2 = 0$  (without magnetic field); (2)  $B_1 \neq 0, B_2 = 0$  (only one qubit in magnetic field); (3)  $B_1 = B_2$  (homogeneous magnetic field); (4)  $B_1 = -B_2$  (inhomogeneous magnetic field). The similarities and difference between quantum discord and quantum entanglement are calculated and discussed in detail. Results show that the quantum discord is more robust than quantum entanglement against temperature, and the effect of inhomogeneous magnetic field is preferable for the quantum communications and quantum information processing, as compared with the effect of homogeneous magnetic field.

**Keywords:** quantum correlations, entanglement, quantum discord

**PACS:** 03.67.Ac, 03.67.Hk, 03.65.Ud

**DOI:** 10.7498/aps.62.110303

---

\* Project supported by the Fundamental Research Funds for the Central University, China (Grant No. 2012-1a-053).

<sup>†</sup> Corresponding author. E-mail: binguo@whut.edu.cn