

# 弱磁场下三阱光学超晶格中自旋为 1 的超冷原子特性研究\*

秦帅锋 郑公平<sup>†</sup> 马骁 李海燕 童晶晶 杨博

(河南师范大学物理系, 新乡 453007)

(2013 年 1 月 6 日收到; 2013 年 1 月 30 日收到修改稿)

双阱光学超晶格中的超冷原子是近期冷原子物理领域的研究热点. 本文推广提出了实现三阱光学超晶格的方案, 并采用精确对角化的方法分别研究了弱磁场下对称三阱光学超晶格中铁磁性和反铁磁性的自旋为 1 的原子系统的基态, 发现二者的相图很不相同: 反铁磁性原子对应的相图中没有沿磁场方向总自旋磁量子数为  $\pm 2$  的基态, 而铁磁性原子对应的相图中可能有. 在负的二次塞曼能量区域, 铁磁性原子的相图中只有完全极化态. 分析了可控参数影响基态的物理本质. 由于这些量子自旋态可以通过调节外磁场和光势垒的高度非常简便而精确地控制, 适合用来研究自旋纠缠.

**关键词:** 三阱光学超晶格, 自旋为 1 的原子, 弱磁场

**PACS:** 03.75.Mn, 03.75.Lm, 67.85.-d

**DOI:** 10.7498/aps.62.110304

## 1 引言

1995 年玻色 - 爱因斯坦凝聚的实验实现使得超冷原子成为物理学一个非常活跃的研究领域. 21 世纪初期, 超冷原子在超流体和 Mott- 绝缘体之间的量子相变实验<sup>[1]</sup>使得光晶格成为物理学许多研究方向的超低温实验室<sup>[2]</sup>. 2007 年, 美国国家标准局的物理学家进一步实现了双阱光学超晶格<sup>[3,4]</sup>. 在双阱光晶格中, 每个双阱单元中的情况是完全一样的, 在实验中同时产生了许多完全相同的事例, 因此在一次测量过程中就可以得到所观测量的量子力学期待值<sup>[5]</sup>. 基于这个新的试验方法, 实现了许多新奇的现象. Cheinet 等通过调节偏压势<sup>[6]</sup>, 观测到双阱中无自旋原子的粒子数台阶分布, 这使得他们可以控制任意某个阱中的原子数. Trotzky 等则在对称的双阱中通过控制两个等效自旋为 1/2 的原子生成了自旋单态与自旋三重态的价键态<sup>[7]</sup>, 这对于量子磁性的实验研究非常有意义. 以往的文

献讨论光学超晶格中自旋为 1 的原子的比较少. 最近, Wagner 等研究了双阱超晶格中自旋为 1 的原子数的台阶分布<sup>[8]</sup>. 与标量原子和自旋为 1/2 的原子相比, 自旋为 1 的原子之间具有更丰富的自旋相互作用<sup>[9,10]</sup>. 本文中我们将推广双阱光学超晶格, 提出实现三阱光学超晶格的理论方案, 并研究弱磁场下对称三阱光学超晶格中自旋为 1 的原子系统的量子多体基态和相图. 由于磁场很弱及三阱之间的关联, 存在许多奇异的自旋态. 这些量子态可以通过调节外磁场和光势垒的高度非常简便而精确地控制.

## 2 模型

### 2.1 三阱光学超晶格

原子感受到的光晶格势场是由两束相对传播的激光束形成的驻波, 数学上可描述为

$$V(x) = V \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}x\right), \quad (1)$$

\* 国家自然科学基金(批准号: 11274095)、河南省科技创新杰出青年计划(批准号: 114100510021)和河南省教育厅自然科学基金基础研究计划(批准号: 2011B140010)资助的课题.

<sup>†</sup> 通讯作者. E-mail: zhengongping@yahoo.com.cn

其中  $V$  为势垒高度,  $\lambda$  为晶格周期. 本文中考虑一维情况, 推广到三维是直接的. 在光晶格势场的基础上再叠加一个半周期的光晶格势,

$$V(x) = V_1 \cos\left(\frac{4\pi}{\lambda}x\right) + V_2 \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}x\right), \quad (2)$$

调节光场强度至  $4V_1 > V_2$ , 便可得到对称双阱光晶格. 若要产生非对称双阱光晶格, 则需要再加一个磁场梯度. 我们发现: 如果三个周期比为 1:2:3 的光晶格势叠加,

$$V(x) = V_1 \cos\left(\frac{6\pi}{\lambda}x\right) + V_2 \cos\left(\frac{4\pi}{\lambda}x\right) + V_3 \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}x\right), \quad (3)$$

便可形成三阱光晶格. 调节至  $V_3 = 3V_1, V_2 = 2V_1$ , 三阱光晶格是对称的, 如图 1 所示. 与双阱光晶格不同的是, 仅仅调节三个势垒的相对强度, 便可实现非对称三阱光晶格. 按照相同的思路, 叠加四个周期比为 1:2:3:4 的光晶格势, 还可以实现四阱光晶格. 依次类推.

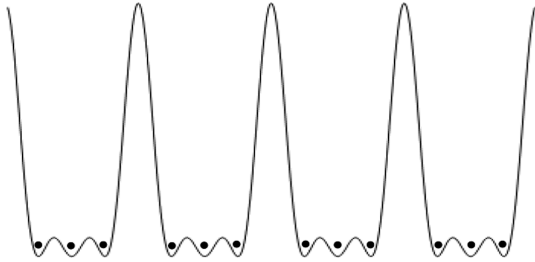


图 1 一维对称三阱光学超晶格

## 2.2 三格点 Bose-Hubbard 模型

考虑超冷的自旋为 1 的原子囚禁在如图 1 所示的一维对称三阱光学超晶格里, 每个三阱单元中囚禁三个原子. 由于原子在低势垒之间的跃迁矩阵元远大于高势垒之间的, 因此可以将此系统约化为三格点模型, 等效的 Bose-Hubbard 哈密顿量为 [8,11,12]

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}', \quad (4)$$

其中

$$\hat{H}_0 = \frac{U_0}{2} \sum_i \hat{n}_i(\hat{n}_i - 1) + \frac{U_2}{2} \sum_i (\hat{S}_i^2 - 2\hat{n}_i)$$

$$- p \sum_i \hat{S}_{iz}, \quad (5)$$

$$\hat{H}' = -t \sum_{i,j,\sigma} (\hat{a}_{i\sigma}^\dagger \hat{a}_{j\sigma} + \hat{a}_{j\sigma}^\dagger \hat{a}_{i\sigma}) - q \sum_i \hat{a}_{i0}^\dagger \hat{a}_{i0}. \quad (6)$$

$\hat{a}_{i\sigma}$  为格点  $i(i, j = 1, 2, 3)$  处自旋态  $\sigma(\sigma = 1, 0, -1)$  的原子湮没算符.  $\hat{n}_i = \sum_\sigma \hat{a}_{i\sigma}^\dagger \hat{a}_{i\sigma}$  和  $\hat{S}_i = \sum_{\sigma\sigma'} \hat{a}_{i\sigma}^\dagger T_{\sigma\sigma'} \hat{a}_{i\sigma'}$  分别为格点  $i$  处的总原子数和总自旋算符.  $T$  是自旋 1 矩阵 [13].

假设外磁场沿着  $z$  轴方向, 同时也被取为量子化轴方向. 考虑弱磁场 [14], 参数  $p$  表征线性塞曼能量. 约化后的二次塞曼能量  $q$  项平移了  $q\hat{N}$ , 其中  $\hat{N}$  是系统的总粒子数算符. 采用线性极化微波的方法, 参数  $q$  的大小和正负已经能够独立地调节 [15,16]. 参数  $U_0$  和  $U_2$  分别是不依赖和依赖自旋的相互作用常数 [17]. 对于本文考虑的排斥相互作用原子,  $U_0 > 0$ . 如果  $U_2 > 0$  或者  $U_2 < 0$ , 则自旋相互作用分别是反铁磁性的, 例如  $^{23}\text{Na}$ , 或者铁磁性的, 例如  $^{87}\text{Rb}$ . 对于实验上常用的原子,  $|U_2| \ll U_0$ .

由于磁场很弱隧穿率很小, 可以将  $\hat{H}'$  项看作微扰. 此三粒子系统的本征能量和本征态可以通过精确对角化计算.  $\hat{H}_0$  的本征态容易得到. 关于每个格点上的原子数和总自旋量子数存在两个限制条件:  $S_i \leq n_i$  和  $S_i + n_i = \text{偶数}$ . 前者很显然, 后者源于玻色系统波函数的交换对称性 [18]. 由于外磁场的存在, 系统在沿  $z$  轴方向的旋转下保持不变. 只有总自旋  $z$  分量相同的态之间才有非零矩阵元, 它们在厄米空间形成封闭的子空间. 因此根据系统总自旋的  $z$  分量, 可以把  $\hat{H}_0$  的本征态分成七组:  $S_z = 3, 2, 1, 0, -1, -2, -3$ . 然后在这七个封闭子空间里, 分别对角化总哈密顿量  $\hat{H}$  对应的约化矩阵, 得到本征能量和相应的本征态. 比较这些本征能量的大小, 就可以得到不同参数区域的基态.

## 3 基态相图

在图 2 中, 分别给出了反铁磁性和铁磁性原子对应的基态相图.

图中  $M_\alpha$  表示此态沿量子化轴方向的总自旋分量为  $\alpha$ . 如图所示, 二者的相图很不相同. 反铁磁性原子对应的相图中只可能有  $M_3, M_1, M_0, M_{-1}, M_{-3}$ , 而铁磁性原子的相图中还可能有  $M_{\pm 2}$ . 在负的  $q$  区域, 铁磁性原子的相图中只有完全极化态  $M_{\pm 3}$ .

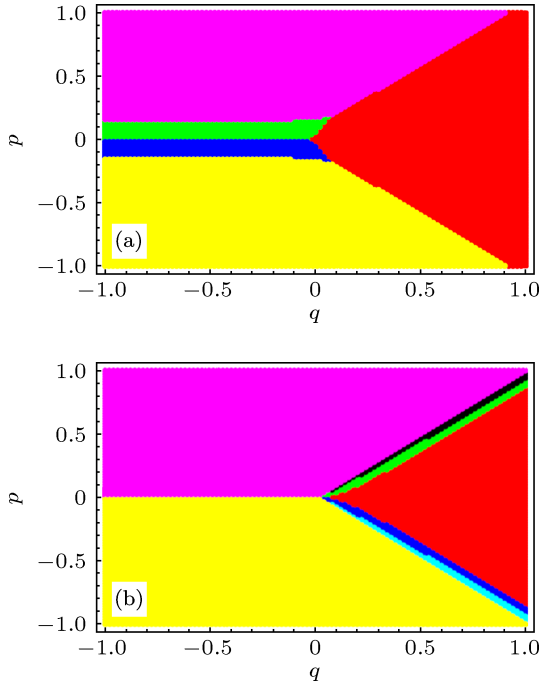


图2 基态相图(紫、黑、绿、红、蓝、浅蓝、黄色区域分别代表基态  $M_3, M_2, M_1, M_0, M_{-1}, M_{-2}, M_{-3}$ . 参数  $p, q$  均以  $^{23}\text{Na}$  原子间的  $U_2$  为单位. 铁磁性原子间依赖自旋的相互作用参数取为  $-U_2$ .  $U_0 = 25U_2, t = 5U_2$ ) (a) 反铁磁性  $^{23}\text{Na}$  原子; (b) 铁磁性原子

这些量子态可以通过调节隧穿参数  $t$  和二次塞曼能量  $q$  精确地控制. 完全极化态  $M_{\pm 3}$  的形式为

$$\begin{aligned} & |1, \pm 1; 1\rangle_1 |1, \pm 1; 1\rangle_2 |1, \pm 1; 1\rangle_3 \\ & + B_3 |2, \pm 2; 2\rangle_1 |1, \pm 1; 1\rangle_2 |0, 0; 0\rangle_3 \\ & + A_3 |3, \pm 3; 3\rangle_1 |0, 0; 0\rangle_2 |0, 0; 0\rangle_3, \end{aligned} \quad (7)$$

其中右矢态中的三个数字依次表示自旋量子数、磁量子数和原子数目, 下标标记格点位置. 由于格点位置是可以区分的, 因此通过交换下标, 另外有五个  $\hat{H}_0$  的本征态与  $|2, \pm 2; 2\rangle_1 |1, \pm 1; 1\rangle_2 |0, 0; 0\rangle_3$  是简并的, 在基态中它们是等权叠加的. 为了简化符号, 只写出其中一个. 当然,  $|1, \pm 1; 1\rangle_1 |1, \pm 1; 1\rangle_2 |1, \pm 1; 1\rangle_3$  态是唯一的, 因为全同量子态不可区分.

基态  $M_{\pm 2}$  的形式为

$$\begin{aligned} & |1, \pm 1; 1\rangle_1 |1, \pm 1; 1\rangle_2 |1, 0; 1\rangle_3 \\ & + B_2 \{ |2, \pm 2; 2\rangle_1 |1, 0; 1\rangle_2 |0, 0; 0\rangle_3 \\ & + \beta_2 |2, \pm 1; 2\rangle_1 |1, \pm 1; 1\rangle_2 |0, 0; 0\rangle_3 \} \\ & + A_2 |3, \pm 2; 3\rangle_1 |0, 0; 0\rangle_2 |0, 0; 0\rangle_3, \end{aligned} \quad (8)$$

其中  $A_2, B_2$  及态  $M_{\pm 3}$  中的  $A_3, B_3$  均随着隧穿参数  $t$  的增大而增大. 态  $M_{\pm 3}$  和  $M_{\pm 2}$  都不受外磁场控制, 包括  $M_{\pm 2}$  态中的参数  $\beta_2$ . 但是态  $M_{\pm 1}$  为

$$\begin{aligned} & |1, \pm 1; 1\rangle_1 |1, 0; 1\rangle_2 |1, 0; 1\rangle_3 \\ & + \zeta_1 |1, \pm 1; 1\rangle_1 |1, 1; 1\rangle_2 |1, -1; 1\rangle_3 \\ & + B_1 \{ |0, 0; 2\rangle_1 |1, \pm 1; 1\rangle_2 |0, 0; 0\rangle_3 \\ & + \beta_1 |2, \pm 2; 2\rangle_1 |1, \mp 1; 1\rangle_2 |0, 0; 0\rangle_3 \\ & + \gamma_1 |2, \pm 1; 2\rangle_1 |1, 0; 1\rangle_2 |0, 0; 0\rangle_3 \\ & + \lambda_1 |2, 0; 2\rangle_1 |1, \pm 1; 1\rangle_2 |0, 0; 0\rangle_3 \} \\ & + A_1 \{ |1, \pm 1; 3\rangle_1 |0, 0; 0\rangle_2 |0, 0; 0\rangle_3 \\ & + \delta_1 |3, \pm 1; 3\rangle_1 |0, 0; 0\rangle_2 |0, 0; 0\rangle_3 \} \end{aligned} \quad (9)$$

与  $M_0$  为

$$\begin{aligned} & |1, 0; 1\rangle_1 |1, 0; 1\rangle_2 |1, 0; 1\rangle_3 \\ & + \zeta |1, 0; 1\rangle_1 |1, 1; 1\rangle_2 |1, -1; 1\rangle_3 \\ & + B \{ |0, 0; 2\rangle_1 |1, 0; 1\rangle_2 |0, 0; 0\rangle_3 \\ & + \gamma |2, 0; 2\rangle_1 |1, 0; 1\rangle_2 |0, 0; 0\rangle_3 \\ & + \beta \{ |2, 1; 2\rangle_1 |1, -1; 1\rangle_2 |0, 0; 0\rangle_3 \\ & + |2, -1; 2\rangle_1 |1, 1; 1\rangle_2 |0, 0; 0\rangle_3 \} \\ & + A \{ |1, 0; 3\rangle_1 |0, 0; 0\rangle_2 |0, 0; 0\rangle_3 \\ & + \delta |3, 0; 3\rangle_1 |0, 0; 0\rangle_2 |0, 0; 0\rangle_3 \}, \end{aligned} \quad (10)$$

即  $M_{\pm 1}$  与  $M_0$  同时受隧穿参数  $t$  和二次塞曼能量  $q$  的控制. 下面详细分析自旋态  $M_0$ , 态  $M_{\pm 1}$  有类似的行为.

首先, 在图 3 给出 (10) 式中参数  $B$  对隧穿参数  $t$  的依赖关系. 可以看出: 无论铁磁性、反铁磁性还是中性原子,  $B$  都随着  $t$  的减小而减小. 参数  $A$  有类似的行为. 这是因为  $|U_2| \ll U_0$ , 而  $U_0$  项希望原子在三个格点上均匀分布. 随着  $t$  的减小,  $U_0$  项的影响增大, 在弱隧穿极限下,  $U_0$  项起决定作用,  $A, B$  都将趋于零.

(10) 式中参数  $\zeta, \beta, \gamma, \delta$  更易受二次塞曼能量  $q$  的调控. 在图 4 中, 给出了  $\zeta$  对  $q$  的依赖关系. 可以看出: 无论铁磁性还是反铁磁性原子,  $|\zeta|$  都随着  $q$  的增大而减小. 这是因为哈密顿量 (3) 式中正的  $q$  项希望各个格点上的磁量子数为零. 随着  $q$  的增大, 磁量子数非零的态减少. 对于足够强的二次塞曼能量, 铁磁性或反铁磁性的自旋为 1 的原子都趋近于中性原子. 出于同样的原因, 参数  $\beta$  有类似的行为.

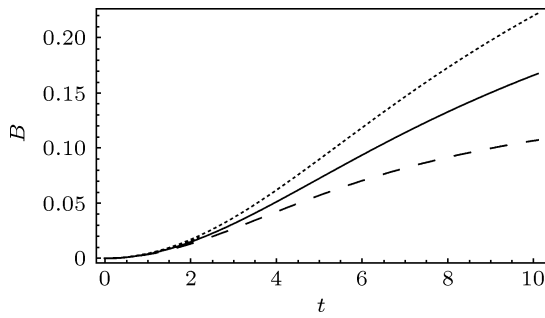


图3 基态(10)式中参数  $B$  对隧穿参数  $t$  的依赖关系(点状线、实线和虚线分别对应反铁磁性、自旋为0的和铁磁性原子.  $q = 0.5U_2$ , 其他参数同图2)

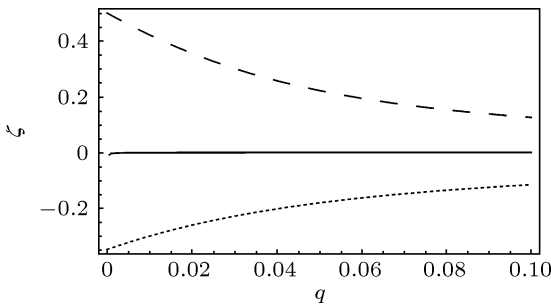


图4 基态(10)式中  $\zeta$  对二次塞曼能量  $q$  的依赖关系(点状线、实线和虚线分别对应反铁磁性、自旋为0的和铁磁性原子.  $t = 2.5U_2$ , 其他参数同图2)

图5给出了  $\delta$  对  $q$  的依赖关系. 对于反铁磁性原子, 自旋相互作用  $U_2$  项希望基态下总自旋量子数  $S_{\text{total}}$  尽可能的小, 而铁磁性原子的选择正好相反. 正的  $q$  项希望各个格点上的磁量子数为零, 但它仅仅是希望磁量子数为零, 不管  $S_{\text{total}}$  是大还是

小. 随着  $q$  的增大, 自旋相互作用  $U_2$  项的作用被弱化, 因此对于铁磁性原子  $\delta$  会减小, 而对于反铁磁性原子  $\delta$  将增大. 参数  $\gamma$  有类似的行为.

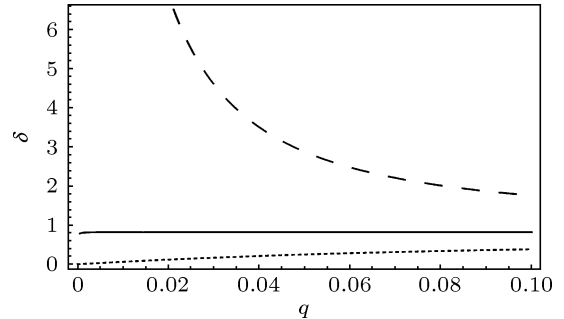


图5 基态(10)式中  $\delta$  对二次塞曼能量  $q$  的依赖关系(点状线、实线和虚线分别对应反铁磁性、自旋为0的和铁磁性原子. 参数同图4)

## 4 结论

本文从理论上研究了弱磁场下对称三阱光学超晶格中自旋为1的超冷原子系统的基态. 三阱光学超晶格具有与双阱光学超晶格相同的优点: 在实验中可以同时产生许多完全相同的事例. 同时相对于双阱光学超晶格中的两格点关联, 三格点关联具有更丰富的物理内容. 并且由于这些量子自旋态可以通过调节外磁场和光势垒的高度非常简便而精确地控制, 因此适合用来进一步研究自旋纠缠 [8,19-21].

- [1] Greiner M, Mandel O, Esslinger T, Hänsch T W, Bloch I 2002 *Nature* **419** 51
- [2] Lewenstein M, Sanpera A, Ahufinger V, Damski B, Sen A, Sen U 2007 *Advances in Physics* **56** 243
- [3] Sebby-Strabley J, Anderlini M, Jessen P S, Porto J V 2006 *Phys. Rev. A* **73** 033605
- [4] Anderlini M, Lee P J, Brown B L, Sebby-Strabley J, Phillips W D, Porto J V 2007 *Nature* **448** 452
- [5] Fölling S, Trotzky S, Cheinet P, Feld M, Saers R, Widera A, Müller T, Bloch I 2007 *Nature* **448** 1029
- [6] Cheinet P, Trotzky S, Feld M, Schnorrberger U, Moreno-Cardoner M, Fölling S, Bloch I 2008 *Phys. Rev. Lett.* **101** 090404
- [7] Trotzky S, Chen Y A, Schnorrberger U, Cheinet P, Bloch I 2010 *Phys. Rev. Lett.* **105** 265303
- [8] Wagner A, Bruder C, Demler E 2011 *Phys. Rev. A* **84** 063636
- [9] Zhang Y B, Harri M, Kalle-Antti S 2005 *Chin. Phys. Lett.* **22** 536
- [10] Pang W, Li Z B, Bao C G 2007 *Chin. Phys. Lett.* **24** 2745
- [11] Chen B L, Kou S P, Zhang Y B, Chen S 2010 *Phys. Rev. A* **81** 053608
- [12] Liang J Q, Liu J L, Li W D, Li Z J 2009 *Phys. Rev. A* **79** 033617
- [13] Pethick C J, Smith H 2002 *Bose-Einstein Condensation in Dilute Gases* (Cambridge: Cambridge University Press) p331
- [14] Zheng G P, Tong Y G, Wang F L 2010 *Phys. Rev. A* **81** 063633
- [15] Gerbier F, Widera A, Fölling S, Mandel O, Bloch I 2006 *Phys. Rev. A* **73** 041602
- [16] Ueda M 2012 *Annu. Rev. Condens. Matter Phys.* **3** 263
- [17] Ho T L 1998 *Phys. Rev. Lett.* **81** 742
- [18] Demler E, Zhou F 2002 *Phys. Rev. Lett.* **88** 163001
- [19] Hao Y J, Liang J Q 2006 *Chin. Phys.* **15** 1161
- [20] Yan D, Song L J, Chen D W 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 3679 (in Chinese) [严冬, 宋立军, 陈殿伟 2009 物理学报 **58** 3679]
- [21] Xu Y, Fan W, Chen B, Li Z X 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 060305 (in Chinese) [徐岩, 樊炜, 陈兵, 李照鑫 2011 物理学报 **60** 060305]

# Ultracold spin-1 atoms in three-well optical superlattice under a weak magnetic field\*

Qin Shuai-Feng Zheng Gong-Ping<sup>†</sup> Ma Xiao Li Hai-Yan  
Tong Jing-Jing Yang Bo

(Department of Physics, Henan Normal University, Xinxiang 453007, China)

(Received 6 January 2013; revised manuscript received 30 January 2013)

## Abstract

Ultracold atoms trapped in an optical lattice of double-well potential, the so-called optical superlattice, have received much attention in the field of cold atoms. A protocol generalized to three-well optical superlattice is suggested in this paper. The ground-state diagrams of ultracold spin-1 atoms trapped in a symmetric three-well optical superlattice in a weak magnetic field are studied based on the exact diagonalization. It is shown that the ground-state diagrams are remarkably different for the ferromagnetic and antiferromagnetic atoms. There does not exist the type of ground state for the antiferromagnetic interaction atoms, where the magnetic quantum number of the total spin of the system along the external magnetic field are  $\pm 2$ . But for the ferromagnetic interaction atoms, there do exist. In addition, there exist only the fully polarized ground-states for the ferromagnetic atoms in the negative quadratic-Zeeman-energy region. The physical origin of the dependence of the ground states on the controllable parameters are analyzed. These quantum spin-states can be controlled easily and exactly by modulating the external magnetic field and the height of the optical barrier, which may be a tool for the study of spin-entanglement.

**Keywords:** three-well optical superlattice, spin-1 atom, weak magnetic field

**PACS:** 03.75.Mn, 03.75.Lm, 67.85.-d

**DOI:** 10.7498/aps.62.110304

---

\* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 11274095), the Program of ISTTCHP (Grant No. 114100510021), and the NSBRPHPC (Grant No. 2011B140010).

<sup>†</sup> Corresponding author. E-mail: zhengongping@yahoo.com.cn