

## 玻色-费米混合气体的非线性 Landau-Zener 隧穿\*

张恒 王文元 蒙红娟 马莹 马云云 段文山†

(西北师范大学物理与电子工程学院, 兰州 730070)

(2012年11月8日收到; 2013年1月25日收到修改稿)

在有相互作用的非线性两模系统中, 通过对相互作用参数的调节, 研究了该系统中玻色-费米混合气体的 Landau-Zener 隧穿现象. 研究发现, 其中某一组分的自相互作用会影响另一组分粒子的隧穿, 使得隧穿出现临界现象.

关键词: 玻色-费米混合气体, Landau-Zener 隧穿, 量子绝热隧穿

PACS: 03.75.Mn, 74.50.+r, 71.10.Ay

DOI: 10.7498/aps.62.110305

## 1 引言

随着激光冷却技术和 Feshbach 共振技术的发展, 人们实现了玻色原子凝聚 (BEC)<sup>[1-6]</sup>、费米凝聚<sup>[7-12]</sup> 和玻色-费米混合凝聚<sup>[13-16]</sup>, 并且在实验和理论上做了大量的研究. 近年来, 双势阱模型为研究玻色-爱因斯坦凝聚 (BEC) 提供了很好的工具, 大量学者对该现象在各种物理系统中的应用做了研究, 例如宏观量子自囚禁<sup>[17]</sup>, Josephson 振荡<sup>[18]</sup>, Landau-Zener 隧穿<sup>[19,20]</sup> 以及 Rosen-Zener 隧穿等<sup>[21,22]</sup>.

Landau-Zener 隧穿是能级之间一种基本的量子现象, 它是利用外场调制两阱的能级差来研究粒子在两阱间的量子隧穿. 大量研究工作都对该现象在各种物理系统中的应用做了研究<sup>[1,23-27]</sup>.

本文采用双势阱模型, 在平均场近似下, 将单分量在非线性两模系统中的 Landau-Zener 隧穿<sup>[1]</sup> 推广到以玻色子 (<sup>87</sup>Rb)-费米子 (<sup>40</sup>K) 混合气体<sup>[28,29]</sup> 为研究对象的双分量系统中研究. 研究发现, 玻色-费米混合系统中某一组分的自相互作用会影响另一组分的隧穿, 并使得隧穿出现临界现象.

## 2 模型

在温度接近于零度的情况下, 以玻色子数目

$N_b$ , 费米子数目  $N_f$  为研究对象的玻色-费米混合系统所对应的经典哈密顿量由下式给出<sup>[13]</sup>:

$$H = \gamma_b + \gamma_f - 2k_b \sqrt{1 - s_b^2} \cos \varphi_b - 2k_f \sqrt{1 - s_f^2} \cos \varphi_f + g_{bf} N_b N_f s_b s_f + \frac{N_b g_b}{2} s_b^2 + \frac{3}{5} \left( \frac{N_f}{2} \right)^{2/3} g_f [(1 + s_f)^{5/3} + (1 - s_f)^{5/3}], \quad (1)$$

其中  $\gamma_b$  和  $\gamma_f$  分别为玻色子和费米子在两阱间的能级差,  $k_b$  和  $k_f$  分别代表玻色子和费米子的阱间耦合系数,  $g_{bf}$  为玻色子与费米子之间的相互作用参数,  $s_b$  和  $s_f$  分别为玻色子和费米子在两阱间的布居数差,  $\varphi_b$  和  $\varphi_f$  分别为玻色子和费米子在两阱间的相对相位. 通过正则变换:

$$s_b = -\frac{\partial H}{\partial \varphi_b}, \quad \varphi_b = \frac{\partial H}{\partial s_b}, \quad s_f = -\frac{\partial H}{\partial \varphi_f}, \quad \varphi_f = \frac{\partial H}{\partial s_f}.$$

可以得到描述系统的方程<sup>[13]</sup>

$$\dot{s}_b = -2k_b \sqrt{1 - s_b^2} \sin \varphi_b, \quad (2)$$

$$\dot{s}_f = -2k_f \sqrt{1 - s_f^2} \sin \varphi_f, \quad (3)$$

$$\dot{\varphi}_b = \gamma_b + N_b g_b s_b + g_{bf} N_f s_f + 2k_b \frac{s_b}{\sqrt{1 - s_b^2}} \cos \varphi_b, \quad (4)$$

\* 国家自然科学基金 (批准号: 11275156) 资助的课题.

† 通讯作者. E-mail: duanws@126.com

$$\phi_f = \gamma_f + \left(\frac{N_f}{2}\right)^{2/3} g_f [(1+s_f)^{2/3} - (1-s_f)^{2/3}] + g_{bf} N_b s_b + 2k_b \frac{s_b}{\sqrt{1-s_b^2}} \cos \phi_b, \quad (5)$$

在实验中系统参数  $k_b, k_f, \gamma_b, \gamma_f$  都是靠外磁场来调节的. 标记玻色子的自相互作用参数  $c_b = N_b g_b$ , 费米子的自相互作用参数  $c_f = \left(\frac{N_f}{2}\right)^{2/3} g_f$ . 在本文中研究中取  $k_b = k_f = 0.1$ .

### 3 计算结果及分析

在这一部分我们将研究系统的 Landau-Zener 隧穿现象, 通过取两阱间的能级差  $\gamma_b = \gamma_f = \gamma = \alpha t$ , 来研究玻色 - 费米气体混合系统的隧穿情况, 其中  $\alpha$  为扫描速率.

#### 3.1 隧穿率与扫描速率的关系

当时间  $t$  从  $-\infty$  到  $+\infty$  演化时, 我们将研究外势场以速率  $\alpha$  扫描时的量子隧穿情况. 取  $s_b(0) = s_f(0) = -0.99, \phi_b(0) = \phi_f(0) = \pi, g_{bf} = -0.1$ . 在初始时刻, 使得玻色子和费米子都处在同一个阱中. 当非线性参数  $c_b$  比较小时, 费米子数目增加, 玻色子的隧穿率随扫描速率  $\alpha$  的变化如图 1(a) 所示. 我们可以看出,  $N_f = 0$  时, 在绝热极限  $\alpha \rightarrow 0, \Gamma_b = 0$ . 但当  $\alpha \neq 0$  时,  $\Gamma_b$  也随之增加, 其中  $\Gamma_b$  为玻色子的隧穿概率. 这表明, 在无费米子的情况下, 玻色子的隧穿率随扫描速率  $\alpha$  的增大而增大, 在文献 [1] 中也得到类似的结果. 但当系统中有费米子出现时, 玻色子的隧穿情况会出现很大的不同, 随着费米子数目的增加, 即随着费米子相互作用的增强, 即使在绝热极限 ( $\alpha \rightarrow 0$ ) 时, 玻色子的隧穿率  $\Gamma_b$  也不为零并且会出现临界突变点. 如图 1(b) 所示, 当  $c_f = 0.1$  时, 随着玻色子数目的增加, 即随着玻色子相互作用的增强, 费米子的隧穿率  $\Gamma_f$  也会出现临界突变点.

当非线性参数  $c_b$  增大到 1.0 时, 在图 2(a) 中我们发现, 即使当  $\alpha \rightarrow 0, N_f = 0$  时,  $\Gamma_b$  也不为零. 这说明, 当玻色子的相互作用很大时, 即使在绝热极限下, 玻色子的隧穿率也不为零同时随  $\alpha$  的增大而增大. 但当系统中出现费米子时, 随着费米子数目的增多, 玻色子的隧穿率会出现临界突变点. 同样的, 在图 2(b) 中我们可以看到系统中的费米子也有

类似的现象.

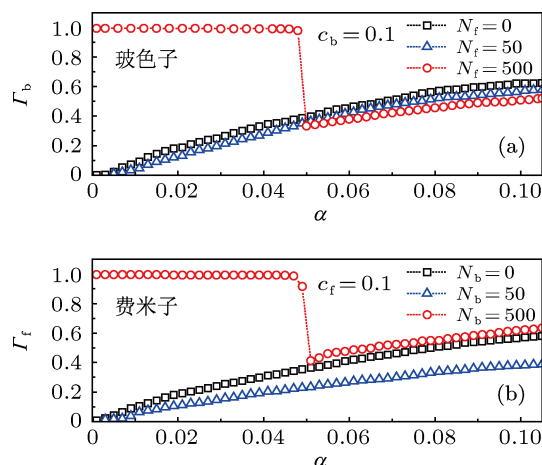


图 1 (a) 玻色子自相互作用参数  $c_b = 0.1$  时, 在不同的费米子数目下玻色子隧穿率  $\Gamma_b$  随扫描速率  $\alpha$  的变化关系, 这里取  $s_b(0) = s_f(0) = -0.99, \phi_b(0) = \phi_f(0) = \pi, g_{bf} = -0.1$ ; (b) 费米子自相互作用参数  $c_f = 0.1$  时, 在不同的玻色子数目下费米子隧穿率  $\Gamma_f$  随扫描速率  $\alpha$  的变化关系, 这里取  $s_b(0) = s_f(0) = -0.99, \phi_b(0) = \phi_f(0) = \pi, g_{bf} = -0.1$

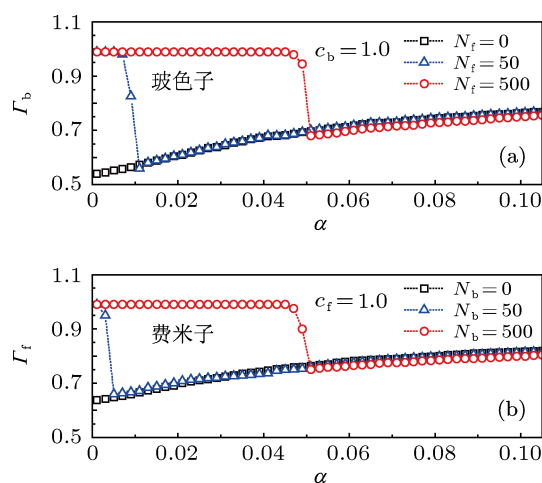


图 2 (a) 玻色子自相互作用参数  $c_b = 1.0$  时, 在不同的费米子数目下玻色子隧穿率  $\Gamma_b$  随扫描速率  $\alpha$  的变化关系, 这里取  $s_b(0) = s_f(0) = -0.99, \phi_b(0) = \phi_f(0) = \pi, g_{bf} = -0.1$ ; (b) 费米子自相互作用参数  $c_f = 1.0$  时, 在不同的玻色子数目下费米子隧穿率  $\Gamma_f$  随扫描速率  $\alpha$  的变化关系, 这里取  $s_b(0) = s_f(0) = -0.99, \phi_b(0) = \phi_f(0) = \pi, g_{bf} = -0.1$

#### 3.2 隧穿临界点与扫描速率的关系

通过以上的分析研究, 我们可以看出, 在非线性和相互作用参数  $c_b, c_f$  较小和较大两种情形中, 混合系统中玻色子和费米子在外场扫描速率  $\alpha$  变化时隧穿率随另一组分粒子数的变化出现了临界现象. 现在我们研究一下, 隧穿临界点随粒子数变化

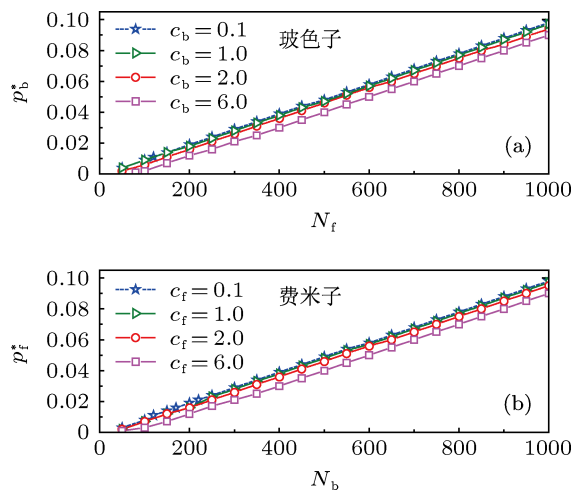


图3 (a) 玻色子在不同的自相互作用下隧穿临界点  $p_b^*$  随费米子数  $N_f$  的变化关系, 这里取玻色子数目  $N_b = 100$ ; (b) 费米子在不同的自相互作用下隧穿临界点  $p_f^*$  随玻色子数  $N_b$  的变化关系, 这里取费米子数目  $N_f = 100$

的情况. 首先, 标记玻色子的隧穿临界点为  $p_b^*$ , 费米子的隧穿临界点为  $p_f^*$ . 图 3(a) 中, 玻色子在不同的自相互作用下, 隧穿临界点随着费米子数目的增多呈线性趋势增长. 在图 3(b) 中, 费米子在不同的自相互作用下, 隧穿临界点随着玻色子数目的增多也呈线性趋势增长.

### 4 结论

在本文中我们研究了玻色 - 费米混合气体在双势阱中的 Landau-Zener 隧穿现象, 我们发现, 在非线形参数  $c_b$  和  $c_f$  一定的情况下, 随着外场扫描速率  $\alpha$  的变化, 系统中某一组分的隧穿率  $\Gamma$  会随另一组分粒子数目的变化而出现临界点, 并且, 临界点与相对应的粒子数目呈线性变化.

[1] Wu B, Niu Q 2000 *Phys. Rev. A* **61** 023402

[2] Mu Y, Fu L B, Yang Z A, Liu J 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 5623 (in Chinese) [马云, 傅立斌, 杨志安, 刘杰 2006 物理学报 **55** 5623]

[3] Wen W, Shen S Q, Huang G X 2010 *Phys. Rev. B* **81** 014528

[4] Zang X F, Li J P, Tan L 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 4348 (in Chinese) [臧小飞, 李菊萍, 谭磊 2007 物理学报 **56** 4348]

[5] Wang G F, Fu L B, Liu J 2006 *Phys. Rev. A* **73** 13619

[6] Jochin S, Bartenstein M, Altmeyer A, Hendl G, Chin C, Hecker Denschlag J, Grimm R 2004 *Phys. Rev. Lett.* **91** 240402

[7] Xiong H W, Lin S J, Zhang W P, Zhan M S 2005 *Phys. Rev. Lett.* **95** 120401

[8] Men F D, Lin H, Zhu H Y 2008 *Chin. Phys. B* **17** 3236

[9] Qin F, Chen J S 2009 *Chin. Phys. B* **18** 2654

[10] Huang Z F, Ou C J, Chen J C 2009 *Chin. Phys. B* **18** 1380

[11] Men F D, Liu H, Fan Z L, Zhu H Y 2009 *Chin. Phys. B* **18** 2649

[12] Modugno G, Roati G, Riboli F, Ferlaino F, Brecha R J, Inguscio M 2002 *Science* **297** 2240

[13] Qi P T, Duan W S 2011 *Phys. Rev. A* **84** 033627

[14] Adhikari S K, Malomed B A, Salasnich L, Toigo F 2010 *Phys. Rev. A* **81** 053630

[15] Cheng Y S, Adhikari S K, 2011 *Phys. Rev. A* **84** 023632

[16] Adhikari S K, Salasnich L 2008 *Phys. Rev. A* **78** 043616

[17] Wang G F, Fu L B, Zhao H, Liu J 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 5003 (in Chinese) [王冠芳, 傅立斌, 赵鸿, 刘杰 2005 物理学报 **54** 5003]

[18] Qi R, Yu X L, Li Z B, Liu W M 2009 *Phys. Rev. Lett.* **102** 185301

[19] Liu J, Fu L B, Ou B Y, Chen S G, Wu B, Qiu Q 2002 *Phys. Rev. A* **66** 023404

[20] Wang W Y, Meng H J, Yang Y, Qi P T, Ma Y Y, Ma Y, Duan W S 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 087302 (in Chinese) [王文元, 蒙红娟, 杨阳, 祁鹏堂, 马云云, 马莹, 段文山 2012 物理学报 **61** 087302]

[21] Ye D F, Fu L B, Liu J 2008 *Phys. Rev. A* **77** 013402

[22] Li S C, Fu L B, Duan W S, Liu J 2008 *Phys. Rev. A* **78** 063621

[23] Liu J, Wu B, Niu Q 2003 *Phys. Rev. Lett.* **90** 170404

[24] Liu J, Wu B, Niu Q 2005 *Phys. Rev. Lett.* **94** 140402

[25] Fu L B, Liu J, Chen S G 2002 *Phys. Rev. A* **298** 388

[26] Liu W M, Fan W B, Zheng W M, Liang J Q, Chui S T 2002 *Phys. Rev. Lett.* **88** 170408

[27] Huang F, Li H B 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 020303 (in Chinese) [黄芳, 李海彬 2011 物理学报 **60** 020303]

[28] Bharucha C F, Madison K W, Morrow P R, Wilkinson S R, Sundaram B, Raizen M G 1997 *Phys. Rev. A* **55** R857

[29] Madison K W, Bharucha C F, Morrow P R, Wilkinson S R, Niu Q, Sunaram B, Raizen M G 1997 *Appl. Phys. B: Lasers Opt.* **65** 693

[30] Roati G, Riboli F, Modugno G, Inguscio M 2002 *Phys. Rev. Lett.* **89** 150403

[31] Best Th, Will S, Schneider U, Hackermuller L, vanOosten D, Bloch I, Luhmann D S 2009 *Phys. Rev. Lett.* **102** 030408

# Nonlinear Landau-Zener tunneling of a Bose-Fermi mixture\*

Zhang Heng Wang Wen-Yuan Meng Hong-Juan Ma Ying  
Ma Yun-Yun Duan Wen-Shan<sup>†</sup>

(College of Physics and Electronic Engineering, Northwest Normal University, Lanzhou 730070, China)

(Received 8 November 2012; revised manuscript received 25 January 2013)

## Abstract

In this paper we study the nonlinear Landau-Zener tunneling of a boson-fermion mixture in a double-well potential by adjusting the interaction parameter of its components. We find that the tunneling in the system can be affected by adjusting the interatomic self-interaction parameter. Moreover, we notice that the tunneling in the system show a critical phenomenon if variation of interatomic self-interaction, and critical point are given.

**Keywords:** Bose-Fermi mixture gases, Landau-Zener tunneling, quantum adiabatic evolution

**PACS:** 03.75.Mn, 74.50.+r, 71.10.Ay

**DOI:** 10.7498/aps.62.110305

---

\* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 11275156).

<sup>†</sup> Corresponding author. E-mail: duanws@126.com